

Muke zvane "razlomci"

U osnovnoj školi osnovne stvari o razlomcima poučavamo u 5. i 6. razredu. U 5. razredu naglasak je na pojašnjenju samog pojma razlomka na više različitih načina (kroz različite pristupe i različite tipove zadataka), dok je u 6. razredu naglasak na računskim operacijama.

U ovom članku pokušat ću navesti na koje bismo sve načine u 5. razredu trebali pojasniti pojam razlomka, te kako **povezati** te različite pristupe i pojasniti učenicima da se u svima njima radi o **jednom te istom pojmu razlomka**. Naravno, neki moji pristupi podudaraju se s pristupima u nekim udžbenicima (ipak pričamo o istom gradivu!), no ovdje ćete ipak naći i pojašnjenja, povezivanja i zadatke kojih u udžbenicima nema.

1. Pojam razlomka uvodimo prisjećajući se primjera iz svakodnevnog života. Već smo mnogo puta čuli za: **pola** sata, **pola** čokolade, **četvrtinu** kruha... Razmislimo (i opišemo) kolika bi bila

trećina pizze, **osmina** torte, **petina** livade... U prvim pismenim primjerima bojamo: $\frac{1}{2}$

pravokutnika, srca, jednakokračnog trokuta; zatim $\frac{1}{3}$ kvadrata, pravokutnika; $\frac{1}{4}$ kruga... Zamišljamo

da su to torte, pizze, livade, čokolade... Pritom naglašavamo riječi **polovina**, **trećina**, **četvrtina**...

koje nam govore na koliko jednakih dijelova dijelimo zadani lik. Uvodimo zapise $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$...

pomoću razlomačke crte.

Kad učenici usvoje pojam polovine, trećine, četvrtine..., krećemo na uvođenje razlomaka čiji je brojnik veći od 1. Dakle, bojamo $\frac{2}{3}$ pravokutnika, $\frac{3}{4}$ kruga, $\frac{5}{9}$ kvadrata... Pritom stalno

ponavljamo da **prvo uočavamo "doljnji broj"** koji nam govori na koliko jednakih dijelova dijelimo zadani lik (dakle, prvo moramo obratiti pažnju na riječi **trećina**, **četvrtina**, **devetina**...), a zatim na **"gornji broj"** koji nam govori koliko tih dijelova trebamo obojati. Ovdje, naravno, treba uvesti i nazive **brojnik** i **nazivnik**, te prošlu rečenicu iskazati i pomoću njih.

I u vezi ovih zadataka trebamo se prisjetiti i primjera iz života, npr. $\frac{3}{4}$ kruha, možemo rezati jabuku, usitniti čokoladu...

2. Nakon što smo naučili kako **obojati** $\frac{2}{5}$ pravokutnika, treba uvježbati i **obrat**: sa sličice (npr.



) na kojoj su već obojane $\frac{2}{5}$ pravokutnika, uvježbati **očitati** koji dio je obojan. Kod prvog

ovakvog zadatka (a i kasnije, kad zaborave) mnogi odgovore: $\frac{2}{3}$ (uočavaju 2 obojana i 3 neobojana

dijela, pa iz toga slože $\frac{2}{3}$). Stoga ih trebamo uputiti da prvo izbroje koliko **ukupno** dijelova imamo (i

obojanih i neobojanih zajedno). Ako ih je npr. 5, zaključujemo da je svaki dio **petina** tog lika, pa broj 5 zapisujemo u **nazivnik**. A broj **obojanih** dijelova, tj. obojanih petina, zapisujemo u **brojnik**.

Nadalje, treba uvježbati da se sa zadane sličice očita i koji je dio zadanog lika **nebojan**. Kad učenici to savladaju, zgodno je uočiti: ako znamo koliko je dijelova obojano, iz toga i u slučaju kad **nemamo sličice** možemo **izračunati** koliko je dijelova nebojano.

Uz navedeno pod 1. i 2. prirodno se nadovezuju i sljedeći zadaci:

2.1. Dopuni rečenice:

- a) Ako pizzu podijelimo na 8 jednakih dijelova, ti dijelovi su njezine _____. Prema tome, pizza ima __ osmina. ($1 = \frac{8}{8}$)
- b) Torta ima __ osmina.
- c) Pravokutnik ima __ trećine.
- d) Jedno cijelo ima __ petina.
- e) Ako su obojane $\frac{2}{7}$ pravokutnika, nebojano je ____ pravokutnika.
- f) Ako je pokošeno $\frac{5}{8}$ livade, nepokošene su __ livade.
- g) Ako su za vrijeme predstave bile popunjene $\frac{3}{4}$ dvorane, nepopunjena je bila __ dvorane.

S boljim učenicima možemo komentirati i koliko dva, tri... cijela imaju petina, osmina...



3. Nakon što učenici dobro savladaju navedeno pod 1. i 2. vezano uz **prave** razlomke, savladati treba isto to vezano i uz **neprave** razlomke. Svakako, najvažniji zadaci kroz koje ćemo i vizualno pojasniti i uvježbati razumijevanje nepravog razlomka su zadaci poput:

3.1. Oboji:

- a) $\frac{4}{3}$ pravokutnika
- b) $\frac{9}{2}$ kruga

...

3.2. Napiši koliko je čega obojano:

- a) 
- b) 

...

Kao što u vezi pravih razlomaka slični zadaci najbolje pojašnjavaju sam pojam razlomka, mislim da slično tome u vezi nepravih razlomaka upravo navedeni zadaci najbolje pojašnjavaju njihovo značenje. Kad učenici prvi put ugledaju zadatak poput 3.1.a) “Oboji $\frac{4}{3}$ pravokutnika”, mnogi reaguju u čudu: “Pa to je nemoguće!”. Naravno, to je i za očekivati, pošto oni dosad još nisu vidjeli da je *dopušteno* nacrtati i više pravokutnika te im bojati trećine. U tom je zadatku najbolje krenuti od crtanja **jednog** pravokutnika, uočavanja nazivnika (trećina), podjele pravokutnika na 3 jednaka dijela, komentiranja/uspoređivanja koji dio bismo trebali obojati a koji je moguće (zasad) obojati...,

obojam $\frac{3}{3}$ pravokutnika, a zatim uočimo koliko još trebamo obojati, docrtamo još jedan pravokutnik... Ovo je jako efektno izvesti pomoću računala – na <http://public.carnet.hr/~ahorvate> možete naći Sketchpad datoteke u kojima sličice nastaju korak po korak (kao da ih crtate na ploči/papiru), a naknadno još možete mijenjati brojnik i/ili nazivnik te se istovremeno na sličici događaju odgovarajuće promjene...

4. Slijede zadaci tipa: " $\frac{1}{5}$ od 20 je ___", " $\frac{1}{7}$ od 42 je ___"...

U prvim takvim zadacima zadajemo razlomke s brojnikom 1. I ovdje naglašavamo da nam riječ npr. **petina** govori da zadani broj **podijelimo s 5**. Dakle, $\frac{1}{5}$ od 20 računamo kao $20:5$, a to je 4.

Zatim slijede zadaci tipa " $\frac{5}{6}$ od 48 je ___" u kojima je brojnik veći od 1. U njima naglašavamo isto što smo naglašavali i u zadacima navedenim pod 1 - da nam **nazivnik** govori na koliko jednakih dijelova dijelimo cjelinu (znači, ovdje računamo $48:6=8$), a brojnik nam govori koliko takvih dijelova trebamo "uzeti" (dakle, 5 puta "uzimamo" osmicu, tj. računamo $5 \cdot 8=40$).

Dakle, i kod zadataka tipa "Oboji $\frac{5}{6}$ pravokutnika!" i kod zadataka tipa "Koliko je $\frac{5}{6}$ od 48?", u pozadini je **ista** priča, u oba slučaja razlomak $\frac{5}{6}$ predstavlja **isto!**

Naravno, ovi zadaci nisu sami sebi svrha, već treba uvježbati i njihovu primjenu u zadacima poput:

4.1. Od 42 učenika 5.a razreda, $\frac{3}{8}$ ih ima gripu pa nisu došli u školu.

- Koliko učenika 5.a razreda nije došlo u školu?
- Koliko ih je došlo?
- Koji je dio 5.a razreda u školi? (izrazi razlomkom)

4.2. U kutiji se nalazi 20 jednako velikih čokolada. $\frac{2}{5}$ kutije čine čokolade s lješnjacima, $\frac{1}{4}$ čokolade s jagodama, $\frac{3}{10}$ čokolade s grožđicama, a ostalo su mliječne čokolade. Koliko je čokolada koje vrste u toj kutiji?

5. Slijede zadaci tipa: "Od 20 učenika nekog razreda, 11 je djevojčica. Koji dio tog razreda čine djevojčice?"

Evo zadataka kojima ćemo učenike navesti na željene zaključke:

5.1. U razredu ima 20 učenika. Tada:

- 1 učenik čini ___ razreda.
- 2 učenika čine ___ razreda.
- 3 učenika čine ___ razreda.
- 7 učenika čini ___ razreda.

e) Ako je u tom razredu 11 djevojčica, one čine __ razreda.

5.2. U bombonijeri se nalazi 16 jednakih bombona. Tada:

- a) 1 bombon čini __ bombonijere.
- b) 2 bombona čine __ bombonijere.
- c) Josip je pojeo 7 bombona iz te bombonijere. Koliki dio bombonijere je pojeo?

5.3. a) U jednu kantu stane 15 litara tekućine. Ako je Pavle u nju ulio 4 litre vode, koji dio kante je on napunio?

b) Koji je dio kante ostao nepopunjen?

5.4. Čokolada je podijeljena na 32 jednaka dijela. Zdenka je pojela 9 takvih dijelova, Martin 5, a Nikola ostatak. Koji je dio čokolade tko pojeo? (izrazi razlomkom)

5.5. Dopuni:

- a) 1 dan = __ tjedna
 - b) 2 dana = __ tjedna
 - c) 5 mj. = __ god.
 - d) 6 h = __ dana
 - e) 9 cm = __ m
 - f) 36 g = __ dag
- ...

U vezi zadataka 5.1. - 5.5., trebamo se prisjetiti na koji smo način rješavali zadatke navedene pod 2., te uočiti sličnost. U tu svrhu promotrimo sljedeća dva zadatka:

I. Mario je prošle godine 2 mjeseca bio na moru. Koji dio godine je on proveo na moru?

II. Napiši koji je dio nacrtanog pravokutnika obojan:



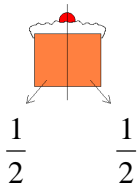
U oba slučaja rješenje je $\frac{2}{12}$ i u oba skučaja do tog rješenja dolazimo na isti način: **ukupan**

broj dijelova (dijelova godine (mjeseci) - dijelova pravolutnika) zapisujemo u **nazivnik**, a broj **obojanih** dijelova, odnosno "**dijelova provedenih na moru**", u **brojnik**.

6. Nadalje, trebamo se uvjeriti da razlomačka crta označava dijeljenje (što samo po sebi nije jasno):

6.1. Majka ima 1 kolač. Želi ga pravedno podijeliti na svoje 2 djece. Koji će dio kolača dobiti svako dijete?

Sličica:



Svako dijete dobit će $\frac{1}{2}$ kolača.

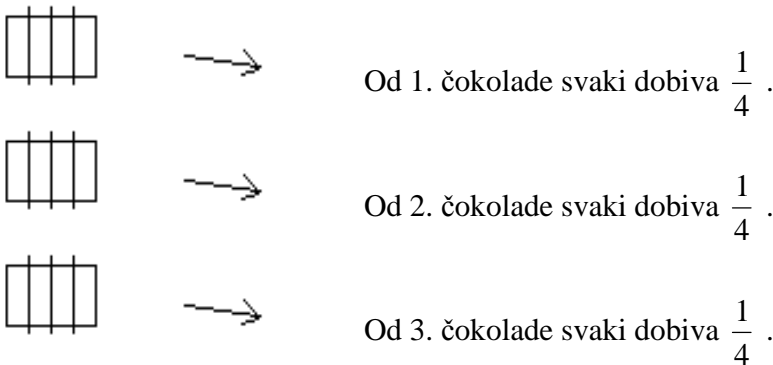
Dakle:

$$1 \text{ kolač} : 2 \text{ djece} = \text{svako dijete dobiva } \frac{1}{2} \text{ kolača}$$

$$1 : 2 = \frac{1}{2}$$

6.2. Četiri prijatelja imaju 3 čokolade. Kako da ih podijele ako žele da svaki dobije jednako mnogo čokolade? Koliko će svaki dobiti?

Nacrtamo 3 pravokutnika koji predstavljaju čokolade. Svaku čokoladu podijelimo na 4 jednaka dijela (za svakog prijatelja po jedan dio):



Zaključak: Svaki prijatelj dobit će ukupno $\frac{3}{4}$ čokolade.

Dakle:

$$3 \text{ čokolade} : 4 \text{ prijatelja} = \text{svaki prijatelj dobiva } \frac{3}{4} \text{ kolača}$$

$$3 : 4 = \frac{3}{4}$$

Slična razmatranja možemo provesti na još nekoliko primjera i izvesti zaključak da razlomačka crta "zamjenjuje znak :", tj. označava dijeljenje. Nakon tog zaključka, u sljedećim zadacima tu činjenicu treba jednostavno primijeniti:

6.3. Na Deanovom rođendanu 3 torte su podijeljene na 20 djece tako da su sva djeca dobila jednako mnogo torte. Koji dio torte je dobilo svako dijete?

6.4. Krojačica je kupila 6 m tkanine. Ako od njega namjerava napraviti 10 jednako dugih kuhinjskih krpa, kolika će biti duljina jedne krpe?

6.5. U 5 čaša raspoređeno je 8 dl soka tako da je u svakoj čaši jednaka količina soka. Koliko je soka u svakoj čaši?

Praksa pokazuje da je mnogim učenicima teško odrediti koji se broj s kojim dijeli. Tako npr. u zadnjem zadatku nisu sigurni treba li računati 5:8 ili 8:5. Da bismo im pomogli, možemo im predložiti da uz brojeve napišu i na što se oni odnose, te da razmisle o smislenosti napisanog. U ovom slučaju dobivamo zapise: "5 čaša : 8 dl soka" i "8 dl soka : 5 čaša". Koji od tih zapisa ima

smisla: prvi u kojem **č**aše **d**ijelimo **n**a **s**ok (pokušajmo zamisliti **k**ako bismo to napravili) ili drugi u kojem **s**ok **d**ijelimo (nalijevamo) **u** **č**aše? Odgovor se i sam nameće (ali nažalost, opet ne svima).

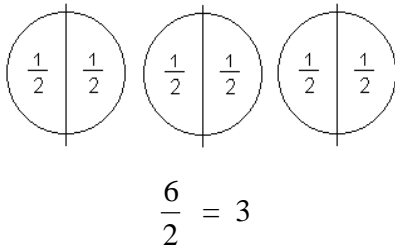
6.6. Pomoćnica djeda Mraza dobila je zadatak da 72 čokoladice ravnopravno podijeli na 8 djece. Koliko će dobiti svako dijete?

U ovom su zadatku namjerno zadani brojevi koji se mogu podijeliti bez ostatka. Naime, mnogi učenici ovdje, nakon prethodnih zadataka, automatski odgovaraju $\frac{72}{8}$, uopće ne razmišljajući može li se 72 podijeliti s 8 i koji je smisao rješenja. Na to ih treba upozoriti.

7. Zadaci pod **6.** formulirani su tako da se prilikom njihovog rješavanja kreće od računске operacije dijeljenja, pa se prelazi na zapis pomoću razlomačke crte. No, treba uvježbati i prijelaz u suprotnom smjeru, od razlomačke crte na dijeljenje. Vezano uz to treba uočiti da su neki razlomci jednaki nekim prirodnim brojevima (a može se desiti i da je više razlomaka jednako istom prirodnom broju).

7.1. Gladni Jura pojeo je $\frac{6}{2}$ pizze. Skiciraj! Koliko je Jura zapravo pojeo?

$\frac{6}{2}$ pizze:



Jura je pojeo 3 pizze.

Ovdje trebamo prokomentirati da smo do istog zaključka mogli doći i bez crtanja i bez zamišljanja pizze, jednostavnim računom $\frac{6}{2} = 6:2 = 3$ (učenici na to još nisu navikli!).

7.2. a) Marina je pojela $\frac{8}{4}$ jabuke. Koliko je zapravo pojela?

b) Da je Marina pojela $\frac{4}{2}$ jabuke, da li bi to bilo više ili manje od $\frac{8}{4}$ jabuka?

(Pred učenicima možemo i rezati jabuke.)

7.3. Kad je majka ispekla ribe, sve ih je rastvorila, tj. podijelila na polovice da se brže ohlade. Bilo je tu 10 polovica. Koliko riba je majka ispekla?

($\frac{10}{2} = 5$)

7.4. Sljedeće razlomke napiši kao količnike i, ako možeš, izračunaj:

a) $\frac{8}{2}$ b) $\frac{9}{4}$ c) $\frac{5}{10}$ d) $\frac{21}{7}$ e) $\frac{1}{9}$ f) $\frac{15}{1}$...

7.5. Koji su od razlomaka $\frac{24}{8}$, $\frac{6}{12}$, $\frac{56}{7}$, $\frac{10}{3}$, $\frac{19}{1}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{48}{8}$, $\frac{6}{42}$ i $\frac{7}{7}$ prirodni brojevi? Napiši i kojim su prirodnim brojevima jednaki.

Ovdje je opet zgodno napraviti *povezivanje gradiva*, tj. prisjetiti se da i otprije znamo da jedno cijelo ima npr. sedam sedmina, tj. $1 = \frac{7}{7}$. A sad se u tu jednakost možemo uvjeriti i dijeljenjem, $\frac{7}{7} = 7 : 7 = 1$.

Također treba uočiti da vrijedi $\frac{n}{1} = n$ i da nam ta jednakost (napisana u obliku $n = \frac{n}{1}$) govori kako se prirodni broj na najjednostavniji način pretvara u razlomak. Ujedno nam govori i da se **svaki** prirodni broj može pretvoriti u razlomak.

7.6. Sljedeće prirodne brojeve pretvori u razlomke:

a) 8 b) 17 ...

7.7. U sljedećim zadacima dopuni jednakosti. Pored svake jednakosti nacrtaj i odgovarajuću sličicu:

a) $2 = \frac{\quad}{2}$ 

b) $2 = \frac{\quad}{3}$ 

c) $2 = \frac{\quad}{4}$...

d) $2 = \frac{\quad}{5}$...

...

Prethodni zadatak (kao i zadatak 7.2.) omogućuju nam da zaključimo i istaknemo da se jedan te isti prirodan broj može na više načina napisati u obliku razlomka. Ujedno možemo istaknuti i

zaključak da je $\frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \dots$, tj. da razlomci koji imaju **različite** brojnike i nazivnike, mogu biti

jednaki (to **jako zbunjuje** učenike), tj. predstavljaju **istu količinu** nečega, samo što se u jednom slučaju radi o krupnijoj, a u drugom o sitnijoj podjeli. Ovog se je zaključka zgodno prisjetiti i kasnije kad ćemo prilikom proširivanja i skraćivanja razlomaka opet imati slučaj da razlomci sa različitim brojnicima i nazivnicima mogu biti jednaki.

8. Nakon što kroz sve navedeno dobro upoznamo razlomke, upoznajemo i mješovite brojeve. Kao i u vezi razlomaka, i njih ćemo najbolje upoznati i razumjeti kroz zadatke u kojima ih vizualno

predočavamo i prepoznajemo, npr.

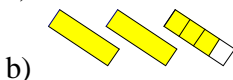
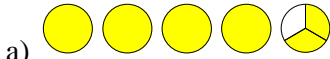
8.1. Nacrtaj i oboji:

a) $2\frac{3}{5}$ pravokutnika

b) $4\frac{1}{2}$ kruga

...

8.2. Napiši koliko je čega obojano:



...

Nakon svega ovoga slijedi pretvaranje mješovitih brojeva u razlomke i obratno, uspoređivanje razlomaka jednakih nazivnika, proširivanje i skraćivanje...

Na sve što sam navela u ovom članku (od 1. do 8.), potrošim najmanje 6 školskih sati. Zvuči puno jer nam vremena u nastavi stalno nedostaje, a po prijedlozima planova u nekim našim priručnicima bilo bi dovoljno na sve ovo potrošiti puno manje (?!). Međutim, smatram da se radi o izuzetno važnom gradivu koje spada u temelje matematičke pismenosti, a s druge strane iz prakse zaključujem da je **učenicima sve ovo novo**, da im se zaključci **ne** nameću sami od sebe i da im **posebnu poteškoću predstavljaju prijelazi s jednog načina razmišljanja na drugo**. Stoga je svaki od navedenih pristupa potrebno polako pojašniti kroz nekoliko primjera, uvježbati to, a zatim provježbati i "prijelaze".

Naravno da, kao i uz sve druge teme, tako ni vezano uz ovu problematiku nećemo svi imati jednake stavove, no mislim da je dobro da jedni druge potičemo na razmišljanja i ponovna preispitivanja samih sebe **kako** nešto radimo, pa se nadam da je i ovaj članak u tom smislu doprinos našem napretku.

Srdačan pozdrav!

Antonija Horvatek
Ul. slobode 7
10 310 Ivanić Grad
ahorvatek@yahoo.com

OŠ Josipa Badalića
Graberje Ivaničko