Najtoplije zahvaljujem:

1. **dr. Risti Malčeskom**
   http://matematickitalent.mk/Default.aspx
   što mi je poslao PDF ove izuzetno vrijedne zbirke zadataka,

2. **dr. Zoranu Kadelburgu**, **dr. Pavlu Mladenoviću** i **Društvu matematičara Srbije** (https://dms.rs/) na dozvoli da zbirku objavim na web stranicama *Matematika na dlanu*.

Antonija Horvatek

http://www.antonija-horvatek.from.hr/

http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/natjecanja-iz-matematike.htm

DRUŠTVO MATEMATIČARA SR SRBIJE

Materijali za mlade matematičare, sv. 23

ZORAN KADELBURG PAVLE MLADENOVIĆ

SAVEZNA TAKMIČENJA IZ MATEMATIKE

BEOGRAD
1990

dr Zoran Kadelburg, profesor Matematičkog fakulteta u Beogradu
dr Pavle Mladenović, docent Matematičkog fakulteta u Beogradu

SAVEZNA TAKMIČENJA IZ MATEMATIKE

Materijali za mlade matematičare, sveska 23

Izdavač: DRUŠTVO MATEMATIČARA SR SRBIJE
Beograd, Knez Mihailova 35/IV

Recenzent: *dr Aleksandar Vučić*

Urednik: *dr Vladimir Janković*

Obrada na računaru: *dr Zoran Kadelburg* i *dr Pavle Mladenović*

Slike izradili: *Izrajlo Sazdanović* i *Nenad Prvanović*

Tehnički uredili: *Autori* i *Izrajlo Sazdanović*

ISBN 86-81453-03-5

Tiraž: 3000 primeraka

Štampa: Kartonka »Avala« – Beograd

PREDGOVOR

Savezna takmičenja iz matematike učenika srednjih škola održavaju se već punih 30 godina – prvo je održano u Beogradu 1960. godine. Ona su najviši stupanj takmičenja mladih matematičara Jugoslavije i kao takva najbolja smotra njihovih mogućnosti. Zadaci sa tih takmičenja dobar su pokazatelj razvoja srednjoškolske matematike u proteklom periodu i važan orijentir budućim takmičarima u njihovim pripremama. Ti zadaci su dosad sa ili bez rešenja, objavljivani u raznim publikacijama ali, koliko je nama poznato, nigde u potpunosti i sa kompletnim rešenjima. Obeležavajući tridesetogodišnjicu Prvog saveznog takmičenja, Društvo matematičara SR Srbije ovom zbirkom popunjava tu prazninu. U zbirci su delimično korišćeni materijali šesnaeste sveske ove serije u kojoj se nalaze zadaci sa takmičenja od 1970. do 1983. godine.

Od 1963. godine Jugoslavija redovno učestvuje na Međunarodnim matematičkim olimpijadama. Na njima je predstavljena ekipom koja broji između četiri i osam članova i koja se određuje na osnovu rezultata Saveznog takmičenja, a u nekim godinama i na osnovu dodatnog kvalifikacionog takmičenja. To takmičenje, popularno nazvano „mala olimpijada", održavano je na razne načine – nekad neposredno posle Saveznog takmičenja, tada je bilo jednodnevno, a nekad i za vreme posebno organizovanih priprema kandidata za olimpijsku ekipu, koje je trajalo dva ili više dana. Zadaci sa tih takmičenja su dosad retko objavljivani (još manje sa rešenjima), pa smo smatrali da i te zadatke treba uključiti u ovu zbirku. Nažalost, nismo uspeli da dođemo do svih zadataka – nedostaju oni iz godina 1964–1966. i 1971. U ostalim godinama koje nisu zastupljene u ovoj zbirci male olimpijade nisu održane.

Zahvaljujemo se recenzentu dr Aleksandru Vučiću, koji je pažljivo pročitao rukopis i dao niz korisnih primedbi i sugestija. Takođe se zahvaljujemo Matematičkom fakultetu koji nam je stavio na raspolaganje kompjutersku opremu za tehničku pripremu zbirke.

U Beogradu, januara 1990. Autori

PRVO SAVEZNO TAKMIČENJE
BEOGRAD, 1960.

3. RAZRED

1. Osnova kvadra visine 5 je pravougaonik obima 4.

a) Kolike treba da budu osnovne ivice, da bi kvadar imao maksimalnu zapreminu?

b) Izraziti zapreminu kvadra u funkciji jedne osnovne ivice. Koji je domen te funkcije?

c) Nacrtati grafik pomenute funkcije.

Neka je data jedna osnovna ivica $a = 2$ i visina $h = 5$ kvadra. Kako tada zavisi zapremina od obima osnove? Koje su dopuštene vrednosti za taj obim? Prikazati odgovarajuću funkciju grafički.

2. Kolika je ivica kocke, koja je upisana u pravilnu trostranu piramidu s osnovnom ivicom a i visinom v, tako da četiri temena pripadaju bazi, a ostala četiri bočnim stranama piramide?

3. Odrediti sve vrednosti x, za koje važi

$$\log_{1/2}(x^2 - 4x + 3) > -3.$$

4. Dat je krug (c) sa centrom O i poluprečnikom R. Tačka O_1 koja se nalazi na periferiji datog kruga, centar je drugog kruga sa poluprečnikom $r = R/2$.

Ako su A i B presečne tačke ova dva kruga, izračunati približnu vrednost ugla AOB (u radijanima), a zatim zapreminu preseka lopti koje se dobijaju rotacijom ova dva kruga oko prave OO_1.

5. Dokazati identitet

$$(1 - \cos b \cdot \cos c)^2 - 2(1 - \cos b \cdot \cos c) - \sin^2 b \sin^2 c + \sin^2 b + \sin^2 c = 0.$$

4. RAZRED

1. Dokazati da je proizvod tri uzastopna prirodna broja deljiv sa $7 \cdot 8 \cdot 9$, ako je srednji broj kub prirodnog broja.

2. Dat je krug (O, r), jedan njegov prečnik AB i jedna tačka M na krugu. Neka je Q projekcija tačke M na AB, N središte duži MQ i D druga tačka preseka

prave AN i datog kruga. Odrediti jednačinu geometrijskog mesta preseka P pravih BD i QM, kad se tačka M kreće po krugu (O, r).

3. Razlika recipročnih vrednosti dva uzastopna cela broja jednaka je $0,0aa\ldots$, gde $a \in \{1, 2, \ldots, 9\}$. Za koje vrednosti a zadatak ima rešenja i koliko?

4. Kroz proizvoljnu tačku unutar datog trougla prolaze tri prave koje su paralelne stranicama trougla. Ove prave dele površ trougla na 6 delova od kojih su tri trougla s površinama s_1, s_2, s_3. Kolika je površina datog trougla?

5. Data je familija krivih

$$y = (m-1)x^2 + 2mx + 4.$$

a) Dokazati da sve date krive sadrže dve fiksirane tačke A i B. Odrediti te tačke.

b) Odrediti krivu date familije koja dodiruje osu Ox, a zatim odrediti onu krivu čije je teme tačka B (B je ona od zajedničkih tačaka datih krivih, koja ne pripada osi Ox).

DRUGO SAVEZNO TAKMIČENJE
BEOGRAD, 1961.

3. RAZRED

1. Ako su x_1 i x_2 rešenja jednačine $x^2 + kx + 1 = 0$, naći one vrednosti k, za koje važi nejednakost

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 > 2.$$

2. Odrediti najveću vrednost izraza

$$\log_2^4 x + 12\log_2^2 x \cdot \log_2\left(\frac{8}{x}\right),$$

ako promenljiva x varira u intervalu $[1, 64]$.

3. Prav valjak i kupa imaju zajedničku osnovu, a vrh kupe nalazi se u središtu druge osnove valjka. Odrediti ugao između izvodnice kupe i ose valjka, ako je odnos površina valjka i kupe $7:4$.

4. Stranice trougla ABC su a, b i c, pri čemu je $a < b < c$. Nad njima su konstruisani slični pravougaonici, tako da je površina pravougaonika nad stranicom c veća od zbira površina ostala dva pravougaonika za površinu kvadrata čija je stranica jednaka m. Naći visine tih pravougaonika.

4. RAZRED

1. Dat je opšti član niza $a_n = (c^2 + n - 2)/2$, gde je c prirodan broj.

a) Odrediti zbir S_n prvih n članova niza.

b) Dokazati da je brojilac zbira S_c deljiv sa 25, ako je $c = 10k + 1$, gde je k prirodan broj.

2. Dokazati da je zbir kvadrata rastojanja proizvoljne tačke kruga od svih temena jednakostraničnog trougla upisanog u taj krug konstantna veličina.

3. Odrediti parametar λ, tako da je rastojanje središta kruga

$$x^2 + y^2 + 4x - 4y - 17 = 0$$

od prave $x - (\lambda + 2)y - \lambda - 4 = 0$ jednako $5/\sqrt{2}$.

Tangente koje dodiruju krug u presečnim tačkama sa datom pravom i sama prava obrazuju trougao. Odrediti površinu preseka kruga opisanog oko tog trougla i datog kruga. (Za λ uzeti celobrojno rešenje.)

4. Dokazati da pozitivni realni brojevi a, b i c mogu biti dužine stranica trougla, ako i samo ako nejednakost $a^2p + b^2q > c^2pq$ važi za sve parove realnih brojeva p i q, čiji je zbir jednak 1.

TREĆE SAVEZNO TAKMIČENJE
BEOGRAD, 1962.

3. RAZRED

1. Data je funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a > 0)$. Dokazati da za sve vrednosti x_1 i x_2 važi

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

2. Date su lopte poluprečnika R i r $(R > r)$. Rastojanje između centara tih lopti jednako je c, pri čemu je $R - r < c < R + r$. Izraziti zapreminu kupe koja je opisana oko tih lopti kao funkciju R, $d = R - r$ i c. Dokazati da je odnos zapremina te kupe i veće lopte veći ili jednak 2. Izračunati površinu one kupe za koju je taj odnos jednak 2.

3. Kvadrat $ABCD$ stranice a zarotiran je za $45°$ oko temena A, tako da se teme B_1 dobijenog kvadrata $A_1B_1C_1D_1$ nalazi unutar datog kvadrata. Neka je M presek pravih C_1D_1 i BC. Kolika je površina kvadrata sa stranicom AM?

4. Data je funkcija $f(x) = A\cos x + B\sin x$ (A i B su konstante). Ako postoje realni brojevi x_1 i x_2 takvi da razlika $x_1 - x_2$ nije ceo umnožak broja π i da je $f(x_1) = f(x_2) = 0$, dokazati da za svaki realan broj x važi $f(x) = 0$.

4. RAZRED

1. Dat je niz $\log x$, $\log\sqrt{x}$, $\log\sqrt[3]{x}, \ldots$. Naći zbir $S(x)$ tog niza i nacrtati grafik funkcije $S(x)$, $x > 0$.

2. Date su funkcije $y_1 = \sin^4 x + \cos^4 x$ i $y_2 = \sin^6 x + \cos^6 x$. Dokazati da ove funkcije imaju osnovni period $\pi/2$ i da je $3y_1 - 2y_2 = 1$. Za koje vrednosti x prva funkcija ima za $1/16$ veću vrednost od druge?

3. Date su stranice $a = BC$ i $b = CA$ trougla ABC. Izračunati dužinu treće stranice, ako je ona jednaka dužini odgovarajuće visine. Za koje vrednosti a i b zadatak ima rešenja?

4. U ravni α data je prava p i tačka P, koja ne pripada pravoj p. Odrediti geometrijsko mesto tačaka M u ravni α, za koje važi $MP/MN = e$, gde je N podnožje normale iz tačke P na pravu p, a e je dati pozitivan broj.

ČETVRTO SAVEZNO TAKMIČENJE
BEOGRAD, 1963.

3. RAZRED

1. Dokazati da za svako realno rešenje x jednačine $x^2 + px + q = 0$ (p i q su realni brojevi) važi

$$x \geq \frac{4q - (p+\lambda)^2}{4\lambda},$$

gde je λ proizvoljan pozitivan broj.

2. Rešiti nejednačinu

$$\frac{x}{x-a} - \frac{2a}{x+a} > \frac{8a^2}{x^2-a^2},$$

gde je a realan parametar.

3. Neka su a, b, c stranice trougla i α, β, γ njegovi uglovi. Dokazati da za oštre uglove x, y, z, koji su određeni jednakostima

$$\cos x = \frac{a}{b+c}, \quad \cos y = \frac{b}{a+c}, \quad \cos z = \frac{c}{a+b}$$

važe sledeće jednakosti

$$\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{y}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{z}{2} = 1,$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{y}{2} \operatorname{tg} \frac{z}{2} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}.$$

4. Osnova piramide je paralelogram. Kroz jednu ivicu te osnove i srednju liniju bočne strane naspram te ivice postavljena je ravan. U kom odnosu ta ravan deli zapreminu piramide?

4. Razred

1. Iz kvadrata stranice $2a$ isečena su 4 jednakokraka trougla, čije su osnovice stranice datog kvadrata i čije su visine jednake x. Preostali deo kvadrata predstavlja mrežu pravilne četvorostrane piramide.

a) Izraziti zapreminu V te piramide kao funkciju parametra x.

b) Odrediti x tako da zapremina V bude maksimalna.

c) Skicirati grafik funkcije $V(x)$.

2. Dokazati da u jednakokrakom trouglu sa osnovicom c, krakom a i simetralom d ugla na osnovici važi jednakost

$$d^2 = c^2 \frac{a(2a+c)}{(a+c)^2}.$$

3. Neka je AB prečnik kruga K poluprečnika R koji pripada ravni α i neka je S tačka koja pripada normali na ravan α u tački B. Kroz tačku S postavljena je ravan β, koja je normalna na ravan ABS i koja s ravni α gradi ugao $\pi/3$.

a) Odrediti granične vrednosti za $x = BS$ tako da ravan β seče krug K u dvema tačkama C i D.

b) Dokazati da su uglovi SCA i SDA pravi.

c) Naći zbir y kvadrata ivica tetraedra $SDAC$ u funkciji od x i R.

d) Odrediti geometrijsko mesto ekstremuma funkcije $y(x)$ kada R varira.

4. Odsečak proizvoljne tangente parabole $y^2 = 2px$, ograničen dvema fiksiranim tangentama parabole, ortogonalno se projektuje na direktrisu parabole. Dokazati da je dužina te projekcije konstantna.

PETO SAVEZNO TAKMIČENJE
Beograd, 1964.

3. Razred

1. Odrediti skup tačaka (a, b) u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu Oab, tako da su sva rešenja jednačine $x^4 - 2(a-b)x^2 + 2(4-ab) = 0$ realna.

2. Ako je r poluprečnik upisanog kruga trougla površine p i s_α, s_β, s_γ dužine simetrala unutrašnjih uglova tog trougla, dokazati da je $rs_\alpha s_\beta s_\gamma \leq p^2$ i da jednakost važi ako i samo ako je dati trougao jednakostraničan.

3. Jednakokraki trougao sa uglom α na osnovici je osnova jedne piramide, čije sve bočne ivice grade sa osnovom jednake uglove $\varphi = 90^\circ - \alpha$. Ravan koja prolazi kroz visinu piramide i vrh jednakokrakog trougla u osnovi seče piramidu po figuri čija je površina p. Izračunati zapreminu piramide.

4. Jednakostranični trougao ABC ortogonalno se projektuje na proizvoljnu osu. Odrediti ugao jednog od vektora $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ prema osi, tako da zbir trećih stepena projekcija tih vektora bude jednak nuli.

4. Razred

1. Data je funkcija $y = xe^{-\alpha x^2}$, gde je α pozitivna konstanta.

a) Ispitati tok ove funkcije za proizvoljno α i nacrtati grafik za $\alpha = 2$.

b) Ekstremne tačke date funkcije menjaju sa α svoj položaj u xy-ravni. Odrediti krivu $y = f(x)$ kojoj pripadaju sve te ekstremne tačke.

c) Naći površinu $P(b)$ dela ravni ograničenog lukom dela grafika date funkcije, x-osom i pravom $x = b$ $(b > 0)$. Kolika je granična vrednost površine $P(b)$ kada $b \to +\infty$?

2. Tri lopte dodiruju jednu ravan u tačkama A, B, C, pri čemu je $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Odrediti poluprečnike ovih lopti, ako se zna da se one međusobno dodiruju.

3. Mogu li brojevi 2, $\sqrt{6}$, $4\frac{1}{2}$ biti članovi jednog istog aritmetičkog ili jednog istog geometrijskog niza?

4. Dokazati da je nejednakost $b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 > \frac{1}{2}(a^4 + b^4 + c^4)$, gde su a, b, c pozitivni brojevi, potreban i dovoljan uslov da su a, b, c dužine stranica trougla.

5. Date su dve paralelne prave a_1 i a_2 i m tačaka na a_1 i n tačaka na a_2. Svaka od m tačaka prave a_1 spojena je sa svakom od n tačaka prave a_2. Ako se ni u jednoj tački između pravih a_1 i a_2 ne seku više od dva od dobijenih odsečaka, odrediti koliki je broj tih presečnih tačaka.

ŠESTO SAVEZNO TAKMIČENJE
Beograd, 1965.

3. Razred

1. Rešiti jednačinu

$$x^3 - (m^2 + 3)x^2 + (m^2 + 3)x + m^4 - 1 = 0$$

po nepoznatoj x rastavljajući polinom $P(m)$ na levoj strani te jednačine na faktore.

2. Izračunati ivice kvadra, ako je poznat njihov zbir s i njegova dijagonala d, a jedna od ivica je geometrijska sredina druge dve.

3. Naći sva realna rešenja x $(0 < x < 2\pi)$ nejednačine:

$$\frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x} > 1.$$

4. U paralelepipedu čije su strane podudarni rombovi sa uglom od 60° data je najveća dijagonala d. Odrediti ivice i dijagonale tela.

4. Razred

1. Naći zbir svih brojeva u tablici

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & k \\ 2 & 3 & 4 & \dots & k+1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & k+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ k & k+1 & k+2 & \dots & 2k-1 \end{array}$$

2. Data je funkcija $y = x^3 + px + q$.

a) Ako je M lokalni maksimum, a m lokalni minimum date funkcije, dokazati da je

$$Mm = q^2 + \frac{4}{27}p^3.$$

b) Odrediti p i q, tako da je $M - m = 4$ i da je -2 nula funkcije. Ispitati tok dobijene funkcije.

3. Dat je konveksan petougao $A_1A_2A_3A_4A_5$ i tačke B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, tako da svaka stranica petougla sadrži tačno jednu od tih tačaka. Konstruisane su sve prave određene temenima petougla i tačkama B_1, B_2, B_3, B_4, B_5. Ako se zna da se (ne računajući tačke A_i i B_j) nikoje tri od tih pravih ne seku u jednoj tački i nikoje dve nisu paralelne, odrediti broj svih tačaka u kojima se seku po dve od tih pravih.

4. Na ivicama triedra, čiji je vrh S i kod koga su svi ivični uglovi jednaki, date su duži $SA = SB = SC = l$. Odrediti ivični ugao, tako da zapremina tetraedra $SABC$ bude maksimalna.

SEDMO SAVEZNO TAKMIČENJE
Beograd, 1966.

3. Razred

1. Naći četvorocifren broj koji je kvadrat prirodnog broja i kod koga su prve dve cifre jednake i poslednje dve cifre jednake.

2. Dokazati da se zapremine tetraedara koji imaju jedan triedar zajednički odnose kao proizvodi njihovih ivica koje polaze iz vrha zajedničkog triedra.

3. Odrediti sve vrednosti x iz intervala $[0, 2\pi]$ za koje važi nejednakost

$$2(\cos^2 x - \sqrt{3}\sin^2 x) > (\sqrt{3} - 1)\sin^2 2x.$$

4. Rešiti sistem jednačina

$$x + y + z = 1, \quad ax + by + cz = d, \quad a^2x + b^2y + c^2z = d^2,$$

gde su a, b, c realni parametri za koje važi $a \neq b$, $b \neq c$, $c \neq a$.

5. Krugovi K' i K'' dodiruju se spolja, a njihova zajednička spoljna tangenta dodiruje ih u tačkama A_1 i A_2. Neka su C_1 i C_2 redom centri krugova K' i K'' i neka je E presek zajedničke spoljašne i zajedničke unutrašnje tangente tih krugova.

a) Dokazati da je trougao C_1EC_2 pravougli.

b) Ako se krugovi K' i K'' i duž A_1A_2 rotiraju oko prave C_1C_2, onda duž A_1A_2 opisuje omotač zarubljene kupe, a krugovi K' i K'' opisuju sfere. Izračunati površinu M omotača zarubljene kupe.

c) Ako su poluprečnici r_1 i r_2 dobijenih sfera promenljivi, a njihov zbir $r_1 + r_2 = a$ konstantan, izračunati maksimalnu mogućnu vrednost površine M.

4. Razred

1. Ako su x_1, x_2, x_3 rešenja jednačine $x^3 - 1 = 0$, dokazati da za svaki prirodan broj n važi jednakost

$$x_1^n + x_2^n + x_3^n = x_1^n x_2^n + x_2^n x_3^n + x_3^n x_1^n.$$

2. Date su po 3 crne kuglice numerisane brojevima 1 i 2 i po 6 belih kuglica numerisanih brojevima 1, 2 i 3. Na koliko načina se mogu poređati u niz 9 kuglica, tako da među njima ima 3 crne i 6 belih kuglica?

3. Dokazati da razlomak $\dfrac{3n+1}{2n^2+n}$, gde je n prirodan broj, ne može da se skrati.

4. Neka je x_1 proizvoljan realan broj, a x takav realan broj da važi $|x - x_1| \leq 1/100$.

a) Dokazati da razlika vrednosti funkcije $\sin x$ u tačkama x i x_1 nije veća od $1/100$.

b) Da li se za funkciju $\sin^2 x$ može odrediti interval $\Delta = (x_1 - \delta, x_1 + \delta)$, tako da je

$$|\sin^2 x - \sin^2 x_1| \leq \frac{1}{100}, \quad \text{za sve} \quad x \in \Delta,$$

gde je δ konačan pozitivan broj koji ne zavisi od x_1?

OSMO SAVEZNO TAKMIČENJE
Beograd, 1967.

2. Razred

1. Dat je trinom $(k+1)x^2 - 2kx + k - 1$, gde je k realan parametar.

a) Odrediti geometrijsko mesto temena svih parabola datih jednačinom $y = (k+1)x^2 - 2kx + k - 1$.

b) Da li sve te parabole imaju zajedničkih tačaka?

c) Dokazati da je samo jedno rešenje jednačine

$$(k+1)x^2 - 2kx + k - 1 = 0 \tag{1}$$

promenljivo i predstaviti to na grafiku.

d) Odrediti za koji prirodan broj k je promenljivo rešenje jednačine (1) periodičan decimalan broj sa jednom cifrom u periodu.

2. Dat je trinom $9n^2 + 3n - 2$, gde je n ceo broj.

a) Dokazati da ni za jedno n ovaj trinom nije deljiv sa 9.

b) Dokazati da postoji beskonačno mnogo celih brojeva n za koje je dati trinom deljiv sa 4.

3. Dat je kvadrat Q stranice a u koji je upisan kvadrat Q_1, tako da mu temena pripadaju stranicama kvadrata Q. U kvadrat Q_1 i u sva četiri dobijena trougla upisani su krugovi. Odrediti položaj temena upisanog kvadrata Q_1, tako da zbir površina svih pet upisanih krugova bude minimalan.

4. Data je neprovidna sfera i ravan α koja sa sferom nema zajedničkih tačaka. U tački M ravni α nalazi se svetlosni izvor koji osvetljava sferu. Dokazati da ravan koja odvaja osvetljeni od neosvetljenog dela sfere, prolazi kroz fiksiranu tačku P, koja ne zavisi od položaja tačke M.

3. Razred

1. Rešiti jednačinu

$$\sqrt{5x+1} - 2\sqrt{4-x} + \sqrt{5}\sqrt{x+2} = \sqrt{61-4x}.$$

2. Unutar datog ugla sa temenom O nalazi se krug (koji nema zajedničkih tačaka sa kracima tog ugla). Odrediti na krugu tačke M i N, tako da je zbir rastojanja tačke M od krakova ugla najveći mogućan, a zbir rastojanja tačke N od krakova ugla najmanji mogućan.

3. Rešiti nejednačinu

$$(1+\sqrt{3})\sin 2x + 2\cos^2 x \geq 2(1+\sqrt{3}\cos^2 x).$$

4. Neka su $ABCD$ i $A_1B_1C_1D_1$ dva paralelograma koji pripadaju neparalelnim ravnima. Obeležimo sa M, N, P, Q redom tačke koje dele duži AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 u istom odnosu.

a) Dokazati da je $MNPQ$ paralelogram.

b) Odrediti geometrijsko mesto središta svih paralelograma $MNPQ$, koji se dobijaju kada tačka M prolazi duž AA_1.

4. Razred

1. a) Naći skup tačaka u kojima funkcija iz familije određene formulom $f(x) = 4x^3/p^2 - 3x + p$, gde je $p \neq 0$, dostižu lokalni maksimum i skup tačaka u kojima funkcije iz te familije dostižu lokalni minimum. Nacrtati grafik funkcije koja se dobija za $p = 1$ i odrediti tačke preseka tog grafika sa x-osom.

b) Prikazati $\cos 3t$ kao funkciju od $\cos t$ i smenom $x = \cos t$ naći nule funkcije $f(x) = 4x^3 - 3x + \sqrt{2}/2$.

2. Stranica BC trougla ABC podeljena je tačkama $M_0 = B$, M_1, M_2, ..., M_{n-1}, $M_n = C$ na n delova i iz ovih tačaka su do stranica AB i AC konstruisane duži paralelne stranicama AC, odnosno AB.

a) Na koliko se različitih načina iz tačke A može stići po dobijenoj mreži do tačke M_k $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$, ako je kretanje dozvoljeno u smeru vektora $\overrightarrow{AB}$ i smeru vektora $\overrightarrow{AC}$?

b) Koliko ima gore opisanih puteva koji vode od tačke A do svih tačaka M_0, M_1, ..., M_n?

c) Ako su tačke M_k $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ ekvidistantne, izračunati zbir dužina svih putanja AM_k.

3. Ako je n prirodan broj, a realan broj $2^n x$ nije ceo umnožak broja π, dokazati da je

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \cdots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2^n x.$$

4. Isti kao 4. zadatak za 3. razred

MALA OLIMPIJADA 1967.

1. Rešiti jednačinu $\log(\alpha x + \beta) = 2\log(x + 1)$, gde su α i β realni parametri.

2. Ako su a, b, c stranice trougla i α, β, γ odgovarajući uglovi (izraženi u radijanima) dokazati da je

$$\frac{\pi}{3} \leq \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a + b + c} < \frac{\pi}{2}.$$

3. Ako su P i R tačke u kojima naspramne stranice AB i CD prostornog četvorougla $ABCD$ seku proizvoljnu ravan π_1 paralelnu drugim dvema stranicama, a Q i S tačke u kojima stranice BC i AD tog četvorougla seku proizvoljnu ravan π_2 paralelnu sa drugim dvema stranicama, dokazati da tačke P, Q, R, S pripadaju jednoj ravni.

4. U prostoru su date tačke A, B, C, D, E takve da važi

$$AB = BC = CD = DE = EA, \quad \angle ABC = \angle BCD = \angle CDE = \angle DEA = \angle EAB.$$

Dokazati da tačke A, B, C, D, E pripadaju jednoj ravni.

5. Dokazati da su sistemi uslova

(A) $c \neq 0$, $\sqrt{a+b} = \sqrt{a+c} + \sqrt{b+c}$,

(B) $a > 0$, $b > 0$, $1/a + 1/b + 1/c = 0$,

ekvivalentni.

6. Na stranicama BC, CA, AB trougla ABC date su redom tačke M, N, P različite od temena. Dokazati da krugovi opisani oko trouglova ANP, BPM, CMN imaju zajedničku tačku.

7. Odrediti trougao minimalnog obima kod koga su dužine stranica celi brojevi, a jedna težišna duž je podudarna odgovarajućoj stranici.

8. Ako je $a_k \geq 0$ za $k = 1, 2, \ldots, n$ i $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, dokazati da je

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \leq 1 + S_n + \frac{1}{2!}S_n^2 + \cdots + \frac{1}{n!}S_n^n.$$

9. Dati su brojevi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ od kojih je svaki jednak 1 ili -1 i takvi da je $x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_nx_1 = 0$. Dokazati da je broj n deljiv sa 4.

10. U ravni je dato milion pravih tako da važi:

a) Nikoje dve od datih pravih nisu paralelne;

b) Presek proizvoljne dve od datih pravih pripada bar još jednoj od tih pravih.

Dokazati da se sve prave seku u jednoj tački.

11. U ravni je dato n tačaka, tako da među proizvoljnih pet od tih tačaka postoje četiri koje pripadaju jednom krugu. Ako je $n \geq 7$, dokazati da bar $n-1$ od datih tačaka pripadaju jednom krugu. Da li tvrđenje važi ako je $n < 7$?

DEVETO SAVEZNO TAKMIČENJE
BEOGRAD, 1968.

2. RAZRED

1. Naći celobrojna rešenja jednačine

$$\sqrt{x - \frac{1}{5}} + \sqrt{y - \frac{1}{5}} = \sqrt{5}.$$

2. U ravni su date četiri tačke A, B, C, D. Konstruisati krug u toj ravni koji prolazi kroz tačke A i B, tako da su tangentne duži tangenata konstruisanih iz tačaka C i D jednake.

3. Sfera sadrži središta bočnih ivica trostrane piramide i dodiruje svaku osnovnu ivicu u njenom središtu.

a) Dokazati da je ta piramida pravilna.

b) Izračunati poluprečnik te sfere, ako su osnovne ivice i visina bočne strane piramide jednake datoj duži a.

4. Odrediti sve realne brojeve a, za koje nijedan broj x za koji važi

$$ax^2 + (1-a^2)x - a > 0,$$

nije po apsolutnoj vrednosti veći od 2.

3. Razred

1. Rešiti sistem jednačina

$$x^m = y^n, \qquad \log_a \frac{x}{y} = \frac{\log_a x}{\log_a y}.$$

2. Odrediti u ravni xOy skup tačaka (x, y) za čije koordinate važi $0 \le x \le 2\pi$ i

$$\frac{1}{2}(\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}) \le y \le 1 + \frac{1}{2}(\sqrt{1+\sin 4x} + \sqrt{1-\sin 4x}).$$

3. Kraci pravog ugla sa fiksiranim temenom u koordinatnom početku seku parabolu $y^2 = 2x$ u tačkama X i Y.

a) Naći geometrijsko mesto mogućnih središta duži XY.

b) Dokazati da sve prave XY imaju jednu zajedničku tačku.

4. Dokazati najpre identitet

$$(x+y+z)^2 = \frac{1}{2}[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2] + 3(xy+yz+zx),$$

a zatim:

a) Ako zbir $x+y+z$ ima konstantnu vrednost s, odrediti pri kojim uslovima izraz $xy+yz+zx$ ima maksimalnu vrednost.

b) Na osnovu dobijenog rezultata rešiti sledeći problem: Poznato je da je vrednost dijamanta proporcionalna kvadratu njegove težine. Ako se jedan dijamant podeli na tri dela, čije su težine x, y, z, dokazati da je ukupna vrednost uvek manja od vrednosti celog dijamanta i da je ona najmanja kada se dijamant podeli na tri dela jednake težine.

4. Razred

1. Neka su p i q prosti brojevi, broj $q^3 - 1$ deljiv sa p, a broj $p - 1$ deljiv sa q. Dokazati da je $p = 1 + q + q^2$.

2. U razredu ima 25 učenika. Dokazati da se od njih ne može formirati više od 30 košarkaških ekipa sa po 5 igrača u svakoj, ako ma koje dve od njih nemaju više od jednog igrača koji je član obe ekipe.

3. U pravouglom trouglu ABC, sa pravim uglom kod temena B, dati su ugao α kod temena A i hipotenuzina visina $BA_1 = h_1$. Iz tačke A_1 konstruisana je normala A_1B_1 na BC, iz tačke B_1 normala B_1A_2 na AC, iz tačke A_2 normala A_2B_2 na BC itd. Zatim je u svaki od trouglova ABA_1, BA_1B_1, $A_1B_1A_2$, $B_1A_2B_2$ itd. upisan krug.

a) Izračunati zbir površina svih tih krugova.

b) Odrediti ugao α, tako da taj zbir bude maksimalan.

4. Isti kao 4. zadatak za 3. razred.

MALA OLIMPIJADA 1968.

1. U ravni je dato 6 tačaka i svake dve od njih spojene su odsečkom. Dokazati da odnos dužine d najdužeg odsečka prema dužini δ najkraćeg od njih nije manji od $\sqrt{3}$.

2. Da bi prirodan broj $n > 3$ bio prost neophodno je i dovoljno da postoji prirodan broj α, takav da je $n! = n(n-1)(\alpha n + 1)$. Dokazati.

3. Svaka od stranica BC, CA, AB trougla ABC podeljena je na tri jednaka odsečka i nad srednjim odsečkom svake stranice konstruisan je van trougla ABC jednakostraničan trougao. Temena ovih trouglova koja ne pripadaju stranicama datog trougla označena su redom sa A', B', C'. Neka su A'', B'', C'' tačke simetrične sa tačkama A', B', C' redom u odnosu na stranice BC, CA, AB. Dokazati:

a) Trouglovi $A'B'C'$ i $A''B''C''$ su jednakostranični.

b) Trouglovi ABC, $A'B'C'$ i $A''B''C''$ imaju zajedničko težište.

4. Ako polinom stepena n uzima celobrojne vrednosti za vrednosti k, $k+1$, $\ldots$, $k+n$ promenljive x, gde je k ceo broj, onda taj polinom uzima celobrojnu vrednost za svaki ceo broj x. Dokazati.

5. Neka je n prirodan broj veći od 1, a x realan broj.

a) Izračunati $S(x,n) = \sum(x+p)(x+q)$, gde se sabiranje vrši po svim različitim brojevima p i q iz skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$.

b) Da li postoje celi brojevi x, za koje važi $S(x,n) = 0$.

6. Da bi se centar S sfere opisane oko tetraedra poklapao sa centrom S' sfere upisane u tetraedar, neophodno je i dovoljno da mimoilazne ivice tetraedra budu jednake. Dokazati.

DESETO SAVEZNO TAKMIČENJE
Beograd, 1969.

2. Razred

1. Koja relacija nezavisna od m postoji među rešenjima jednačine

$$(x^2 - 6x + 5) + m(x^2 - 5x + 6) = 0?$$

2. Dokazati da je za svaki prirodan broj n bar jedan od brojeva $3^{3n} + 2^{3n}$ i $3^{3n} - 2^{3n}$ deljiv sa 35.

3. Data su dva kruga sa centrima O i O_1 i poluprečnicima R i $R/2$. Krugovi se dodiruju iznutra u tački T. Konstruisati krug koji dodiruje oba data kruga i pravu OO_1.

4. U trostranoj piramidi svi uglovi bočnih strana pri vrhu piramide su pravi. Dokazati da vrh piramide, težište osnove i centar sfere opisane oko piramide pripadaju istoj pravoj.

3. Razred

1. Trostrana piramida $OABC$ ima bočne ivice $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, a uglovi AOB, BOC i COA su pravi. Ako su α, β, γ uglovi kod temena A, B, C osnove ABC, dokazati da je

$$\operatorname{ctg}\alpha : \operatorname{ctg}\beta : \operatorname{ctg}\gamma = a^2 : b^2 : c^2.$$

2. Naći sva realna rešenja sistema jednačina

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= 1, \\ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 &= 1, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_1^n + x_2^n + \cdots + x_n^n &= 1. \end{aligned}$$

3. Data je pravilna četvorostrana prizma sa osnovnom ivicom $2a$ i visinom $a(1+\sqrt{3})$. Jedna sfera sadrži sva četiri temena donje osnove i dodiruje gornju osnovu. Izračunaj onaj deo površine prizme koji je unutar sfere.

4. Neki kratkovidi mudrac koji vidi predmete samo na rastojanju manjem od 1 m, sklopio je ovakvu opkladu: Ako se bilo gde na rastojanju d od njega postavi neki predmet, onda će on (pod uslovom da mu se posle svakog učinjenog koraka dužine 1 kaže da li se na taj način približio predmetu ili se udaljio od njega) u konačno mnogo koraka pronaći predmet, a broj učinjenih koraka biće sigurno manji od $3d/2 + 7$. Predmet se smatra pronađenim onda kada ga mudrac ugleda. Dokazati da će mudrac dobiti opkladu.

4. Razred

1. Isti kao 4. zadatak za 3. razred.

2. Ako je p neparan prost broj i a ceo broj koji nije deljiv sa p, onda je jedan i samo jedan od brojeva

$$A = a^{1+2+\cdots+(p-1)} + 1, \qquad B = a^{1+2+\cdots+(p-1)} - 1,$$

deljiv sa p.

3. U zajedničkom delu unutrašnjih oblasti parabola

$$x^2 = p^2 + 2py \quad \text{i} \quad x^2 = p^2 - 2py$$

upisati elipsu maksimalne površine.

4. Ako je a realan parametar, naći sva realna rešenja sistema jednačina

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= a, \\ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 &= a^2, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_1^n + x_2^n + \cdots + x_n^n &= a^n. \end{aligned}$$

MALA OLIMPIJADA 1969.

1. Dati su realni brojevi a_i, b_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, takvi da je

$$\begin{aligned} &a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n > 0, \\ &b_1 \geq a_1, \\ &b_1 b_2 \geq a_1 a_2, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &b_1 b_2 \cdots b_n \geq a_1 a_2 \cdots a_n. \end{aligned}$$

Dokazati da je $b_1 + b_2 + \cdots + b_n \geq a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

2. Neka su $f(x)$ i $g(x)$ polinomi stepena n, a $x_0, x_1, \ldots, x_n$ je $n+1$ različitih vrednosti promenljive x. Ako je

$$f(x_0) = g(x_0),\ f'(x_1) = g'(x_1),\ f''(x_2) = g''(x_2), \ldots,\ f^{(n)}(x_n) = g^{(n)}(x_n),$$

dokazati da je $f(x) \equiv g(x)$.

3. Tačke A i B se kreću konstantnim brzinama po pravim a i b, a poznata su im po dva korespondentna položaja A_1, B_1 i A_2, B_2. Naći onaj položaj tačaka A i B za koji je dužina AB minimalna.

4. Neka su a i b prirodni brojevi takvi da je $a < b$. Dokazati da u svakom skupu od b uzastopnih prirodnih brojeva postoje dva broja čiji je proizvod deljiv sa ab.

5. Proizvod sinusa dva naspramna diedra u tetraedru proporcionalan je proizvodu ivica tih diedara. Dokazati.

6. Neka je E skup od $n^2 + 1$ zatvorenih intervala na realnoj osi. Dokazati da postoji njegov podskup od $n+1$ intervala koji su monotono uređeni s obzirom na relaciju inkluzije ili podskup od $n+1$ intervala od kojih nijedan ne sadrži nijedan drugi interval iz tog podskupa.

JEDANAESTO SAVEZNO TAKMIČENJE
BEOGRAD, 1970.

2. RAZRED

1. Odrediti tri kompleksna broja modula 1 sa svojstvom da im je i zbir i proizvod jednak 1.

2. Dat je konveksan petougao $ABCDE$. Dijagonale tog petougla grade konveksan petougao $A_1B_1C_1D_1E_1$ i petokraku zvezdu.

a) Odrediti zbir uglova petokrake zvezde pri vrhovima A, B, C, D i E.

b) Ako je dati petougao $ABCDE$ pravilan, naći odnos površine tog petougla i petougla $A_1B_1C_1D_1E_1$.

3. Dat je kvadrat $ABCD$. Neka je P bilo koja unutrašnja tačka stranice AB, P_2 presek pravih DP_1 i BC, P_3 presek pravih AP_2 i CD, P_4 presek pravih BP_3 i DA, P_5 presek pravih CP_4 i AB, a tačke P_6, P_7, ..., P_{13} konstruišu se dalje po istom postupku. Dokazati da je $P_{13} = P_1$.

4. Neka su $a, a_1, a_2, \ldots, a_m$ celi brojevi, a n prirodan broj. Dokazati sledeća tvrđenja:

a) Broj $a(a^{2n} - 1)$deljiv je sa 6;

b) Zbir $S' = a_1^{2n+1} + \cdots + a_m^{2n+1}$ deljiv je sa 6, ako i samo ako je zbir $S = a_1 + \cdots + a_m$ deljiv sa 6.

3. Razred

1. Data je elipsa $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$, koju prava p paralelna osi Oy seče u tačkama M i N, pri čemu M ima pozitivnu, a N negativnu ordinatu. Odrediti geometrijsko mesto presečne tačke P pravih AM i BN i presečne tačke Q pravih AN i BM, gde su $A(-a, 0)$ i $B(a, 0)$ temena elipse, kada se prava p kreće ostajući paralelna osi Oy.

2. Ako su a, b, c stranice trougla, a α, β, γ njegovi uglovi, dokazati jednakost

$$\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)\cos\alpha + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)\cos\gamma + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right)\cos\beta = 3.$$

3. U koordinatnoj ravni xOy nacrtana je celobrojna koordinatna mreža. Odsečak (p) definisan je u toj ravni sa

$$(p) \qquad 7x - 3y - 5 = 0, \qquad 0 \le x \le 100.$$

Odrediti broj kvadrata te mreže unutar kojih ima tačaka odsečka (p).

4. Naći geometrijsko mesto središta duži date dužine c, čiji se krajevi kreću po mimoilaznim dijagonalama donje i gornje osnove date kocke ivice a $(a < c < a\sqrt{2})$.

4. Razred

1. Odrediti koji je broj veći: $\log_3 4$ ili $\log_4 5$.

2. Članove aritmetičkog niza $1, 1 + 2n, 1 + 4n, \ldots$ $(n \in \mathbb{N})$ grupišemo redom u grupe, tako da u prvu grupu stavimo prvi član, u drugu grupu stavimo sledećih $1 + n$ članova, u treću grupu stavimo sledećih $1 + 2n$ članova itd. Dokazati da je zbir svih članova u svakoj grupi jednak trećem stepenu broja članova te grupe.

3. Osnova piramide je kvadrat. Nagibni uglovi bočnih strana piramide prema osnovi odnose se redom kao $1 : 2 : 4 : 2$. Odrediti te uglove.

4. Ako je p prost broj, dokazati da je $N = \dfrac{(2p)!}{(p!)^2} - 2$ deljiv sa p^2.

MALA OLIMPIJADA 1970.

1. Prirodni brojevi a i b imaju u dekadnom zapisu po n cifara. Neka je $n/2 < m < n$ i neka je svaka od prvih m cifara broja a (računajući sleva nadesno) jednaka odgovarajućoj cifri broja b. Dokazati da je $a^{1/n} - b^{1/n} < 1/n$.

2. U kocku ili na njenu površinu razmestiti temena trougla, tako da je njegova najmanja stranica što je mogućno veća.

3. Ako sve stranice prostornog četvorougla dodiruju sferu, onda sve četiri dodirne tačke pripadaju jednoj ravni. Dokazati.

DVANAESTO SAVEZNO TAKMIČENJE
Beograd, 1971.

2. Razred

1. Neka su AD, BE, CF težišne duži, a T težište trougla ABC. Ako su ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4, ρ_5, ρ_6 i r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, redom poluprečnici upisanih i opisanih krugova trouglova BDT, DCT, CET, EAT, AFT, FBT, dokazati da važe jednakosti

$$\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_3}+\frac{1}{\rho_5}=\frac{1}{\rho_2}+\frac{1}{\rho_4}+\frac{1}{\rho_6}, \qquad r_1r_3r_5 = r_2r_4r_6.$$

2. Nad stranicama paralelograma $A_1A_2A_3A_4$ konstruisani su sa spoljašnje strane kvadrati $A_1B_1C_1A_2$, $A_2B_2C_2A_3$, $A_3B_3C_3A_4$, $A_4B_4C_4A_1$. Dokazati da središta O_1, O_2, O_3, O_4 tih kvadrata čine kvadrat čija je površina jednaka zbiru četvrtina površina tih kvadrata uvećanom za površinu datog paralelograma.

3. Odrediti prirodne brojeve p i q, tako da nule trinoma

$$x^2 - px + q \quad \text{i} \quad x^2 - qx + p$$

budu takođe prirodni brojevi.

4. Skretnice A i B i okretnica C spojene su železničkim prugama AC, BC i prugom AB sa dovoljno dugačkim produžecima AD i BE. Na pruzi AC nalazi se vagon V_1, na pruzi BC vagon V_2, a na pruzi AB lokomotiva L. Na okretnicu može doći svaki od dva vagona, ali lokomotiva ne može. Služeći se okretnicom i skretnicama pomoću lokomotive prebaciti vagon V_1 na mesto vagona V_2, a vagon V_2 na mesto vagona V_1, tako da na kraju lokomotiva dođe na svoje mesto.

3. Razred

1. Neka su a, b, p, q, r, s prirodni brojevi takvi da važi

$$qr - ps = 1 \qquad \text{i} \qquad \frac{p}{q} < \frac{a}{b} < \frac{r}{s}.$$

Dokazati da je $b \geq q + s$.

2. Dat je trougao ABC i realan broj k. Neka su P, Q, R tačke definisane relacijama

$$\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AB}, \qquad \overrightarrow{BQ} = k\overrightarrow{BC}, \qquad \overrightarrow{CR} = k\overrightarrow{CA}.$$

Dokazati da je $AB^2 + BC^2 + CA^2 = g(PQ^2 + QR^2 + RP^2)$, gde je g neka funkcija od k. Odrediti i ispitati tu funkciju.

3. Nad stranicama paralelograma $A_1A_2A_3A_4$ konstruisani su sa unutrašnje strane kvadrati $A_1B_1C_1A_2$, $A_2B_2C_2A_3$, $A_3B_3C_3A_4$, $A_4B_4C_4A_1$. Dokazati da središta O_1, O_2, O_3, O_4 tih kvadrata čine kvadrat čija je površina jednaka zbiru četvrtina površina tih kvadrata umanjenom za površinu datog paralelograma.

4. Lestvica AB termometra koji visi vertikalno na zidu ima dužinu $2r$. Oko posmatrača nalazi se na pravoj l koja je normalna na ravan zida i seče pravu AB u tački čije je rastojanje od središta duži AB jednako h $(h > r)$. Na kom rastojanju od zida treba da se nalazi oko posmatrača da bi ugao pod kojim posmatrač vidi lestvicu bio najveći.

4. Razred

1. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ realni brojevi veći od 1, a m prirodan broj. Dokazati da je

$$\sum_{j=1}^{n} (\log_{a_1 a_2 \cdots a_{j-1} a_{j+1} \cdots a_n} a_j)^{-m} \geq n(n-1)^m.$$

Kada važi jednakost?

2. Neka je n prirodan broj. Koliko rešenja ima jednačina

$$\frac{x}{\sin x} = \frac{n\pi}{2}\ ?$$

3. U ravni su date tačke $A_1, A_2, \ldots, A_n$, tako da nikoje tri od njih nisu kolinearne. Neka je p_{ij} prava određena tačkama A_i i A_j. Koliki je maksimalan broj presečnih tačaka pravih p_{ij} i p_{kl}, pri čemu su i, j, k, l različiti elementi skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$.

4. Neka su date funkcije

$$f_n(x) = \frac{1 - \cos x \cos 2x \cdots \cos nx}{x^2}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

a) Dokazati da za svako $n \in \mathbf{N}$ postoji $\lim\limits_{x \to 0} f_n(x) = f_n$.

b) Odrediti vezu između f_n i f_{n-1}.

c) Izračunati f_n.

TRINAESTO SAVEZNO TAKMIČENJE
BEOGRAD, 1972.

2. RAZRED

1. Neka su $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ realni brojevi za koje važi

$$\beta_1\beta_2\beta_3 \neq 0, \tag{1}$$
$$\alpha_1\beta_1 + 2\alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0, \tag{2}$$
$$\alpha_1\alpha_3 - \alpha_2^2 > 0. \tag{3}$$

Dokazati da je $\beta_1\beta_3 - \beta_2^2 < 0$.

2. Rešiti jednačinu

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = a,$$

gde je a realan parametar.

3. a) Neka su A, K, L, M, N tačke na jednom orijentisanom krugu. dokazati da su tetive KM i LN normalne, ako i samo ako je $\widehat{AK} + \widehat{AM} = \widehat{AL} + \widehat{AN} \pm \pi$, gde je sa $\widehat{XY}$ označena radijanska mera luka XY.

b) Neka su A, B, C, D bilo koje četiri tačke na jednom krugu, a K, L, M, N središta lukova $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$, $\widehat{DA}$. Dokazati da su tetive KM i LN normalne.

4. a) Ako je S centar upisanog kruga trougla ABC, a D tačka preseka prave AS i opisanog kruga trougla ABC različita od A, tada je $DB = DC = DS$. Dokazati.

b) Neka je $ABCD$ tetivni četvorougao. Dokazati da su centri A', B', C', D' upisanih krugova trouglova BCD, CDA, DAB, ABC temena pravougaonika.

3. RAZRED

1. Rešiti jednačinu

$$(a-1)\left(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x \cos x}\right) = 2,$$

gde je a realan parametar.

2. Kružni luk AB sa centrom S ima centralni ugao α, a tačke C i D dele tetivu AB na tri jednaka dela.

a) Ako je $\angle CSD = x$, dokazati da je $\cos x = \dfrac{4 + 5\cos\alpha}{5 + 4\cos\alpha}$.

b) Izračunati razliku $\cos x - \cos\dfrac{\alpha}{3}$.

c) Koliki mora biti ugao α da bi ta razlika bila jednaka nuli.

3. Prave određene temenima paralelograma i sredinama nesusednih stranica, svojim presecima određuju jedan osmougao. Dokazati da je površina tog osmougla jednaka šestini površine datog paralelograma.

4. Odrediti zapreminu trostrane piramide čije strane imaju površine S_0, S_1, S_2, S_3, a diedri uz stranu sa površinom S_0 su jednaki.

4. RAZRED

1. Za svaki prirodan broj n, broj $n+3n^3+7n^7+9n^9$ je deljiv sa 10. Dokazati.

2. Koliki je maksimalan broj permutacija od n elemenata takvih da su svaka dva elementa susedna u najviše jednoj od permutacija?

3. Nad duži AB sa središtem O konstruisan je polukrug k. Krugovi $a(A,r)$ i $b(B,r)$, gde je $r = AB/2$, seku polukrug k u tačkama C i D. U figuri ograničenoj lukovima OC, CD i OD upisan je niz krugova k_1, k_2, k_3, ... sa poluprečnicima r_1, r_2, r_3, ... Prvi od njih dodiruje sva tri luka, a svaki sledeći lukove CO i OD i prethodni krug. Dokazati da za svaki prirodan broj k važi $r_k = \dfrac{r}{2k(k+1)}$.

4. Dati su koncentrični krugovi a i b sa centrom O i tačka $P \neq O$ unutar manjeg od njih. Poluprava l sa početnom tačkom P seče te krugove u tačkama A i B. Dokazati da je duž AB najveća, ako je poluprava l normalna na pravu OP.

MALA OLIMPIJADA 1972.

1. Dati su realni brojevi u, v, w, x, y, z različiti od nule. Koliko je mogućnih izbora predznaka tih brojeva, ako važi:

$$(u+ix)(v+iy)(w+iz) = i?$$

2. Ako konveksan skup tačaka u ravni ima bar dva dijametra, recimo AB i CD, onda duži AB i CD imaju zajedničku tačku. Dokazati.

3. Poznato je da brojevi iz tablice

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

zadovoljavaju nejednakost

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n| \leq M,$$

za svaki izbor brojeva $x_j = \pm 1$. Dokazati da je

$$|a_{11}| + |a_{22}| + \cdots |a_{nn}| \leq M.$$

4. Odrediti najveći prirodan broj $k(n)$ sa sledećom osobinom: Postoji $k(n)$ različitih podskupova datog skupa od n elemenata, takvih da svaka dva od njih imaju neprazan presek.

ČETRNAESTO SAVEZNO TAKMIČENJE
BEOGRAD, 1973.

1. RAZRED

1. U nekom društvu matematičara svaki od njih se bavi bar jednom od sledećih grana matematike: algebrom, analizom, geometrijom ili logikom. Onaj koji se bavi algebrom ili logikom, bavi se i analizom. Onaj koji se bavi geometrijom bavi se i logikom. Onaj koji se bavi analizom i geometrijom, bavi se i algebrom. Kojim od ovih grana se bavi najviše, a kojim najmanje matematičara?

2. Dat je krug k i njegov prečnik AB. Na jednom polukrugu izabrano je n tačaka $P_1, P_2, \ldots, P_n$, takvih da je P_1 između A i P_2, P_2 između P_1 i P_3, ..., P_n između P_{n-1} i B. Odrediti tačku C na drugom polukrugu, tako da zbir površina trouglova CP_1P_2, CP_2P_3, ..., $CP_{n-1}P_n$ bude najveći.

3. Izračunati

$$\sqrt{\underbrace{44\ldots4}_{2n}+\underbrace{11\ldots1}_{n+1}-\underbrace{66\ldots6}_{n}}.$$

4. Dijagonale AC i BD jednakokrakog trapeza $ABCD$ sa osnovicom AB seku se u tački O pod uglom $AOB = 60°$. Dokazati da su središta duži OA, OD, BC temena jednakostraničnog trougla.

5. a) Rešiti sistem jednačina

$$|x| + |y-1| = 1, \quad x + 2y = 3.$$

b) Prikazati rešenje grafički u ravni pravouglog koordinatnog sistema xOy.

2. RAZRED

1. U skupu realnih brojeva rešiti jednačinu $\sqrt{2x-a} = x-b$, gde su a i b realni brojevi.

2. Ako je zbir duži određenih središtima parova suprotnih stranica četvorougla jednak njegovom poluobimu, onda je taj četvorougao paralelogram. Dokazati.

3. Dat je jednakostranični trougao ABC stranice a i centra O i tačka P koja pripada odsečku OC. Konstruisati jednakostranični trougao XYZ upisan u trougao ABC, tako da tačke X, Y, Z pripadaju redom stranicama BC, CA, AB i da stranica XY sadrži tačku P. Kada zadatak ima rešenja?

4. Dokazati nejednakost $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{120}{121} > \frac{1}{11}$.

3. Razred

1. Unutar tetraedra $ABCD$ data je proizvoljna tačka O. Dokazati da je zbir uglova pod kojim se iz tačke O vide ivice tetraedra veći od 3π.

2. Unutar pravougaonika $ABCD$ data je proizvoljna tačka O. Dokazati da je

$$\frac{P_{OAC}}{P_{OBD}} = \frac{\operatorname{tg}\angle AOC}{\operatorname{tg}\angle BOD}.$$

3. Rešiti sistem jednačina

$$x : y : z = (y - z) : (z - x) : (x - y),$$

gde su x, y, z različiti kompleksni brojevi.

4. Neka je $S(a)$ zbir cifara prirodnog broja a prikazanog u dekadnom brojnom sistemu, a m dati prirodan broj. Dokazati da je razlika $S(a^m) - S^m(a)$ deljiva sa 9 za bilo koji prirodan broj a.

4 Razred

1. Dat je strogo rastući niz prirodnih brojeva

$$a_0 = 1,\ a_1,\ a_2,\ \ldots \tag{a}$$

takav da za svaki prirodan broj n važi

$$1 + \sum_{j=0}^{n-1} a_j \geq a_n. \tag{b}$$

Dokazati da se svaki prirodan broj N može prikazati kao zbir nekoliko različitih članova niza (a). Dokazati da je taj prikaz jednoznačan, ako i samo ako za svaki prirodan broj n u (b) važi jednakost.

2. U prostoru je dato pet tačaka od kojih nikoje četiri ne pripadaju istoj ravni. Dokazati da se od tih pet tačaka uvek mogu odabrati dve tačke, tako da prava određena tim dvema tačkama prodire ravan određenu preostalim trima tačkama u nekoj tački koja se nalazi unutar trougla čija su temena te tri tačke.

3. Neka je $\{x, y, z, t\} = \{12, 14, 37, 65\}$. Odrediti brojeve x, y, z, t, ako je

$$xy - xz + yt = 182.$$

4. Odrediti skup tačaka z u kompleksnoj brojnoj ravni za koje postoji realan broj c takav da je $z = \dfrac{c - i}{2c - i}$?

MALA OLIMPIJADA 1973.

1. Dužine stranica pravougaonika jednake su neparnim prirodnim brojevima. Dokazati da u tom pravougaoniku ne postoji tačka čije je rastojanje od svakog temena jednako prirodnom broju.

2. Pomoću datog diska, na primer kovanog novčića, nacrtan je krug k i na njemu je izabrana tačka A. Služeći se samo tim istim diskom konstruisati tačku B na krugu k, tako da je AB prečnik kruga. (Dozvoljen je izbor proizvoljne tačke na nekom od nacrtanih krugova, a pomoću diska se može konstruisati bilo koji od dva kruga koji sadrži dve tačke čije je rastojanje manje od prečnika kruga.)

3. Na ravnom belom listu papira označeno je nekoliko tačaka sa međusobnim rastojanjima većim od 2. Nepažljiv učenik je kanuo kap mastila na taj list i ono se rasprskalo po njemu prekrivši površinu manju od π. Dokazati da postoji vektor $\vec{v}$, takav da je $|\vec{v}| < 1$ i da posle translacije označenih tačaka za taj vektor nijedna tačka ne ostaje u isprljanom delu papira.

PETNAESTO SAVEZNO TAKMIČENJE
BEOGRAD, 1974.

1. RAZRED

1. Grafički predstaviti skup tačaka u koordinatnoj ravni xOy koje zadovoljavaju uslov

$$\big||x| - 1\big| + \big||y| - 1\big| \leq 1.$$

2. Date su tri prave p, q, r koje se seku u tri različite tačke. Konstruisati pravu normalnu na pravoj r, takvu da su duži koje na njoj odsecaju prave p i q, odnosno q i r, podudarne.

3. Naći šestocifreni broj čiji proizvodi sa brojevima $2, 3, 4, 5, 6$ u izvesnom poretku jesu šestocifreni brojevi dobijeni iz datog broja cikličnim zamenama cifara.

4. Na krugu su poređana 1975 deteta i igraju igru na ispadanja na sledeći način: prvo dete ostaje na krugu, drugo ispada, treće ostaje, četvrto ispada itd. dok na krugu ne ostane samo jedno dete. Odrediti koje će to dete biti.

2. RAZRED

1. Neka su m i n dati pozitivni brojevi. Dokazati da je sa

$$x_1 = x_3 = x_5 = \cdots = x_{99} = m,$$
$$x_2 = x_4 = x_6 = \cdots = x_{100} = n,$$

dato jedino rešenje sistema jednačina

$$nx_1 = x_2x_3 = x_4x_5 = \cdots = x_{98}x_{99} = mx_{100},$$
$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = x_5 + x_6 = \cdots = x_{99} + x_{100} = m + n,$$

kod koga su svi brojevi $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ pozitivni.

2. U skupu celih brojeva rešiti jednačinu $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$.

3. Temena konveksnog šestougla $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ su krajnje tačke prečnika A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6 kruga k. Tačka P koja pripada krugu k ne poklapa se ni sa jednim temenom šestougla. Neka su Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6 normalne projekcije tačke P redom na prave A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6, A_6A_1.

a) Dokazati da prave određene proizvoljnim dvema susednim stranicama šestougla $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6$ obrazuju prav ugao.

b) Dokazati da tačka P, centar O kruga k i središta R_1, R_2, R_3 duži Q_1Q_4, Q_2Q_5, Q_3Q_6 pripadaju jednom krugu.

4. Data su dva međusobno normalna prečnika AB i CD kruga sa središtem O i poluprečnikom r. Na duži OA izabrana je tačka M, tako da je $OM = r/\sqrt{3}$. Prava koja sadrži tačku M seče pravu CD u tački R, dati krug u tačkama P i Q, tako da su tačke P i R sa iste strane tačke M. Dokazati jednakost

$$\frac{1}{MQ} = \frac{1}{MP} + \frac{1}{MR}.$$

3. Razred

1. Rešiti jednačinu $\sqrt{x^2+x} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \sqrt{x+3}$.

2. Izračunati ugao α, ako je

$$\operatorname{ctg}\alpha = 2 + \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}, \qquad \operatorname{ctg} 2\alpha = 2 + \sqrt{a},$$

gde su a, b, c prirodni brojevi koji nisu deljivi sa 4, a $\sqrt{a}$ i $\sqrt{bc}$ su iracionalni brojevi.

3. Data je prava kružna kupa sa vrhom V, središtem osnove S i uglom pri vrhu osnog preseka β. Dve tangentne ravni kupe dodiruju kupu po izvodnicama VA i VB, gde tačke A i B pripadaju osnovi. Ako je ugao između tih ravni jednak α izračunati ugao ASB.

4. Naći maksimalan proizvod prirodnih brojeva čiji je zbir jednak datom prirodnom broju n.

4. Razred

1. Naći čisti periodičan razlomak, koji je veći od 1/4 i manji od 1/3, a zbir cifara periode mu je za 12 veći od kvadrata broja tih cifara.

2. Naći sve prirodne brojeve n, takve da neka tri uzastopna koeficijenta razvoja $(a+b)^n$ čine aritmetički niz.

3. Odrediti onu tangentu elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ čiji je odsečak između osa elipse najmanji.

4. Na šahovskoj tabli formata 8×8 nalaze se na prvom i osmom redu 8 belih i 8 crnih žetona respektivno. Beli počinje igru. Igrači naizmenično pomeraju po

jedan žeton za jedno ili više polja po njegovoj koloni u bilo kom smeru ali najdalje do ivice table ili do protivničkog žetona. Igru gubi onaj koji prvi dođe u situaciju da ne može povući potez. Dokazati da crni može da pobedi ma kako beli igrao.

MALA OLIMPIJADA 1974.

1. Dat je iracionalan broj a.

1° Dokazati da za svaki pozitivan broj ε postoji bar jedan ceo broj $q \neq 0$, takav da je $aq - [aq] < \varepsilon$.

2° Dokazati da za dato $\varepsilon > 0$ postoji beskonačno mnogo racionalnih brojeva p/q, takvih da je $q > 0$ i $\left|a - \frac{p}{q}\right| < \frac{\varepsilon}{q}$.

2. U ravni su data dva direktno podudarna trougla ABC i $A'B'C'$, tako da se krugovi sa centrima C i C' i poluprečnicima CA odnosno $C'A'$ seku. Kretanje koje preslikava trougao ABC na trougao $A'B'C'$ prikazati kao kompoziciju najviše tri rotacije, tako da trougao ABC rotacijom oko nekog svog temena prelazi u neki trougao $A_1B_1C_1$, ovaj trougao rotacijom oko nekog svog temena prelazi u neki trougao $A_2B_2C_2$, a ovaj trougao rotacijom oko nekog svog temena prelazi u trougao $A'B'C'$.

3. Neka je S bilo koji skup od n tačaka $P_1, P_2, \ldots, P_n$ u ravni, takvih da nikoje tri nisu kolinearne i neka je α najmanji od uglova $P_iP_jP_k$ ($i \neq j \neq k \neq i$, $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$). Odrediti $\max\limits_S \alpha$ i naći one skupove S za koje se ta maksimalna vrednost ugla α postiže.

ŠESNAESTO SAVEZNO TAKMIČENJE
BEOGRAD, 1975.

1. RAZRED

1. Dokazati da za svako a, za koje je $5 \leq a \leq 10$, važi jednakost

$$\sqrt{a + 3 - 4\sqrt{a-1}} + \sqrt{a + 8 - 6\sqrt{a-1}} = 1.$$

2. U unutrašnjosti ili na nekoj stranici jednakostraničnog trougla ABC data je tačka S, kroz koju su konstruisane prave SA_1, SB_1, SC_1, redom paralelne stranicama AC, AB, BC tog trougla, tako da A_1, B_1 i C_1 pripadaju redom stranicama BC, AC i AB. Dokazati da zbir $SA_1 + SB_1 + SC_1$ ima konstantnu vrednost nezavisno od izbora tačke S.

3. Dva automobila polaze istovremeno iz mesta A prema mestu B. Prvi ide polovinu vremena brzinom u, a drugu polovinu vremena brzinom v. Drugi ide polovinu puta brzinom u, a drugu polovinu puta brzinom v. Koji će automobil pre stići na cilj?

4. Na krugu je napisano u proizvoljnom redosledu pet nula i četiri jedinice. Zatim se između jednakih cifara napiše nula, a između različitih jedinica, pa se prvobitne cifre obrišu. Dokazati da ma koliko puta se ponovio ovaj postupak ne mogu se dobiti devet nula.

2. Razred

1. Dokazati da jednačina $ax^2 + bx + c = 0$ nema racionalnih rešenja, ako su a, b i c celi neparni brojevi.

2. U ravni su date četiri prave od kojih nikoje dve nisu paralelne i nikoje tri ne prolaze kroz istu tačku. Ako je četvrta prava paralelna sa nekom težišnom duži trougla koji određuju prve tri prave, tada je svaka od prve tri prave paralelna sa nekom težišnom duži trougla kojeg čine ostale tri prave. Dokazati.

3. Slovoslagač je rasuo cifre $0, 2, 3, 4, 4, 7, 8, 8, 9$ nekog broja koji je šesti stepen nekog prirodnog broja. Koji je taj broj?

4. U unutrašnjosti kvadrata dato je n tačaka. Spajaju se po dve tačke među sobom kao i pojedine tačke sa temenima kvadrata, ali tako da se nikoje dve duži ne seku dokle god je to mogućno. Koliko se najviše odsečaka na taj način može konstruisati?

3. Razred

1. Neka je n prirodan broj veći ili jednak 4. Dokazati da n-tougao određen središtima stranica datog konveksnog n-tougla M ima površinu koja nije manja od polovine površine poligona M.

2. Neka je S proizvoljna tačka u unutrašnjosti trougla ABC čije su stranice a, b i c. Dokazati da je

$$SA\cos\frac{A}{2} + SB\cos\frac{B}{2} + SC\cos\frac{C}{2} \geq \frac{a+b+c}{2}.$$

Kada važi jednakost?

3. Rešiti jednačinu

$$\left(\sqrt{\sqrt{x^2-5x+8}+\sqrt{x^2-5x+6}}\right)^x + \\ + \left(\sqrt{\sqrt{x^2-5x+8}-\sqrt{x^2-5x+6}}\right)^x = 2^{(x+4)/4}.$$

4. Koji najveći broj topova se može postaviti na šahovskoj tabli $3n \times 3n$ tako da svaka od tih figura bude pod udarom najviše jedne od ostalih.

4. Razred

1. Data je parabola $y = x^2$. Za $|x_0| > \sqrt{2}$ kroz tačku $A(x_0, x_0^2)$ parabole prolaze dve njene normale čija su podnožja B i C, različita od A. Dokazati da prava BC seče osu parabole u fiksiranoj tački koja ne zavisi od x_0.

2. Rešiti jednačinu $1! + 2! + \cdots + x! = y^z$, gde su x, y i z prirodni brojevi i $z > 1$.

3. Dati su realni brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ za koje važi

$$|a_j| < M \ (j = 1, 2, \ldots, n), \qquad a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0.$$

Dokazati da je $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n \leq \frac{n^2}{4} M$.

4. U nekom društvu svaka dva poznanika nemaju zajedničkih poznanika, a svaka dva čoveka koji se ne poznaju imaju tačno dva zajednička poznanika. Dokazati da u tom društvu svi imaju jednak broj poznanika.

SEDAMNAESTO SAVEZNO TAKMIČENJE
KRAGUJEVAC, 1976.

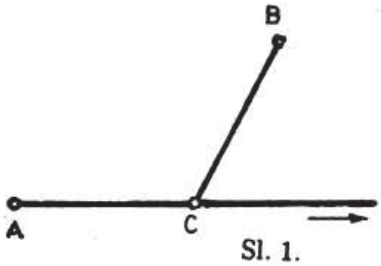
1. RAZRED

1. Dato je N objekata od kojih N_a ima svojstvo a, N_b svojstvo b, N_c svojstvo c, $N_{a,b}$ svojstva a i b, $N_{a,c}$ svojstva a i c i $N_{b,c}$ svojstva b i c. Dokazati da je

$$3N + N_{a,b} + N_{a,c} + N_{b,c} \geq 2N_a + 2N_b + 2N_c.$$

2. Dokazati da se u krug poluprečnika 9 ne može smestiti 400 tačaka, tako da rastojanje između svake dve tačke bude veće od 1.

3. Dokazati da za 3 realna broja čiji je proizvod jednak 1 i čiji je zbir strogo veći od zbira njihovih recipročnih vrednosti, važi: Postoji tačno jedan među tim brojevima koji je veći od 1.



Sl. 1.

4. Na obali reke nalazi se mesto A, a nizvodno od njega, dalje od obale, nalazi se mesto B. Odrediti na kom mestu treba izgraditi pristanište C, da bi transport iz A u B, preko C, bio najjeftiniji, ako se zna da je cena transporta rekom dva puta manja nego kopnom. Pretpostavlja se da su tok reke i put iz C u B pravolinijski, sl.1.

2. RAZRED

1. Izračunati zbir

$$\frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{100\sqrt{99} + 99\sqrt{100}}.$$

2. Dat je pravilan šestougao čija stranica ima dužinu a. Služeći se samo lenjirom konstruisati duž a/n, za $n = 2, 3, 4, \ldots$.

3. Dat je trougao ABC s dužinama stranica $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Odrediti tačku P unutar tog trougla, tako da je vrednost izraza $ax^2 + by^2 + cz^2$ minimalna, ako su x, y, z rastojanja tačke P redom od pravih BC, CA, AB.

4. Odrediti najveći broj deljiv sa 11 čije su sve cifre različite.

3. Razred

1. Ako je $a > 1$, $b > 1$, $c > 1$ ili $0 < a < 1$, $0 < b < 1$, $0 < c < 1$, dokazati da važi nejednakost

$$\frac{\log_b a^2}{a+b} + \frac{\log_c b^2}{b+c} + \frac{\log_a c^2}{c+a} \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

2. Ako su α, β, γ uglovi netupouglog trougla, dokazati da je

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma > \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma.$$

3. Odrediti maksimalnu vrednost odnosa zapremina lopte i oko nje opisane kupe.

4. Dat je skup S od n tačaka u ravni ($n > 2$) sa svojstvom: ako $A, B \in S$, onda postoji $C \in S$ tako da je trougao ABC jednakostraničan. Koliki može biti broj n?

4. Razred

1. Neka je S skup svih tačaka u ravni sa celobrojnim koordinatama u datom pravouglom koordinatnom sistemu. Dokazati da za svaki prirodan broj n postoji krug sa centrom $(\sqrt{2}, 1/3)$, koji u svojoj unutrašnjosti sadrži tačno n tačaka skupa S.

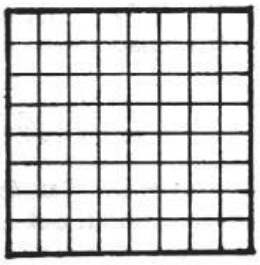
2. Zatvorene konveksne krive C_1', C_2' imaju obime x_1, x_2, gde je $x_1 + x_2 = d =$ const i slične su krivim C_1, C_2 koje imaju obime O_1, O_2 i površine p_1, p_2. Odrediti x_1, x_2, tako da je zbir površina koje ograničavaju krive C_1', C_2' minimalan.

3. Dati su skupovi celih brojeva:

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, \quad B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$$

tako da postoje elementi $x \in A$ i $y \in B$ za koje važi $x \equiv y \pmod{2n}$. Da li uvek postoje neprazni skupovi $A' \subset A$ i $B' \subset B$ takvi da je zbir elemenata iz A' i elemenata iz B' deljiv sa $2n$?

4. Grad ima kvadratnu mrežu sa m „horizontalnih" i n „vertikalnih" ulica, vidi sliku 2. Kolika je najmanja dužina dela mreže koji treba asfaltirati, tako da se od svake raskrsnice do bilo koje druge može stići asfaltom?



Sl. 2.

MALA OLIMPIJADA 1976.

1. Dokazati da za dati konveksan mnogougao površine P i obima S postoji krug poluprečnika P/S koji je u njemu sadržan.

2. Dato je $2n+1$ celih brojeva sa svojstvom: ako se izdvoji bilo koji od njih, preostalih $2n$ brojeva mogu se podeliti na dve grupe po n brojeva, tako da je zbir brojeva u jednoj jednak zbiru brojeva u drugoj grupi. Dokazati da su svi dati brojevi međusobno jednaki.

3. Odrediti najmanju i najveću vrednost funkcije

$$f(x,y,z,t) = \frac{ax^2+by^2}{ax+by} + \frac{az^2+bt^2}{az+bt}, \quad (a>0, b>0),$$

uz uslove $x+z=y+t=1, \quad x,y,z,t \geq 0.$

OSAMNAESTO SAVEZNO TAKMIČENJE
VELENJE, 1977.

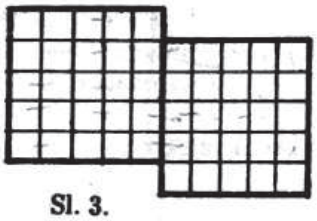
1. RAZRED

1. Odrediti celobrojna rešenja jednačine $p(x+y) = xy$, gde je p dati prost broj.

2. Neka su a, b i c prirodni brojevi i $a^2+b^2=c^2$. Dokazati da je broj abc deljiv sa 60.

3. Na stranicama kvadrata $ABCD$ nalaze se tačke P, Q i R koje dele njegov obim na tri jednaka dela. Dokazati da je zbir dužina duži PO, QO i RO najmanji mogućan, ako je jedna od tačaka P, Q i R središte stranice kvadrata na kojoj se nalazi. (Tačka O je centar kvadrata.)

4. Da li se dve ploče 5×5, prislonjene jedna uz drugu kao na slici 3, mogu pokriti dominama 2×1 (jedna domina pokriva dva susedna polja)?



Sl. 3.

2. RAZRED

1. Rešiti u skupu realnih brojeva jednačinu

$$x = \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}.$$

2. Na stranicama AB, BC i CA trougla ABC date su tačke P, Q i R, takve da je

$$AP = \lambda AB, \quad BQ = \lambda BC, \quad CR = \lambda CA, \quad (1/2 \leq \lambda \leq 1).$$

Dokazati da obim trougla PQR nije veći od obima trougla ABC pomnoženog brojem λ.

3. Dato je 20 prirodnih brojeva $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{20}$, takvih da je

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{20} < 70.$$

Dokazati da među razlikama $a_j - a_k$ $(j > k)$ postoje bar četiri međusobno jednake.

4. Dokazati da za svaki prirodan broj $n > 1$ važi nejednakost:

$$\sqrt{n} < \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{9}{8} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n-2} < \sqrt{2n}.$$

3. Razred

1. Neka je k prirodan broj i $a_1, a_2, \ldots, a_k$ pozitivni brojevi manji od 1. Dokazati da važi nejednakost

$$\sqrt{a_1^2 + (1-a_2)^2} + \sqrt{a_2^2 + (1-a_3)^2} + \cdots + \\ + \sqrt{a_{2k-1}^2 + (1-a_{2k})^2} + \sqrt{a_{2k}^2 + (1-a_1)^2} \geq k\sqrt{2}.$$

2. Odrediti sve prirodne brojeve čiji je kvadrat jednak petom stepenu zbira njegovih cifara (u dekadnom zapisu).

3. Krug upisan u pravougli trougao sa hipotenuzom dužine c dodiruje krakove oštrog ugla u tačkama M i N. Dokazati da je $MN < 2c\sqrt{3}/9$.

4. Neka je D skup dijagonala pravilnog 100–ugaonika. Da li postoji podskup E skupa D sa sledeća tri svojstva:

1) Nikoje dve dijagonale iz skupa E nemaju zajedničkih unutrašnjih tačaka.
2) Iz svakog temena 100–ugaonika polazi paran broj dijagonala iz skupa E.
3) Dijagonale iz E dele 100–ugaonik na trouglove.

4. Razred

1. Neka je $n \geq 2$ i $a_j = n! + j$, za $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Dokazati da za svaki broj $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ postoji bar jedan prost broj p, takav da je broj a_k deljiv sa p, a nijedan od brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_n$ nije deljiv sa p.

2. Dokazati da površina kvadrata koji se ceo nalazi unutar datog trougla nije veća od polovine površine trougla.

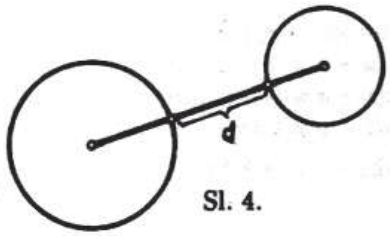
3. Na koliko se načina broj $6k$ $(k \in \mathbf{N})$ može napisati kao zbir tri prirodna broja? Zapisi koji se razlikuju samo u redosledu sabiraka smatraju se istim.

4. U ravni je dat skup S od 100 tačaka. Dokazati da postoji konačno mnogo krugova za koje važi:

1) Svaka tačka iz S je sadržana u unutrašnjosti nekog kruga.

2) Krugovi su disjunktni i rastojanje između svaka dva kruga je strogo veće od 1. (Rastojanje d između dva disjunktna kruga k_1 i k_2 prikazano je na slici 4.)

3) Zbir prečnika tih krugova je strogo manji od 100.



Sl. 4.

MALA OLIMPIJADA 1977.

1. Odrediti skup svih realnih brojeva α sa sledećom osobinom: Za svaki pozitivan broj c postoji razlomak $\frac{m}{n}$ $(m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N})$ različit od α, za koji je

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| < \frac{c}{n}.$$

2. Odrediti sve šestorke (p, q, r, x, y, z), tako da su p, q, r prosti brojevi, a x, y, z prirodni brojevi i da važi $p^{2x} = q^y r^z + 1$.

3. U trouglu ABC važi relacija $2\,BC = AB + AC$. Dokazati:

a) Teme A, središta M i N stranica AB i AC, centar S upisanog kruga i centar O opisanog kruga pripadaju istom krugu k.

b) Prava TS, gde je T težište trougla ABC, jeste tangenta kruga k.

DEVETNAESTO SAVEZNO TAKMIČENJE
Bećići, 1978.

1. Razred

1. Odrediti vrednost izraza

$$S = \frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx},$$

ako za realne brojeve x, y i z važi $xyz = 1$.

2. Odrediti sve prirodne brojeve koji su 33 puta veći od zbira svojih cifara.

3. Neka su AA_1, BB_1, CC_1 paralelne tetive nekog kruga. Tačke A', B', C' su simetrične tačkama A_1, B_1, C_1 redom, u odnosu na središta duži BC, CA, AB. Dokazati da su tačke A', B', C' kolinearne.

4. Tablica 9×10 je najpre pokrivena dominama 2×1, a zatim su domine izmešane. Dokazati da se tablica ne može ponovo pokriti tim dominama, tako da

svaka domina koja je u prvom pokrivanju bila u horizontalnom položaju u drugom bude u vertikalnom i obrnuto.

2. Razred

1. Da li postoje realni brojevi a, b, c, d takvi da:
   1° jednačina $ax^2 + bdx + c = 0$ ima različita realna rešenja x_1 i x_2.
   2° jednačina $bx^2 + cdx + a = 0$ ima različita realna rešenja x_2 i x_3.
   3° jednačina $cx^2 + adx + b = 0$ ima različita realna rešenja x_3 i x_1.

2. Neka je S podskup skupa realnih brojeva takav da važe sledeći uslovi:
   a) $\mathbb{Z} \subset S$,
   b) $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in S$,
   c) Iz $x, y \in S$ sledi $x + y \in S$, $xy \in S$.

   Dokazati da $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \in S$.

3. Dat je četvorougao $ABCD$. Neka je E tačka na pravoj DB takva da je $AE \parallel DC$, a F tačka na pravoj AC takva da je $DF \parallel AB$. Dokazati da je $EF \parallel BC$.

4. Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tačke jedne ravni takve da je najveće od rastojanja A_iA_j $(i \neq j)$ jednako 1, a najmanje d. Dokazati da je $d < \dfrac{2}{\sqrt{n-1}}$.

3. Razred

1. Odrediti sve prirodne brojeve n za koje postoji polinom $P_n(x)$ n-tog stepena sa celobrojnim koeficijentima, takav da je u n različitih celobrojnih tačaka jednak n, a u nuli jednak nuli.

2. Dokazati da je ceo broj $r > 2$ složen, ako i samo ako je tačno bar jedno od sledeća dva tvrđenja:
   a) za neko $s \in \{2, 3, \ldots\}$ je $r = 2^s$;
   b) za neke $u, v \in \{3, 4, \ldots\}$ $(u \leq v)$ je $r = \frac{u}{2}(2v - u + 1)$.

3. Neka je T težište, a O proizvoljna tačka u trouglu ABC. Ako su A_1, B_1, C_1 tačke preseka prave OT sa pravim BC, CA, AB redom, dokazati da je

$$OA_1 \cdot OB_1 \cdot OC_1 \leq TA_1 \cdot TB_1 \cdot TC_1.$$

4. U ravni je dato n tačaka $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Ako je $A_iA_j \geq 1$, za svako $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, gde je $i \neq j$, dokazati da broj duži A_iA_j dužine jednake 1 nije veći od $3n$.

4. Razred

1. Neka je n prirodan broj. Označimo sa p_k broj nenegativnih celih rešenja jednačine $kx + (k+1)y = n - k + 1$. Izračunati $p_1 + p_2 + \cdots + p_{n+1}$.

2. Neka je $a + (n-1)d$, $n = 1, 2, \ldots$ aritmetički niz sa razlikom $d > 0$. Dokazati da je a/d racionalan broj, ako i samo ako se iz tog niza može izdvojiti geometrijski podniz.

3. Neka je $P \subset \mathbf{N}$, takav da važe sledeća dva uslova:
1) $a \in P, b \in P \Rightarrow a + b \in P$;
2) $(\forall q \in \mathbf{N})\, q > 1 \Rightarrow (\exists c \in P)\, c \equiv 0 \pmod q$.
Dokazati da je $\mathbf{N} \setminus P$ konačan skup.

4. Neka je $a \geq 3$ i neka je $P_n(x)$ polinom n-tog stepena sa realnim koeficijentima. Dokazati da je

$$\max_{0 \leq i \leq n+1} |a^i - P_n(i)| \geq 1.$$

MALA OLIMPIJADA 1978.

1. Odrediti sve cele brojeve x, y, z takve da je $x^2(x^2 + y) = y^{z+1}$.

2. Neka je k_0 jedinični polukrug nad prečnikom AB, a k_1 krug poluprečnika $r_1 = 1/2$ koji dodiruje k_0 i AB. Krug k_{n+1} poluprečnika r_{n+1} dodiruje k_n, k_0 i AB. Dokazati:

a) Za svako $n \in \{2, 3, \dots\}$ važi: $\dfrac{1}{r_{n+1}} + \dfrac{1}{r_{n-1}} = \dfrac{6}{r_n} - 4$.

b) $1/r_n$ je ili kvadrat parnog prirodnog broja ili dvostruki kvadrat neparnog prirodnog broja.

3. Neka je $\mathcal{F}$ familija podskupova skupa od n elemenata, takva da nijedan njen član nije podskup nekog drugog njenog člana. Dokazati da familija $\mathcal{F}$ može imati najviše $\binom{n}{[n/2]}$ članova.

DVADESETO SAVEZNO TAKMIČENJE
NOVI SAD, 1979.

1. RAZRED

1. Odrediti realne brojeve x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 za koje je $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$, ako su poznati zbirovi $S_1, S_2, \dots, S_{10}$ po dva od tih brojeva, pri čemu je

$$S_1 < S_2 < \dots < S_{10}.$$

2. U krug k je upisan sedmougao čija su tri ugla jednaka $120°$. Dokazati da su bar dve stranice ovog sedmougla jednake.

3. Da li se u krug poluprečnika 1 može smestiti izvestan broj krugova, tako da nikoja dva od njih nemaju zajedničku unutrašnju tačku i da im je zbir poluprečnika jednak 1979?

4. Za koje prirodne brojeve n je zbir cifara broja $n!$ jednak 9?

2. RAZRED

1. Neka su tačke P i M na stranicama DC i BC kvadrata $ABCD$, takve da je PM tangenta kruga sa centrom A i poluprečnikom AB. Dalje, neka su Q i N tačke preseka pravih PA i MA sa dijagonalom BD. Dokazati da tačke P, Q, M, N, C pripadaju jednom krugu.

2. Ako je $x > y \geq 0$, dokazati da je

$$x + \frac{4}{(x-y)(y+1)^2} \geq 3.$$

3. Naći sva razlaganja broja 2001 u obliku zbira 1979 kvadrata prirodnih brojeva.

4. Neka je dat niz $m+n$ kuglica, gde su m i n uzajamno prosti brojevi. Prvih m kuglica tog niza premestimo u istom poretku iza preostalih n, pa postupak ponavljamo sa tako dobijenim nizom. Dokazati da se posle nekoliko koraka prva kuglica može dovesti na bilo koje (unapred određeno) mesto u nizu.

3. RAZRED

1. Dati su polinomi sa kompleksnim koeficijentima

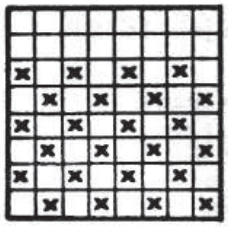
$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \quad \text{sa nulama} \quad x_1, x_2, \ldots, x_n \quad \text{i}$$
$$Q(x) = x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n \quad \text{sa nulama} \quad x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2.$$

Ako su $a_1+a_3+a_5+\cdots$ i $a_2+a_4+a_6+\cdots$ realni brojevi, dokazati da je $b_1+b_2+\cdots+b_n$ takođe realan broj.

2. Dati su pravilan tetraedar ivice a i pravilna četvorostrana piramida (osnova je kvadrat, a sve ivice su jednake) takođe ivice a. Razrezati ova tela i od dobijenih delova sastaviti kocku.

3. Neka su $z_1, z_2, \ldots, z_n$ kompleksni brojevi. Dokazati da se mogu izabrati prirodni brojevi $i_1, i_2, \ldots, i_k$, tako da je $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$ i

$$|z_{i_1} + z_{i_2} + \cdots + z_{i_k}| \geq \frac{1}{4\sqrt{2}}(|z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|).$$



Sl. 5.

4. Na svim crnim poljima prvih šest redova šahovske table nalaze se pešaci, sl.5. U svakom potezu pešak preskače jednog od pešaka koji mu je susedan po dijagonali i time se pomera za dva polja po dijagonali dolazeći na slobodno polje, a preskočeni pešak se sklanja sa table. Da li se može igrati tako da posle nekog broja poteza na tabli ostane samo jedan pešak?

4. Razred

1. Dokazati da ne postoje prirodni brojevi n i $p > 5$, takvi da važi

$$(p-1)! + 1 = p^n.$$

2. Da li postoje brojevi $a, b > 0$ takvi da je
   a) $a, b \notin \mathbf{Q}$ i $a^b \in \mathbf{Q}$?
   b) $a, b, a^b \notin \mathbf{Q}$?
   c) $a \in \mathbf{Q}$ i $b, a^b \notin \mathbf{Q}$?

3. Neka su A, B, C tri različite tačke kruga, P površina trougla ABC i P_1 površina trougla određenog tangentama u A, B i C. Naći graničnu vrednost odnosa $P_1 : P$, kada je tačka A fiksirana, a B i C teže tački A po luku kruga, tako da je uvek $B \neq C$.

4. Isti kao 3. zadatak za 3. razred.

MALA OLIMPIJADA 1979.

1. Dokazati da za različite prirodne brojeve $a_1, a_2, \ldots, a_n$ važi nejednakost

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 \leq a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3.$$

2. Naći sve prirodne brojeve n, gde je $1 < n < 1979$, koji zadovoljavaju sledeći uslov: Ako je m prirodan broj, $1 < m < n$ i $(m, n) = 1$, onda je m prost broj.

3. Data su dva kruga obima 1979. Na prvom je označeno 1979 tačaka, a na drugom nekoliko lukova tako da je zbir dužina svih tih lukova manji od 1. Dokazati da se drugi krug može postaviti na prvi tako da nijedna od označenih tačaka ne pada u označeni luk.

DVADESETPRVO SAVEZNO TAKMIČENJE
Kumrovec, 1980.

1. Razred

1. Cena olovke je ceo broj para. Ukupna cena 9 olovaka je veća od 11, a manja od 12 dinara, dok je ukupna cena 13 olovaka veća od 15, a manja od 16 dinara. Kolika je cena jedne olovke?

2. Dati su brojevi $1, 12, 123, \ldots, 1234567890, 12345678901, \ldots$. Svaki broj dobija se iz prethodnog tako što mu se dopiše sledeća cifra, pri čemu posle 0 dolazi 1, posle 1 dolazi 2, ..., posle 9 dolazi nula. Dokazati da je bar jedan od tih brojeva deljiv sa 1981.

3. Neka je D tačka na stranici BC datog trougla ABC, takva da je $DC = 2BD$. Odrediti ostale uglove trougla ABC, ako je $\angle ABC = 45°$, $\angle ADC = 60°$.

4. Grad ima 1980 raskrsnica, a u svakoj od njih sastaju se po tri ulice. Postoji kružna autobuska linija, koja prolazi kroz svaku raskrsnicu tačno jedanput. Odlučeno je da se u svakoj ulici zasade stabla samo jedne od ovih vrsta drveća: kesten, breza i lipa. Dokazati da se to može učiniti tako da se u svakoj raskrsnici sastaju tri drvoreda različitih vrsta.

2. Razred

1. Odrediti sve cele brojeve x tako da $x^2 + 3x + 24$ bude potpun kvadrat.

2. U dati romb $ABCD$ upisan je krug. Neka tangenta tog kruga seče stranice BC i CD u tačkama M i N. Dokazati da je površina trougla AMN konstantna.

3. Stranica kvadrata K ima dužinu 7. Može li se taj kvadrat pokriti sa 8 kvadrata čije stranice imaju dužinu 3,

a) uz uslov da su stranice tih kvadrata paralelne odgovarajućim stranicama kvadrata K;

b) bez tog uslova.

4. Za prirodne brojeve $a_1, a_2, \ldots, a_{19}, b_1, b_2, \ldots, b_{21}$ važi

$$1 \le a_1 < a_2 < \cdots < a_{19} \le 200, \qquad 1 \le b_1 < b_2 < \cdots < b_{21} \le 200.$$

Dokazati da se među njima mogu izabrati brojevi a_i, a_j, b_p, b_q, tako da važi

$$a_i < a_j, \quad b_p < b_q, \quad a_j - a_i = b_q - b_p.$$

3. Razred

1. U skupu prirodnih brojeva rešiti jednačinu $x^{5-x} = (6-x)^{1-x}$.

2. Dato je 18 duži za čije dužine $x_1, x_2, \ldots, x_{18}$ važi

$$1 \le x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_{18} \le 1980.$$

Dokazati da postoje tri od tih duži koje mogu biti stranice trougla.

3. Neka je S presek dijagonala konveksnog četvorougla $ABCD$. Ako je

$$\angle SAB = \angle SBC = 30^\circ, \quad \angle SCD = \angle SDA = 45^\circ,$$

odrediti ugao između dijagonala datog četvorougla.

4. Odrediti sve polinome oblika $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, gde je $a_j \in \{-1, 1\}$ $(j = 0, 1, 2, \ldots, n)$, koji imaju samo realne nule.

4. Razred

1. Data je elipsa parametarskim jednačinama

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad a \ne b.$$

Dokazati da tačke čiji su parametri t_1, t_2, t_3, t_4 pripadaju jednom krugu, ako i samo ako postoji ceo broj k za koji je $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 2k\pi$.

2. Neka je S skup koji se sastoji od n realnih brojeva i T skup zbirova od po k različitih brojeva iz S, gde je $n \geq k$. Dokazati da skup T sadrži bar $k(n-k)+1$ elemenata.

3. Dat je prirodan broj a. Niz (a_n) određen je na sledeći način: $a_0 = a$; ako je

$$a_n = c_0 + 10c_1 + \cdots + 10^k c_k,$$

gde $c_0, c_1, \ldots, c_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, onda je

$$a_{n+1} = 2c_0 + c_1 + 10c_2 + \cdots + 10^{k-1}c_k.$$

Koji se brojevi u nizu (a_n) pojavljuju beskonačno mnogo puta?

4. Data je funkcija $f : [0,1] \to [0,1]$, takva da $0, 1 \in f([0,1])$ i da za sve $x, y \in [0,1]$ važi

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - f(x)| + |y - f(y)|}{2}.$$

Dokazati da postoji tačno jedan broj $x \in [0,1]$ takav da je $f(x) = x$.

MALA OLIMPIJADA 1980.

1. Krugovi k i l seku se u tačkama P i Q. Neka je A proizvoljna tačka kruga k, različita od P i Q i neka prave AP i AQ seku krug l, redom, još u tačkama B i C. Dokazati da prava određena visinom iz temena A trougla ABC sadrži fiksiranu tačku koja ne zavisi od tačke A.

2. Neka su a, b, c celi brojevi i m prirodan broj veći od 1. Ako je

$$a^n + bn + c \equiv 0 \pmod{m},$$

za svaki prirodan broj n, dokazati da je $b^2 \equiv 0 \pmod{m}$. Da li mora biti $b \equiv 0 \pmod{m}$?

3. Dat je niz (x_n) čiji članovi zadovoljavaju relaciju

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + a}{x_{n-1}}, \quad \text{za} \quad n \in \mathbf{N}.$$

Ako su x_0, x_1 i $(x_0^2 + x_1^2 + a)/(x_0 x_1)$ celi brojevi, dokazati da su svi članovi niza (x_n) celi brojevi.

DVADESETDRUGO SAVEZNO TAKMIČENJE
OHRID, 1981.

1. RAZRED

1. Prirodni brojevi a, b i c su takvi da su $a+c$ i $b+c$ kvadrati uzastopnih prirodnih brojeva. Dokazati da su $ab+c$ i $ab+a+b+c$ takođe kvadrati uzastopnih prirodnih brojeva.

2. Iz jednog temena oštrouglog trougla konstruisana je visina, iz drugog simetrala ugla, iz trećeg težišna duž. Njihove presečne tačke su temena novog trougla. Dokazati da taj trougao ne može biti jednakostraničan.

3. Prva četiri člana jednog niza su 1,9,8,1. Svaki sledeći član niza jednak je poslednjoj cifri zbira prethodna četiri člana.

a) Da li se u nizu pojavljuje četvorka 1,2,3,4?

b) Da li se u nizu nekad ponovi polazna četvorka?

4. Jedan miš gricka parče sira u obliku kocke sa ivicom 3. Kocka sira podeljena je na 27 manjih kockica sa ivicom 1. Miš gricka sir na taj način što počinje sa kockicom u jednom od temena. Pojevši celu kockicu, prelazi na susednu, koja sa tek pojedenom kockicom ima zajedničku stranu. Da li miš može pojesti celo parče sira tako da poslednja kockica koju pojede bude ona u centru kocke?

2. RAZRED

1. Neka su a, b i c celi brojevi i $a > 0$. Pretpostavimo da jednačina $ax^2 + bx + c = 0$ ima dva različita rešenja u intervalu $(0,1)$. Dokazati da je $a \geq 5$ i naći primer takve jednačine za $a = 5$.

2. Jedan konveksan četvorougao podeljen je dijagonalama na četiri trougla čije se površine izražavaju celim brojevima. Dokazati da je proizvod ta četiri broja potpun kvadrat.

3. Naći sve parove celih brojeva (x, y) za koje važi

$$y^4 - x(x+1)(x+2)(x+3) = 1.$$

4. Skup $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ razbijen je na 7 međusobno disjunktnih podskupova. Dokazati da postoje brojevi a, b, c, d, koji pripadaju istom podskupu, među kojima ima bar tri različita broja i za koje važi $a + b = c + d$.

3. RAZRED

1. Dokazati da se za svaki prirodan broj n, broj $\mathrm{tg}^{2n} 15^\circ + \mathrm{ctg}^{2n} 15^\circ$ može napisati kao zbir kvadrata tri uzastopna prirodna broja.

2. Sa iste strane duži PQ konstruisana su tri slična trougla KPQ, QLP i PQM, takva da je

$$\angle QPM = \angle PQL = \alpha, \quad \angle PQM = \angle QPK = \beta, \quad \angle PQK = \angle QPL = \gamma,$$

pri čemu je $\alpha < \beta < \gamma$. Dokazati da je trougao KLM sličan sa prva tri.

3. Neka je S_1 niz prirodnih brojeva $1, 2, 3, \ldots$. Definišemo niz S_{n+1} ($n = 1, 2, 3, \ldots$) pomoću niza S_n, povećavajući za jedan one članove niza S_n koji su deljivi sa n. Tako, na primer, S_2 je niz $2, 3, 4, 5, 6 \ldots$, S_3 je niz $3, 3, 5, 5, 7, 7, \ldots$. Dokazati da je u nizu S_n tačno prvih $n-1$ članova jednako n, ako i samo ako je n prost broj.

4. Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_{1966}$ podskupovi konačnog skupa M takvi da je $|A_j| > \frac{1}{2}|M|$ za $1 \leq j \leq 1066$. Dokazati da postoje elementi $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ iz M, takvi da svaki A_j sadrži bar jedan od elemenata $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$. (Sa $|S|$ je označen broj elemenata skupa S.)

4. Razred

1. Prava deli trougao na dva dela jednakih površina i obima. Dokazati da ona prolazi kroz centar upisanog kruga tog trougla.

2. Neka su a i b pozitivni realni brojevi. Naći minimum izraza

$$\left|\frac{x+y}{1+x\overline{y}}\right|,$$

ako su x i y kompleksni brojevi, takvi da je $|x| = a$, $|y| = b$.

3. Neka je $F_n = a^n \sin nA + b^n \sin nB + c^n \sin nC$, gde su a, b, c, A, B, C realni brojevi, a $A + B + C$ je ceo umnožak broja π. Dokazati da iz $F_1 = F_2 = 0$ sledi da za svaki prirodan broj n važi $F_n = 0$.

4. Skup $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ je prvi put razbijen na m, a drugi put na $m + k$ nepraznih podskupova, pri čemu je $k > 0$. Dokazati da se bar $k + 1$ element skupa S prvi put nalazio u brojnijem podskupu nego drugi put.

MALA OLIMPIJADA 1981.

1. Dat je prirodan broj $n \geq 3$. Za n-točlani skup S realnih brojeva označimo sa $A(S)$ skup svih strogo rastućih tročlanih aritmetičkih nizova sastavljenih od elemenata skupa S. Koliko najviše elemenata može imati skup $A(S)$?

2. Unutar konveksnog četvorougla $ABCD$ postoji takva tačka S da duži SA, SB, SC, SD dele taj četvorougao na četiri dela jednakih površina. Dokazati da jedna od dijagonala tog četvorougla polovi drugu.

3. Neka su a i b nenegativni celi brojevi. Dokazati da je $5a \geq 7b$, ako i samo ako postoje nenegativni celi brojevi x, y, z, t takvi da je

$$x + 2y + 3z + 7t = a,$$
$$y + 2z + 5t = b.$$

DVADESETTREĆE SAVEZNO TAKMIČENJE
SARAJEVO, 1982.

1. RAZRED

1. Ako za prirodne brojeve a, b, c, d važi $(a+b)^2 + a = (c+d)^2 + c$, dokazati da je $a = c$ i $b = d$.

2. Dato je n sijalica ($n > 13$) od kojih svaka ima svoj prekidač. Dozvoljeno je jednovremeno promeniti stanje tačno 13 sijalica. U početnom trenutku neke sijalice su upaljene, a neke nisu.

a) Da li se mogu pogasiti sve sijalice?

b) Koliko je najmanje koraka za to potrebno, ako je $n = 111$ i ako su u početku sve sijalice upaljene?

3. U ravni je dato šest krugova, takvih da centar nijednog od njih nije sadržan u uniji preostalih pet. Dokazati da je presek tih krugova prazan.

4. Neka se prave određene naspramnim stranicama AB i CD konveksnog četvorougla $ABCD$ seku u tački W i neka su X i Y središta dijagonala AC i BD. Dokazati da je $P_{ABCD} = 4P_{XYW}$.

2. RAZRED

1. Odrediti skup S sa najmanjim brojem elemenata za koji važe sledeće tri osobine:

a) $S \subset \{0, 1, 2, 3, \dots\}$;

b) $1981 \in S$;

c) Ako $x, y, z \in S$, onda ostatak pri deljenju broja $x+y+z$ sa 1982 takođe pripada skupu S.

2. Kroz ortocentar trougla ABC konstruisana je prava l. Dokazati da se prave njoj simetrične u odnosu na stranice trougla seku na krugu opisanom oko trougla ABC.

3. Neka su k, n i $a_1, a_2, \dots, a_k$ prirodni brojevi za koje važi

$$a_1 < a_2 < \dots < a_k \le n, \qquad k > \left[\frac{n+1}{2}\right].$$

Dokazati da postoje brojevi i i r, takvi da je $a_i + a_1 = a_r$.

4. Odrediti realne brojeve a i b, tako da za proizvoljna dva realna broja u i v važi:

$$\max_{0 \le x \le 1} |x^2 - ux - v| \ge \max_{0 \le x \le 1} |x^2 - ax - b|.$$

3. i 4. RAZRED

1. Odrediti sve polinome $p(x)$ sa celobrojnim koeficijentima, takve da za svaki realan broj x važi $16\,p(x^2) = [p(2x)]^2$.

2. Dokazati da je

$$\sqrt[44]{\operatorname{tg} 1^\circ \operatorname{tg} 2^\circ \cdots \operatorname{tg} 44^\circ} < \operatorname{tg} 22^\circ 30' < \frac{1}{44}(\operatorname{tg} 1^\circ + \operatorname{tg} 2^\circ + \cdots + \operatorname{tg} 44^\circ).$$

3. Neka je M skup svih tačaka u ravni sa celobrojnim koordinatama i S neki njegov podskup. Za preslikavanje $f : S \to S$ kažemo da je „susedno", ako je f bijekcija i za svako $P \in S$, tačke P i $f(P)$ su susedne. Ako postoji „susedno" preslikavanje $f : S \to S$, dokazati da postoji i „susedno" preslikavanje $g : S \to S$, koje zadovoljava uslov $g(g(P)) = P$ za svako $P \in S$.

4. Dokazati da postoji tačno jedna četvorka (x, y, z, t) prirodnih brojeva sa sledećim osobinama:

a) $1 < x < y < z < t$;

b) proizvod bilo kojeg od tih brojeva uvećan za 1 deljiv je četvrtim brojem.

MALA OLIMPIJADA 1982.

1. Neka je p prost broj veći od 2. Za $k = 1, 2, \ldots, p-1$ označimo sa a_k ostatak pri deljenju broja k^p sa p^2. Dokazati da je

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{p-1} = \frac{p^3 - p^2}{2}.$$

2. Naći sve polinome $P_n(x)$ oblika

$$P_n(x) = n!x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + (-1)^n n(n+1),$$

sa celobrojnim koeficijentima, za čije korene $x_1, x_2, \ldots, x_n$ važi

$$x_k \in [k, k+1], \quad \text{za} \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

3. Dati su realni brojevi $x_i > 1$ $(i = 1, 2, \ldots, 2n)$. Dokazati da interval $[0, 2]$ sadrži najviše $\binom{2n}{n}$ zbirova oblika $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{2n} x_{2n}$, gde $\alpha_i \in \{-1, 1\}$, $i = 1.2, \ldots, 2n$.

DVADESETČETVRTO SAVEZNO TAKMIČENJE
PRIŠTINA, 1983.

1. RAZRED

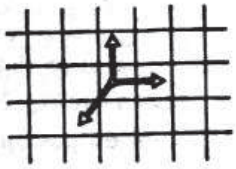
1. Odrediti sve prirodne brojeve n koji imaju osobinu da se koristeći tačno jednom svaku od cifara $0, 1, 2 \ldots, 9$ mogu napisati brojevi n^3 i n^4.

2. Tablica od 1983 reda formira se na sledeći način: U prvi red upisuju se redom brojevi 1, 9, 8, 3; zatim se ispod svakog broja upisuje zbir ostalih brojeva

iz njegovog reda, umanjen za taj broj. Koji se broj nalazi na prvom mestu 1983. reda?

3. Dat je trougao ABC u kome je $CA = CB$ i $\angle ACB = 80°$. Neka je M tačka u unutrašnjosti trougla ABC, takva da je $\angle MBA = 30°$ i $\angle MAB = 10°$. Naći $\angle AMC$.

4. Nazvaćemo delfinom figuru koja se po šahovskoj tabli kreće jedno polje nagore ili jedno polje nadesno ili jedno polje dijagonalno levo dole (vidi sliku 6.). Može li delfin da polazeći iz donjeg levog ugla obiđe tačno jedan put svako polje i zatim se vrati na polazno?



Sl. 6.

2. Razred

1. Ako su x, y i z pozitivni brojevi, takvi da je $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$, dokazati da je $(x-1)(y-1)(z-1) \geq 8$.

2. Dokazati da za svaki realan broj $x \geq \frac{1}{2}$ postoji ceo broj n takav da je

$$|x^2 - n| \leq \sqrt{x - \frac{1}{4}}.$$

3. Dat je pravougaonik $ABCD$. Na manjem luku AB kruga opisanog oko $ABCD$ izabrana je proizvoljna tačka M i kroz nju su konstruisane dve prave paralelne stranicama pravougaonika. Jedna od tih pravih seče duži AB i CD redom u tačkama P i R, a druga seče prave BC i DA redom u tačkama Q i S. Dokazati da su prave PQ i RS međusobno normalne i da se seku na dijagonali pravougaonika $ABCD$.

4. Pravougaonik dimenzija $1 \times n$ sastavljen je od n jediničnih kvadrata ($n \geq 4$), redom numerisanih sa $1, 2, \ldots, n$. Na poljima $n-2$, $n-1$ i n nalazi se po jedan žeton. Dva igrača igraju sledeću igru: naizmenično prebacuju po jedan žeton na proizvoljno slobodno polje sa manjim rednim brojem. Igru gubi igrač koji je na redu, a ne može odigrati potez. Dokazati da prvi igrač može tako da igra da sigurno pobedi, bez obzira kako igrao drugi.

3. i 4. Razred

1. Neka su p i q kompleksni brojevi. Rešenja jednačine $x^2 + px + q = 0$ su po modulu jednaka 1, ako i samo ako je $|p| \leq 2$, $|q| = 1$ i p^2/q nenegativan realan broj. Dokazati.

2. Funkcija f je definisana na skupu celih brojeva i zadovoljava sledeći uslov:

$$f(x) = \begin{cases} x - 10, & \text{ako je } x > 100, \\ f(f(x+11)), & \text{ako je } x \leq 100. \end{cases}$$

Dokazati da je $f(x) = 91$, za $x \leq 100$.

3. Neka je P tačka unutar trougla ABC, takva da je $\angle PAC = \angle PBC$ i neka su M i L podnožja normala iz tačke P redom na prave AC i BC. Ako je D središte stranice AB, dokazati da je $DL = DM$.

4. Niz prirodnih brojeva (x_n) je definisan na sledeći način:

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \left[\frac{3}{2}x_n\right] \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Dokazati da u nizu (x_n) ima beskonačno mnogo neparnih i beskonačno mnogo parnih brojeva.

DVADESETPETO SAVEZNO TAKMIČENJE
Smederevska Palanka, 1984.

1. Razred

1. Broj a je dobijen tako što su brojevi od 1 do 101 napisani jedan za drugim. Dokazati da je a složen broj. Da li je a kvadrat prirodnog broja?

2. Neka su a, b i c tri međusobno različita realna broja koji zadovoljavaju jednakost

$$\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0.$$

Dokazati da je

$$\frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} = 0.$$

3. Neka je O unutrašnja tačka trougla ABC. Neka su K, L i M tačke u kojima prave koje sadrže tačku O, a paralelne su stranicama CA, AB i BC seku redom prave AB, BC i CA. Dalje, neka su P, Q i R tačke u kojima se seku redom prave CK i KL, AL i BM, BM i CK. Dokazati da je zbir površina trouglova AKP, BLQ i CMR jednak površini trougla PQR.

4. Kvadrat stranice 5 je razložen na 25 jediničnih kvadrata i svaki od njih je obojen jednom od dve boje. Dokazati da postoje četiri istobojna jedinična kvadrata čiji su centri temena pravougaonika sa stranicama paralelnim stranicama kvadrata. Dokazati da tvrđenje ne važi za kvadrat stranice 4.

2. Razred

1. Neka je p_n n-ti prost broj ($p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5, \ldots$) i neka je $\pi(n)$ broj prostih brojeva koji nisu veći od n. Ako je

$$A = \{n + p_n \mid n \in \mathbf{N}\} \quad \text{i} \quad B = \{n + \pi(n) + 1 \mid n \in \mathbf{N}\},$$

dokazati da je $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \mathbf{N} \setminus \{1\}$.

2. Ako realni brojevi x, y i z zadovoljavaju jednačine

$$x+y+z=2 \quad \text{i} \quad xy+yz+zx=1,$$

dokazati da oni pripadaju intervalu $[0, 4/3]$.

3. Dat je konveksan četvorougao $ABCD$, kod koga je

$$\angle ABD = 50^\circ, \quad \angle ADB = 80^\circ, \quad \angle ACB = 40^\circ, \quad \angle DBC = \angle BDC + 30^\circ.$$

Izračunati $\angle DBC$.

4. U nekoj državi između svaka dva grada postoji jednosmerna avionska linija. Dokazati da postoji grad iz kojeg se u svaki drugi grad može stići avionom sa najviše jednim presedanjem.

3. i 4. Razred

1. Odrediti niz (a_n) koji zadovoljava uslov

$$1+\sum_{d|n}(-1)^{n/d}a_d = 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

(Sabira se po svim pozitivnim deliocima broja n uključujući 1 i n.)

2. Dokazati da za svaki prirodan broj n jednačina

$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n x + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n+1} y = 1$$

ima tačno jedno celobrojno rešenje.

3. Dat je četvorougao $ABCD$. Dokazati tvrđenje: Ako postoji tačka P takva da su trouglovi ABP i CDP jednako orijentisani jednakokrako–pravougli s pravim uglom kod temena P, onda postoji tačka Q takva da su trouglovi BCQ i DAQ jednakokrako–pravougli s pravim uglom kod temena Q.

4. Neka je S skup od n elemenata. Odrediti najveći broj m za koji postoji familija $\{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ različitih nepraznih podskupova skupa S, takva da je presek svaka tri skupa iz te familije prazan.

DVADESTŠESTO SAVEZNO TAKMIČENJE
Cetinje, 1985.

1. Razred

1. Dokazati da se među 39 uzastopnih prirodnih brojeva nalazi bar jedan broj čiji je zbir cifara deljiv sa 11.

2. U unutrašnjosti kvadrata $ABCD$ data je tačka E takva da je trougao CDE jednakokrak sa uglom od $150°$ kod temena E. Odrediti uglove trougla ABE.

3. U ravni je dato 3000 tačaka tako da nikoje tri ne leže na istoj pravoj. Dokazati da postoji 1000 trouglova sa temenima u tim tačkama tako da nikoja dva od njih nemaju zajedničkih tačaka.

4. Dokazati da za pozitivne realne brojeve a, b, c, d, e, f važi nejednakost

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{cd}{c+d}+\frac{ef}{e+f}\leq\frac{(a+c+e)(b+d+f)}{a+b+c+d+e+f}.$$

2. Razred

1. Odrediti najmanji prirodan broj n sa osobinom da su zbirovi cifara brojeva n i $n+1$ deljivi sa 1985.

2. Neka je funkcija $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ zadata formulom $f(m)=m+[\sqrt{m}]$. Dokazati da za svako $m\in\mathbf{N}$ postoji $k\in\mathbf{N}$, tako da je

$$f^k(m)=\underbrace{f(f\ldots(f}_{k}(m))\ldots)$$

potpun kvadrat.

3. Dati su tetraedar $PABC$ i tačka Q unutar njega. Dokazati da je

$$\angle BQC+\angle CQA+\angle AQB>\angle BPC+\angle CPA+\angle APB.$$

4. Naći najmanji prirodan broj n za koji postoji $M\subset\{1,2,\ldots,100\}$ od n elemenata, koji zadovoljava uslove:

a) 1 i 100 pripadaju skupu M;

b) za svako $a\in M\setminus\{1\}$ postoje $x,y\in M$, takvi da je $a=x+y$.

3. i 4. Razred

1. Naći sve prirodne brojeve manje od 1000 koji su jednaki zbiru faktorijela svojih cifara.

2. Neka je p polinom sa realnim koeficijentima takav da za svaki realan broj x važi

$$p(\cos x)=p(\sin x).$$

Dokazati da postoji polinom q, takav da za svaki realan broj t važi

$$p(t)=q(t^4-t^2).$$

3. U trouglu ABC simetrale uglova α,β,γ seku opisani krug redom u tačkama P,Q,R. Dokazati da je

$$AP+BQ+CR>AB+BC+CA.$$

4. Data je kvadratna tablica $n\times n$ u koju su upisani celi brojevi, tako da razlika proizvoljna dva susedna broja iz te tablice nije veća od 1(dva broja su susedna ako su upisana u kvadratiće koji imaju zajedničku stranicu). Dokazati da postoji broj koji se u tablici pojavljuje bar n puta.

MALA OLIMPIJADA 1985.

1. Neka je $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Svakom elementu $i \in S$ pridružimo neki neprazan skup $S_i \subset S$, tako da važi:

a) Za proizvoljne brojeve $i, j \in S$ važi: $j \in S_i \Rightarrow i \in S_j$.

b) Za proizvoljne različite brojeve $i, j \in S$ važi:

$$|S_i| = |S_j| \Rightarrow S_i \cap S_j = \emptyset.$$

Dokazati da postoji broj $k \in S$, takav da važi $|S_k| = 1$.

2. Neka je $ABCD$ paralelogram i E takva tačka da je $AE \perp AB$ i $BC \perp EC$. Dokazati da je

$$\angle AED = \angle BEC \quad \text{ili} \quad \angle AED + \angle BEC = 180^\circ.$$

3. Dokazati da je

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2,$$

gde su a, b, c, d pozitivni realni brojevi.

DVADESETSEDMO SAVEZNO TAKMIČENJE
POSTOJNA, 1986.

1. RAZRED

1. Dokazati da postoji beskonačno mnogo trojki uzastopnih prirodnih brojeva od kojih je svaki zbir dva potpuna kvadrata. (Primer: $72 = 6^2 + 6^2$, $73 = 8^2 + 3^2$, $74 = 7^2 + 5^2$.)

2. Neka u konveksnom četvorouglu $ABCD$ važi $AB + BD \leq AC + CD$. Dokazati da je $AB \leq AC$.

3. U trouglu ABC uglovi kod temena B i C su jednaki 40°. Neka je D tačka prave AB, takva da je tačka B između tačaka A i D i da važi $AD = BC$. Odrediti uglove trougla ADC.

4. Kvadrat veličine 5×5 podeljen je na 25 polja (jediničnih kvadratića). U svako polje postavljen je po jedan žeton. Jedan potez sastoji se u premeštanju bilo koja dva žetona, svakog od njih u neko susedno polje. Uočimo neko polje. Da li se može postići da se posle izvesnog broja poteza svih 25 žetona nađu u uočenom polju? (Dva polja su susedna ako imaju zajedničku stranicu.)

2. RAZRED

1. Neka su x i y prirodni brojevi za koje važi $2x^2 + x = 3y^2 + y$. Dokazati da su brojevi $x - y$, $2x + 2y + 1$ i $3x + 3y + 1$ potpuni kvadrati.

2. Dokazati da za pozitivne brojeve a, b i c važi nejednakost

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\geq\frac{a+b+c}{3}.$$

3. Na prečniku AA_1 kruga data je tačka C. Neka je B tačka tog kruga za koju važi $AB = CA_1$. Dokazati da se u trouglu ABC simetrala unutrašnjeg ugla kod A, težišna duž iz temena B i visina iz temena C seku u jednoj tački.

4. Dato je pet različitih pozitivnih brojeva. Dokazati da među njima postoje dva, čiji ni zbir ni apsolutna vrednost razlike nisu jednaki ni jednom od preostala tri broja.

3. i 4. Razred

1. Naći sve funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ koje zadovoljavaju uslove:
   a) $f(x+f(y)) = f(x+y)+1$ za sve x i y iz $\mathbf{R}$;
   b) f je strogo rastuća (tj. $x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$ za sve x i y iz $\mathbf{R}$).

2. Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ realni brojevi, takvi da je

$$(n-1)(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2) = (x_1+x_2+\cdots+x_n)^2.$$

Dokazati da su brojevi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ svi nenegativni ili svi nepozitivni.

3. Iz središta svake stranice tetivnog četvorougla konstruisana je normala na suprotnu stranicu. Dokazati da se ove četiri normale seku u jednoj tački.

4. Naći najveći ceo broj k sa sledećim svojstvom: ma kako upisali brojeve $1, 2, \ldots, 64$ u polja tablice 8×8, mogu se naći dva susedna polja takva da razlika brojeva upisanih u tim poljima nije manja od k. (Dva polja su susedna, ako imaju bar jedno zajedničko teme.)

DVADESETOSMO SAVEZNO TAKMIČENJE
Titov Vrbas, 1987.

1. Razred

1. Dokazati da za nenegativne brojeve a i b važi nejednakost

$$\frac{(a+b)^2}{2}+\frac{a+b}{4}\geq a\sqrt{b}+b\sqrt{a}.$$

2. Dat je trougao ABC sa tupim uglom kod temena A. Neka je $a = BC$, $b = CA$ i h_a, odnosno h_b, visine iz temena A, odnosno B. Dokazati da je $a + h_a > b + h_b$.

3. Dat je prirodan broj n. Odrediti broj rešenja jednačine

$$x^2 - [x^2] = (x - [x])^2,$$

za koja je $1 \leq x \leq n$.

4. Svako teme kocke označeno je jednim od brojeva 1 ili -1, a na svakoj strani zapisan je proizvod brojeva kojima su označena četiri temena te strane. Da li zbir tako dobijenih 14 brojeva može biti jednak: a) 7, b) 0?

2. Razred

1. Dokazati da postoji beskonačno mnogo prostih brojeva p, takvih da jednačina $x^2 + x + 1 = py$, po x i y, ima celobrojno rešenje.

2. Četvorougao $ABCD$ je upisan u krug, M je tačka preseka normala na AB u tački A i na CD u tački D, a N je tačka preseka normala na AB u tački B i na CD u tački C. Dokazati da prava MN sadrži tačku preseka pravih AC i BD.

3. Ako se u četvorougao može upisati krug, dokazati:

a) Krugovi upisani u dva trougla, na koje jedna od dijagonala deli dati četvorougao, međusobno se dodiruju.

b) Tačke dodira tih krugova sa stranicama datog četvorougla su temena tetivnog četvorougla.

4. Neka je $P(x)$ polinom sedmog stepena sa celim koeficijentima, takav da za sedam različitih celih brojeva ima vrednosti u skupu $\{-1, 1\}$. Dokazati da se $P(x)$ ne može predstaviti u obliku proizvoda dva polinoma sa celim koeficijentima, tako da nijedan od njih nije konstanta.

3. i 4. Razred

1. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitivni realni brojevi čiji je proizvod jednak 1. Dokazati da je

$$(4 + a_1)(4 + a_2) \cdots (4 + a_n) \geq 5^n.$$

2. Neka su a i m prirodni brojevi i x ceo broj, takav da m deli $a^2x - a$. Dokazati da postoji ceo broj y, takav da m deli brojeve $a^2y - a$ i $ay^2 - y$.

3. U prostoru je dato n tačaka, takvih da bilo koje četiri obrazuju nedegenerisani tetraedar zapremine ne veće od 1. Dokazati da postoji tetraedar zapremine ne veće od 27 koji sadrži sve date tačke (u unutrašnjosti ili na stranama).

4. Neka je X skup svih konačnih nizova čiji su članovi brojevi 0 i 1 i $f : X \to X$ funkcija definisana uslovom: za $x \in X$, $f(x)$ dobijamo tako što u nizu x svaku jedinicu zamenimo sa 01, a svaku nulu sa 10. Koliko se parova 00 javlja u nizu

$$\underbrace{f(f \ldots (f}_{n \text{ puta}}(1)) \ldots)?$$

MALA OLIMPIJADA 1987.

1. Neka je $x_0 = a, x_1 = b$, gde su a i b celi brojevi i

$$x_{n+1} = 2x_n - 9x_{n-1}, \quad \text{za} \quad n \geq 1.$$

Odrediti potreban i dovoljan uslov na a i b, pri kome postoji član datog niza koji je deljiv sa 7.

2. Neka je

$$f(x) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}\,x + \sqrt{2-\sqrt{2}}}{-\sqrt{2-\sqrt{2}}\,x + \sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

Odrediti

$$\underbrace{f(f(\ldots(f}_{1987\text{ puta}}(x))\ldots).$$

3. U prostoru su date prave a, b i c, tako da nikoje dve nisu međusobno paralelne i da postoje ravni α, β i γ, tako da važi:

$$a \subset \alpha, \quad b \subset \beta, \quad c \subset \gamma, \quad \alpha \perp \beta, \quad \beta \perp \gamma, \quad \gamma \perp \alpha.$$

Konstruisati tačku preseka ravni α, β i γ. (Konstrukcija u prostoru dozvoljava postavljanje pravih, ravni i sfera i translaciju za proizvoljan vektor.)

DVADESETDEVETO SAVEZNO TAKMIČENJE
Sinj, 1988.

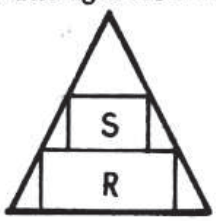
1. Razred

1. Ako je n prirodan broj veći od 1, za koji važi

$$\left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{n}\right] = 2 + \left[\frac{n-1}{1}\right] + \left[\frac{n-1}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{n-1}{n-1}\right],$$

onda je n prost broj. Dokazati.

2. Izračunati uglove trougla ABC, ako težišna duž, simetrala ugla i visina iz temena C dele ugao ACB na četiri jednaka dela.



Sl. 7.

3. U dati oštrougli trougao T upisana su dva pravougaonika R i S, kao na slici 7. Odrediti najveću mogućnu vrednost izraza

$$\frac{P_R + P_S}{P_T},$$

gde P označava površinu.

4. Međunarodnoj konferenciji prisustvuju po dva predstavnika iz 27 zemalja. Dokazati da se učesnici konferencije ne mogu poređati za okruglim stolom, tako da između svake dvojice učesnika, koji su predstavnici iste zemlje, sedi tačno 9 drugih učesnika konferencije.

2. RAZRED

1. Neka je O centar opisanog kruga trougla ABC. Označimo sa P, Q, R redom središta lukova AB, BC, CA, koji ne sadrže redom tačke C, A, B. Ako za tačku X važi

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR},$$

dokazati da je X centar upisanog kruga trougla ABC.

2. Odrediti za koje neparne prirodne brojeve $n \geq 3$ je funkcija

$$f : \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}, \quad f(x) = x^n - 2x$$

injektivna.

3. Za skup $A \subset \mathbf{N}$ kažemo da je „dobar", ako za neki prirodan broj n jednačina $x - y = n$ ima beskonačno mnogo rešenja (x, y), gde $x \in A$, $y \in A$. Ako je $\mathbf{N} = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{1989}$, onda je bar jedan od skupova $A_1, A_2, \ldots, A_{1988}$ „dobar". Dokazati.

4. Dokazati da unutar konveksnog $2n$-tougla ne postoje dve različite tačke kroz koje prolazi po n dijagonala tog $2n$-tougla.

3. i 4. RAZRED

1. Neka $a, b, c, d \in \mathbf{N}_0$ i $d \neq 0$. Funkcija $f : \mathbf{N}_0 \to \mathbf{N}_0$ određena je uslovom

$$f(x) = \left[\frac{ax + b}{cx + d}\right].$$

Dokazati da je f injektivna, ako i samo ako je $c = 0$ i $a \geq d$. ($\mathbf{N}_0$ je oznaka za skup nenegativnih celih brojeva.)

2. U n-tostranu piramidu može se upisati sfera. Svaku od bočnih strana piramide zarotiramo oko odgovarajuće ivice osnove do poklapanja sa ravni osnove, tako da slika bočne strane ima zajedničkih unutrašnjih tačaka sa osnovom. Na taj način je dobijeno n slika vrha piramide. Dokazati da tih n slika pripadaju jednom krugu.

3. Dat je strogo rastući niz $a_1, a_2, a_3, \ldots$ prirodnih brojeva, tako da je $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ i da za sve uzajamno proste brojeve m i n važi $a_m a_n = a_{mn}$. Dokazati da za svaki prirodan broj n važi $a_n = n$.

4. U jednoj državi ima više od 7 gradova. Dokazati da ne postoji mreža jednosmernih puteva sa sledećim osobinama:

a) Između svaka dva grada postoji tačno jedan direktan put.

b) Za svaka dva grada A i B postoji tačno jedan grad u koji se direktno može stići i iz A i iz B.

c) Za svaka dva grada A i B postoji tačno jedan grad iz koga se direktno može stići i u A i u B.

TRIDESETO SAVEZNO TAKMIČENJE
SKOPLJE, 1989.

1. RAZRED

1. Neka za pozitivne brojeve x, y, z važi $x + y + z = 1$. Dokazati da je

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) \geq 64.$$

Kada važi jednakost?

2. Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_{1990}$ prirodni brojevi za koje važi

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{1989}^2 = x_{1990}^2.$$

Dokazati da su bar dva od tih brojeva parni.

3. Konstruisati trougao ABC, kod koga je stranica BC jednaka datoj duži a, stranica CA jednaka datoj duži b i $\angle CAB = 3\angle ABC$.

4. Odrediti sve prirodne brojeve n za koje važi jednakost

$$[\sqrt[3]{1}] + [\sqrt[3]{2}] + \cdots + [\sqrt[3]{n}] = 2n.$$

2. RAZRED

1. Dat je polukrug nad prečnikom AB i na njemu tačke C i D, tako da važi:
   a) Tačka C pripada luku AD;
   b) $\angle CSD$ je prav, gde je S središte duži AB.

Neka je E presek pravih AC i BD, a F presek pravih AD i BC. Dokazati da vektor $\overrightarrow{EF}$ ne zavisi od izbora tačaka C i D.

2. Ako je $a \geq 1$, $b \geq 1$, $c \geq 1$, dokazati da je

$$\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1} \leq \sqrt{c(ab+1)}.$$

Kada važi jednakost?

3. Odrediti sve trojke (x, y, z) celih brojeva za koje važi $x^y - 2^z = 1$.

4. Dati su uzajamno prosti prirodni brojevi m i n. U svakom polju beskonačne šahovske table zapisan je po jedan realan broj, tako da važi: zbir brojeva u svakom pravougaoniku $m \times n$ ili $n \times m$jednak je nuli. Dokazati da su bar dva od zapisanih brojeva međusobno jednaki.

3. i 4. Razred

1. Naći sve četvorke (x_1, x_2, x_3, x_4) pozitivnih brojeva za koje važi

$$\begin{aligned} x_1 + x_2^2 + x_3^3 &= 3, \\ x_2 + x_3^2 + x_4^3 &= 3, \\ x_3 + x_4^2 + x_1^3 &= 3, \\ x_4 + x_1^2 + x_2^3 &= 3. \end{aligned}$$

2. Neka je $P(x)$ polinom sa realnim koeficijentima takav da za svako realno x važi $P(x) \geq 0$. Dokazati da postoje polinomi $Q(x)$ i $R(x)$ sa realnim koeficijentima, takvi da za svako realno x važi

$$P(x) = Q^2(x) + R^2(x).$$

3. Koliko ima uređenih trojki (A, B, C) za koje važi

a) $A \cup B \cup C = \{1, 2, \ldots, n\}$,

b) $A \cap B \cap C = \emptyset$,

c) $A \cap B \neq \emptyset$.

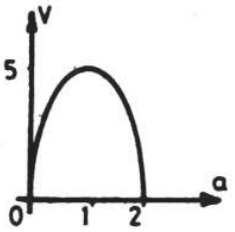
4. Data je kocka $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Da li postoji prava koja seče svaku od pravih AB, CC_1, A_1D_1, DB_1?

R E Š E NJ A

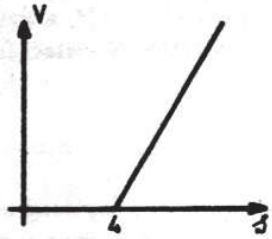
60.3.1. Neka su osnovne ivice kvadra a i b. Tada je $a+b=2$, pa za zapreminu kvadra dobijamo

$$V = 5ab = 5a(2-a) = 10a - 5a^2,$$

pri čemu je $0 < a < 2$. Maksimum te funkcije postignut je za $a = 1$ i iznosi $V = 5$; grafik je prikazan na sl. 8.



Sl. 8.

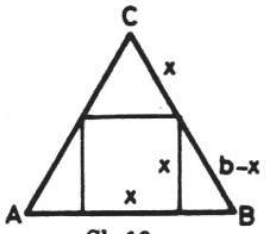


Sl. 9.

Označimo sa s obim osnove. Tada je, za $a = 2$ i $h = 5$, $s = 4 + 2b$, odakle je $b = (s-4)/2$ i

$$V = 10b = 5(s-4) = 5s - 20,$$

pri čemu je $s > 4$; grafik te funkcije prikazan je na sl. 9.



Sl. 10.

60.3.2. Neka je x ivica kocke za koju važe uslovi zadatka i α ravan „gornje" osnove kocke, tj. ravan koja sadrži 4 temena kocke koja pripadaju bočnim stranama. Označimo sa A, B i C tačke preseka ravni α sa bočnim ivicama piramide i $b = AB$. Tada je

$$v : (v - x) = a : b \quad \text{i} \quad \frac{(b-x)\sqrt{3}}{2} = x.$$

Eliminacijom b iz ovih jednakosti lako dobijamo

$$x = \frac{\sqrt{3}av}{\sqrt{3}a + (2+\sqrt{3})v}.$$

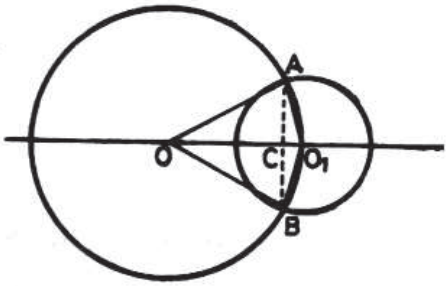
60.3.3. Data nejednakost važi ako i samo ako je

$$0 < x^2 - 4x + 3 < 8.$$

Leva od ove dve nejednakosti važi za $x < 1$ ili $x > 3$, a desna za $-1 < x < 5$. Dakle, data nejednakost važi za $-1 < x < 1$ ili $3 < x < 5$.

60.3.4. Neka je $\alpha = \angle AOB$. Tada je u jednakokrakom trouglu O_1AO ($AO = OO_1 = R$, $O_1A = R/2$) ugao pri vrhu $\alpha/2$, pa je $\sin\frac{\alpha}{4} = \frac{R/4}{R} = \frac{1}{4}$. Znači,

$$\angle AOB = \alpha = 4\arcsin\frac{1}{4} \approx 1{,}0107.$$



Sl. 11.

Označimo sa C presek pravih AB i OO_1. Kako je $\angle CAO_1 = \alpha/4$, to je $O_1C = O_1A \cdot \sin\alpha/4 = R/8$ i $OC = 7R/8$. Tražena zapremina jednaka je zbiru zapremina dva loptina odsečka — prvi ima poluprečnik $O_1A = R/2$ i rastojanje od centra lopte $O_1C = R/8$, a drugi ima poluprečnik $OA = R$ i rastojanje od centra lopte $OC = 7R/8$. Koristeći formulu

$$V_0 = \pi\left(\frac{2}{3}R^3 - R^2x + \frac{1}{3}x^3\right)$$

za zapreminu loptinog odsečka poluprečnika R i rastojanja od centra lopte x, dobijamo da je tražena zapremina

$$V = \frac{13}{192}\pi R^3.$$

60.3.5. Elementarnim transformacijama dobijamo:

$$\begin{aligned}&(1-\cos b\cos c)^2 - 2(1-\cos b\cos c) - \sin^2 b\sin^2 c + \sin^2 b + \sin^2 c\\ &= 1 - 2\cos b\cos c + \cos^2 b\cos^2 c - 2 + 2\cos b\cos c - \sin^2 b\sin^2 c + \sin^2 b + \sin^2 c\\ &\qquad = -1 + (1-\sin^2 b)(1-\sin^2 c) - \sin^2 b\sin^2 c + \sin^2 b + \sin^2 c = 0.\end{aligned}$$

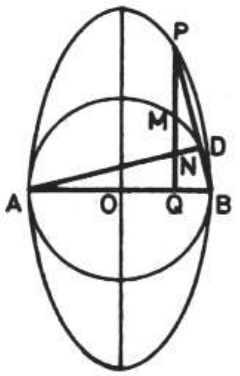
60.4.1. Dati proizvod je oblika $(x^3-1)x^3(x^3+1)$, gde je x ceo broj. Ako je x paran broj, onda je x^3, a sa njim i dati proizvod deljiv sa $2^3 = 8$; ako je x neparan broj, onda su x^3-1 i x^3+1 dva uzastopna parna broja, pa je njihov proizvod deljiv sa 8. Dakle, dati proizvod je deljiv sa 8.

Ako $3 \mid x$, onda $9 \mid x^3$; ako je $x \equiv 1 \pmod 3$, onda $9 \mid x^3 - 1$, a ako je $x \equiv -1 \pmod 3$, onda $9 \mid x^3 + 1$. Dakle, u svakom slučaju, $9 \mid (x^3-1)x^3(x^3+1)$.

Najzad, dokažimo da je dati proizvod deljiv sa 7. U sledećoj tablici dati su ostaci pri deljenju sa 7 navedenih brojeva:

x	x^2	x^3	x^3-1	x^3+1
0	0	0	6	1
1	1	1	0	2
2	4	1	0	2
3	2	6	5	0
4	2	1	0	1
5	4	6	5	0
6	1	6	5	0

Dakle, u svakom slučaju je jedan od brojeva x^3-1, x^3, x^3+1 deljiv sa 7, pa je takav i njihov proizvod.



Sl. 12.

60.4.2. Izaberimo koordinatni sistem tako da je tačka O koordinatni početak, a tačke A i B pripadaju x-osi i imaju koordinate $(-r,0)$, odnosno $(r,0)$, sl. 12. Neka tačka M ima koordinate (x_0,y_0), pri čemu je $x_0^2+y_0^2=r^2$ i $x_0\neq\pm r$. Tada tačka N ima koordinate $(x_0,y_0/2)$. Kako je $\angle QAN = \angle BAD = 90^\circ-\angle DBA = 90^\circ-\angle PBQ = \angle QPB$, to su pravougli trouglovi ANQ i PBQ slični, pa je

$$PQ=\frac{AQ\cdot BQ}{NQ}=\frac{(r+x_0)(r-x_0)}{y_0/2}=2y_0.$$

Dakle, tačka P ima koordinate $(x_0,2y_0)$, pa pripada elipsi

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{4r^2}=1.$$

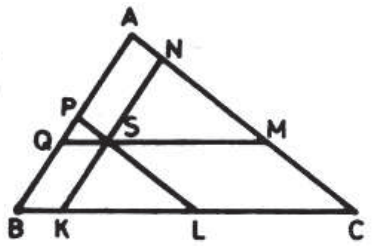
Lako je proveriti da se svaka tačka te elipse, osim tačaka $A(-r,0)$ i $B(r,0)$, može dobiti na opisani način.

60.4.3. Treba odrediti ceo broj x ($x\neq 0,-1$), takav da je

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x(x+1)}=0,0\dot{a}=\frac{a}{90},$$

tj. $x(x+1)=90/a$, gde je $a\in\{1,\dots,9\}$. Desna strana poslednje jednakosti uzima celobrojne vrednosti 90, 45, 30, 18, 15, 10 za a jednako, redom, 1, 2, 3, 5, 6, 9. Međutim, od tih šest brojeva samo se 90 i 30 mogu prikazati kao proizvod dva uzastopna cela broja: $90=9\cdot 10=-10\cdot(-9)$, $30=5\cdot 6=-6\cdot(-5)$. Dakle, tražene vrednosti za a su 1 i 3 (odgovarajuće vrednosti za x su 9 i -10, odnosno 5 i -6).

60.4.4. Označimo temena datog trougla sa A, B, C, tačku u unutrašnjosti sa S, a presečne tačke pomenutih pravih sa stranicama kao na sl. 13. Jasno je da su trouglovi PQS, NSM i SKL slični trouglu ABC; označimo sa k_1, k_2 i k_3 odgovarajuće koeficijente sličnosti. Važi:



Sl. 13.

$$\frac{BK}{BC} = \frac{QS}{BC} = k_1, \quad \frac{LC}{BC} = \frac{SM}{BC} = k_2, \quad \frac{KL}{BC} = k_3,$$

što, zbog $BK + LC + KL = BC$, daje $k_1 + k_2 + k_3 = 1$. S druge strane, ako sa s označimo površinu trougla ABC, imamo:

$$\frac{s_1}{s} = k_1^2, \quad \frac{s_2}{s} = k_2^2, \quad \frac{s_3}{s} = k_3^2,$$

odnosno

$$\sqrt{\frac{s_1}{s}} = k_1, \quad \sqrt{\frac{s_2}{s}} = k_2, \quad \sqrt{\frac{s_3}{s}} = k_3.$$

Zato je $\sqrt{s_1} + \sqrt{s_2} + \sqrt{s_3} = \sqrt{s}$, odnosno $s = (\sqrt{s_1} + \sqrt{s_2} + \sqrt{s_3})^2$.

60.4.5. a) Očigledno je da sve krive date familije prolaze kroz tačke $A(-2, 0)$ i $B(0, 4)$.

b) Osu Ox dodiruje kriva $y = (x+2)^2$ (dobija se za $m = 2$), a teme u tački B ima kriva $y = -x^2 + 4$ (dobija se za $m = 0$).

61.3.1. Na osnovu Vietovih formula dobijamo $x_1 + x_2 = -k$, $x_1x_2 = 1$. Dalje je

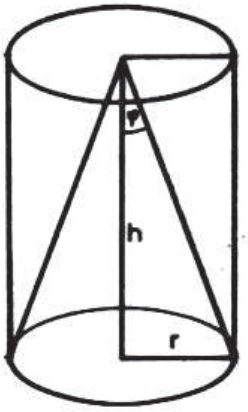
$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 = \frac{x_1^4 + x_2^4}{(x_1x_2)^2} = [(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2]^2 - 2x_1^2x_2^2$$
$$= (k^2-2)^2 - 2 = k^2(k^2-4) + 2.$$

Nejednakost $(x_1/x_2)^2 + (x_2/x_1)^2 > 2$ važi ako i samo ako je $k^2 > 4$, tj. ako i samo ako $k \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

61.3.2. Neka je $\log_2 x = t$. Primetimo da t raste od 0 do 6 kada x raste od 1 do 64. Dalje je

$$\log_2^4 x + 12\log_2^2 x \cdot \log_2\left(\frac{8}{x}\right) = \log_2^4 x + 12\log_2^2 x \cdot (3 - \log_2 x)$$
$$= t^4 - 12t^3 + 36t^2 = [t(t-6)]^2.$$

Funkcija $\varphi(t) = t(t-6)$ uzima negativne vrednosti za $0 < t < 6$ i dostiže minimum u tački $t = 3$. Zato je maksimum datog izraza jednak $(\varphi(3))^2 = 81$.



Sl. 14.

61.3.3. Neka su r i h, redom, poluprečnik osnove valjka i njegova visina. Tada su površine valjka i kupe redom jednake

$$P_1 = 2\pi rh + 2r^2\pi, \quad P_2 = r\pi\sqrt{r^2+h^2} + r^2\pi.$$

Iz uslova $P_1/P_2 = 7/4$ redom dobijamo

$$\begin{aligned} 8h + 8r &= 7\sqrt{h^2+r^2} + 7r, \\ 48r^2 - 16rh - 15h^2 &= 0, \\ 48\left(\frac{r}{h}\right)^2 - 16\frac{r}{h} - 15 &= 0 \end{aligned}$$

i konačno $r/h = 3/4$. Ako sa φ označimo traženi ugao (sl. 14), onda je $\operatorname{tg}\varphi = r/h = 3/4$, pa sledi $\varphi = \operatorname{arctg} 3/4$.

61.3.4. Neka je kc visina pravougaonika konstruisanog nad stranicom dužine c, pri čemu je $k > 0$. Postoje sledeće četiri mogućnosti za visine pravougaonika koji su konstruisani redom nad stranicama dužine a i b:

$$1^\circ\ ka,\ kb; \quad 2^\circ\ ka,\ \frac{b}{k}; \quad 3^\circ\ \frac{a}{k},\ kb; \quad 4^\circ\ \frac{a}{k},\ \frac{b}{k}.$$

Dovoljno je (u svakom od tih slučajeva) odrediti vrednost koeficijenta k. Uslov zadatka u navedenim slučajevima prima oblik:

$$\begin{aligned} 1^\circ\ kc^2 &= ka^2 + kb^2 + m^2, \\ 2^\circ\ kc^2 &= ka^2 + \frac{b^2}{k} + m^2, \\ 3^\circ\ kc^2 &= \frac{a^2}{k} + kb^2 + m^2, \\ 4^\circ\ kc^2 &= \frac{a^2}{k} + \frac{b^2}{k} + m^2. \end{aligned}$$

Ako je $c^2 > a^2 + b^2$, onda u slučaju 1° dobijamo rešenje $k = \dfrac{m^2}{c^2 - a^2 - b^2}$. U slučajevima 2°, 3° i 4° k je pozitivno rešenje redom sledećih jednačina

$$\begin{aligned} (c^2 - a^2)k^2 - m^2k - b^2 &= 0, \\ (c^2 - b^2)k^2 - m^2k - a^2 &= 0, \\ c^2k^2 - m^2k - a^2 - b^2 &= 0. \end{aligned}$$

Prema tome, ako je $c^2 > a^2 + b^2$, onda postoje četiri rešenja, a ako je $c^2 \le a^2 + b^2$, onda postoje tri rešenja.

61.4.1. (a) $S_n = a_1+a_2+\cdots+a_n = n\dfrac{c^2-2}{2}+\dfrac{1}{2}(1+2+\cdots+n) = \dfrac{n}{4}(2c^2+n-3)$.
(b) Brojilac zbira S_c, za $c = 10k+1$, jednak je

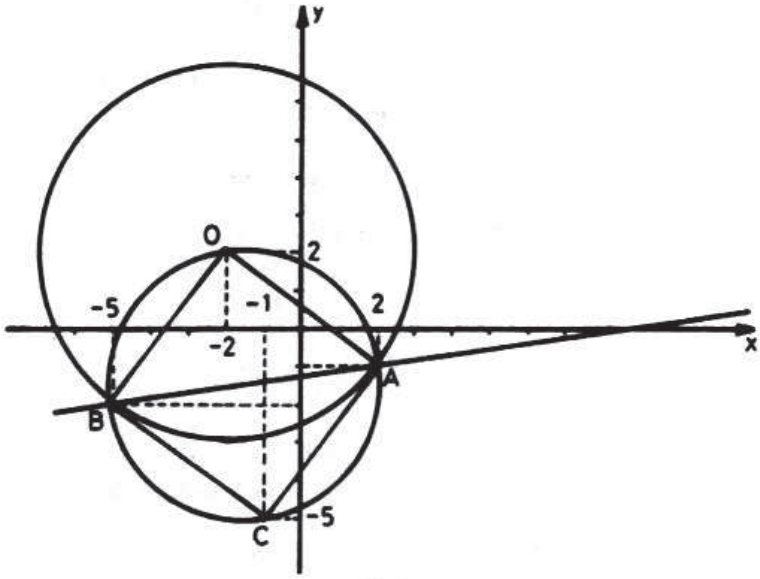
$$(10k+1)[2(10k+1)^2+10k+1-3] = 25k(10k+1)(8k+2).$$

61.4.2. Neka je k krug poluprečnika r sa centrom u koordinatnom početku i neka su A, B, C tačke tog kruga sa kordinatama, redom:

$$\left(\frac{r}{2}, \frac{r\sqrt{3}}{2}\right), \quad (-r,0), \quad \left(\frac{r}{2}, -\frac{r\sqrt{3}}{2}\right).$$

Proizvoljna tačka X kruga k ima koordinate (rx, ry), gde je $x^2+y^2=1$. Tada je

$$XA^2+XB^2+XC^2 = \left(rx-\frac{r}{2}\right)^2+\left(ry-\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2+(rx+r)^2+r^2y^2$$
$$+\left(rx-\frac{r}{2}\right)^2+\left(ry+\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3(x^2+y^2)r^2+3r^2 = 6r^2.$$



Sl. 15.

61.4.3. Jednačinu datog kruga k možemo zapisati u obliku

$$(x+2)^2+(y-2)^2 = 25.$$

Centar kruga je tačka $O(-2,2)$. Jednačina

$$\frac{|-2-2(\lambda+2)-\lambda-4|}{\sqrt{1+(\lambda+2)^2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}$$

ima dva rešenja: $\lambda_1=5$ i $\lambda_2=-15/7$. Prava $x-7y-9=0$ seče krug k u tačkama $A(2,-1)$ i $B(-5,-2)$, sl. 15. Jednačine tangenti na krug k u tačkama A i B su, redom:

$$y+1=\frac{4}{3}(x-2) \qquad \text{i} \qquad y+2=-\frac{3}{4}(x+5).$$

Presek tih tangenti je tačka $C(-1,-5)$. Primetimo da je četvorougao $AOBC$ kvadrat stranice 5. Tražena površina jednaka je

$$\frac{5^2\pi}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{50}{4}\pi-25\right)=\frac{25}{2}(\pi-1).$$

61.4.4. Primetimo prvo da pozitivni brojevi a, b i c mogu biti dužine stranica trougla ako i samo ako je

$$a+b>c, \quad b+c>a, \quad c+a>b.$$

Označimo $p=x$, $q=1-x$, $a^2p+b^2q-c^2pq=f(x)=c^2x^2+(a^2-b^2-c^2)x+b^2$. Diskriminanta kvadratnog trinoma $f(x)$ je

$$D=(a^2-b^2-c^2)^2-4b^2c^2=-(a+b+c)(a+c-b)(a+b-c)(b+c-a).$$

Nejednakost $f(x)>0$ važi za svaki realan broj x ako i samo ako je $D<0$, tj. ako i samo ako je

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)>0. \tag{1}$$

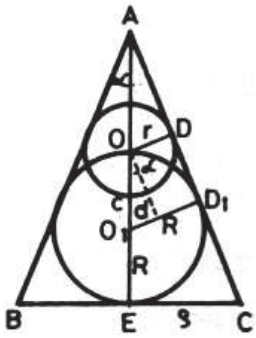
Lako se vidi da za pozitivne brojeve a, b i c može biti negativan najviše jedan od brojeva $a+b-c$, $b+c-a$, $c+a-b$. Nejednakost (1) važi ako i samo ako je

$$a+b>c, \quad b+c>a, \quad c+a>b.$$

62.3.1. Za sve $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, zbog $a>0$, važi:

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) &= a\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+b\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+c\\
&= a\frac{x_1^2+2x_1x_2+x_2^2}{4}+b\frac{x_1+x_2}{2}+c\\
&= a\frac{2x_1^2+2x_2^2-(x_1^2-2x_1x_2+x_2^2)}{4}+b\frac{x_1+x_2}{2}+c\\
&\le a\frac{x_1^2+x_2^2}{2}+b\frac{x_1+x_2}{2}+c\\
&= \frac{(ax_1^2+bx_1+c)+(ax_2^2+bx_2+c)}{2}\\
&= \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.
\end{aligned}$$

Jednakost važi ako i samo ako je $x_1=x_2$.



Sl. 16.

62.3.2. Neka je ABC fiksirani osni presek date kupe (A je vrh kupe). Označimo sa O i O_1 središta datih lopti, sa D i D_1 njihove dodirne tačke (koje pripadaju posmatranom preseku) sa kupom, sa E središte njene osnove i sa α ugao izvodnice prema visini kupe (sl. 16). Iz pravouglog $\triangle AOD$ dobijamo $r/AO = \sin\alpha$, a iz pravouglog trapeza O_1D_1DO da je $d/c = \sin\alpha$. Odatle sledi $r/AO = d/c$, tj. $AO = cr/d$. Zato je visina kupe

$$h = AO + OO_1 + O_1E = \frac{cr}{d} + c + R = \frac{c(r+d) + Rd}{d} = R\frac{c+d}{d}.$$

Ako sa ρ označimo poluprečnik osnove kupe, iz trougla AEC dobijamo

$$\rho = h\,\mathrm{tg}\,\alpha = R\frac{c+d}{d}\frac{d/c}{\sqrt{1-d^2/c^2}} = R\frac{c+d}{\sqrt{c^2-d^2}}.$$

Zato je zapremina kupe

$$V = \frac{1}{3}\pi\rho^2 h = \frac{\pi R^3}{3}\cdot\frac{(c+d)^2}{d(c-d)},$$

a njen odnos prema zapremini veće lopte

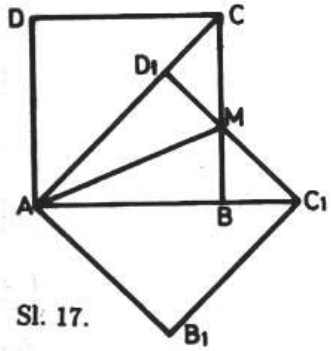
$$V : \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{(c+d)^2}{4d(c-d)}.$$

Da bi taj odnos bio veći ili jednak 2, neophodno je i dovoljno da važi $(c+d)^2 \geq 8d(c-d)$, što je ekvivalentno sa $(c-3d)^2 \geq 0$.

Jednakost važi ako i samo ako je $c = 3d$. Tada je $\rho = R\sqrt{2}$, $h = 4R$, pa je izvodnica takve kupe jednaka $\sqrt{h^2+\rho^2} = 3R\sqrt{2}$, a površina $\pi R\sqrt{2}(R\sqrt{2} + 3R\sqrt{2}) = 8\pi R^2$.

62.3.3. Trougao MBC_1 je jednakokrako pravougli (sl. 17), pa je $MB = BC_1 = AC_1 - AB = a(\sqrt{2}-1)$. Iz pravouglog trougla ABM dobijamo:

$$AM^2 = AB^2 + MB^2 = a^2 + a^2(\sqrt{2}-1)^2 = 2a^2(2-\sqrt{2}).$$



Sl. 17.

62.3.4. Ako jednakost $f(x_1) = 0$ pomnožimo sa $\sin x_2$, a jednakost $f(x_2) = 0$ pomnožimo sa $\sin x_1$ i tako dobijene relacije saberemo, dobijamo $A\sin(x_2 - x_1) = 0$. Kako je $x_2 - x_1 \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, sledi da je $A = 0$. Slično se dobija i $B = 0$.

62.4.1. Opšti član datog niza jednak je $a_n(x) = \log(x^{1/2^n}) = \frac{1}{2^n}\log x$, pa je

$$\frac{a_n(x)}{a_{n-1}(x)} = \frac{(\log x)/2^n}{(\log x)/2^{n-1}} = \frac{1}{2}$$

i taj niz je geometrijski (za $\log x = 0$ je $a_n(x) \equiv 0$). Zbir odgovarajućeg reda je

$$S(x) = \frac{a_0(x)}{1-1/2} = 2\log x.$$

Skiciranje grafika te funkcije prepuštamo čitaocu.

62.4.2. Jednostavnim trigonometrijskim transformacijama dokazuje se da je

$$y_1 = \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3+\cos 4x}{4},$$
$$y_2 = \sin^6 x + \cos^6 x = \frac{5+3\cos 4x}{8}.$$

Zato te funkcije imaju osnovni period jednak $2\pi/4 = \pi/2$ i važi $3y_1 - 2y_2 = 1$.

Jednačina $y_1 = y_2 + 1/16$ ekvivalentna je sa $\cos 4x = 1/2$, pa su joj rešenja $x = \pm\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

62.4.3. Neka je c dužina nepoznate stranice i $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Iz uslova zadatka, primenjujući Heronov obrazac, dobijamo

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{1}{2}c^2,$$

što posle kvadriranja i sređivanja daje sledeću jednačinu po nepoznatoj c:

$$5c^4 - 2(a^2+b^2)c^2 + (a^2-b^2)^2 = 0.$$

Diskriminanta ove jednačine je

$$D = -4(a^4 - 3a^2b^2 + b^4) = -4\left(a^2 - \frac{3+\sqrt{5}}{2}b^2\right)\left(a^2 - \frac{3-\sqrt{5}}{2}b^2\right)$$

i nenegativna je ako i samo ako je

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \le \frac{a}{b} \le \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Tada ta jednačina ima rešenja $c^2 = \frac{1}{5}(a^2+b^2 \pm \sqrt{D})$ (u slučaju kada je $a = b$, jedno od rešenja je jednako nuli, pa otpada; u slučajevima kada je $D = 0$ rešenja se poklapaju).

62.4.4. Traženo geometrijsko mesto je jedan od konusnih preseka: elipsa ako je $e < 1$, parabola ako je $e = 1$ i hiperbola ako je $e > 1$. Dokaz te činjenice može se naći u svakom udžbeniku analitičke geometrije (negde se navedeni uslov uzima za definicioni za pojam konusnog preseka).

63.3.1. Neka je $p^2 \geq 4q$ (jedino u tom slučaju data jednačina ima realnih rešenja), $\lambda > 0$ i $x = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$. Tada je

$$x - \frac{4q - (p+\lambda)^2}{4\lambda} = \frac{(\lambda \pm \sqrt{p^2 - 4q})^2}{4\lambda} \geq 0.$$

63.3.2. Data nejednačina ekvivalentna je nejednačini

$$\frac{(x-3a)(x+2a)}{(x-a)(x+a)} > 0.$$

Skup rešenja te nejednačine je

$$\begin{aligned} &(-\infty, 0) \cup (0, +\infty), && \text{ako je } a = 0,\\ &(-\infty, 2a) \cup (-a, a) \cup (3a, +\infty), && \text{ako je } a > 0,\\ &(-\infty, 3a) \cup (a, -a) \cup (-2a, +\infty), && \text{ako je } a < 0. \end{aligned}$$

63.3.3. Primetimo da za $0 < \varphi < \pi$ važi $\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}}$. Koristeći tu formulu dobijamo

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{y}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{z}{2} &= \frac{1-\cos x}{1+\cos x} + \frac{1-\cos y}{1+\cos y} + \frac{1-\cos z}{1+\cos z}\\ &= \frac{b+c-a}{b+c+a} + \frac{a+c-b}{a+c+b} + \frac{a+b-c}{a+b+c} = 1, \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}\operatorname{tg}\frac{z}{2} = \sqrt{\frac{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{(a+b+c)^3}}. \tag{1}$$

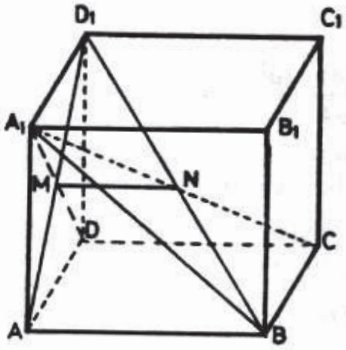
Na osnovu kosinusne teoreme dobijamo $\cos\alpha = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$. Dalje je

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{1 + \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}} = \frac{a^2-(b-c)^2}{(b+c)^2-a^2} = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{(b+c-a)(b+c+a)}.$$

Slične formule važe i za $\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}$ i $\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}$. Na osnovu tih formula lako sledi

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{(a+b+c)^3}}. \tag{2}$$

Iz jednakosti (1) i (2) lako sledi $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\operatorname{tg}\dfrac{y}{2}\operatorname{tg}\dfrac{z}{2} = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}$.



Sl. 18.

63.3.4. Neka je A_1ABCD data piramida (sa osnovom $ABCD$), zatim $ABCDA_1B_1C_1D_1$ paralelepiped (sa ivicama BB_1, CC_1, DD_1), V zapremina tog paralelepipeda i M i N redom središta duži A_1D i A_1C (sl. 18). Tada je

$$V_{A_1ABCD} = \frac{1}{3}V,$$

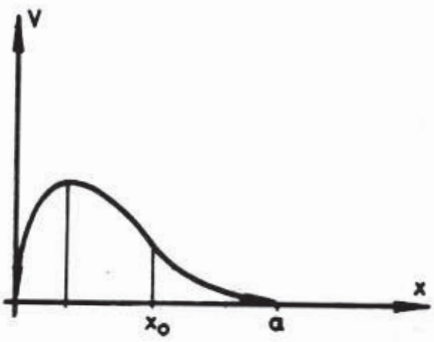
$$V_{A_1ABNM} = V_{D_1A_1AB} - V_{D_1A_1MN}$$
$$= \frac{1}{6}V - \frac{1}{24}V = \frac{3}{24}V = \frac{3}{8}V_{A_1ABCD}.$$

Prema tome, ravan $ABNM$ deli zapreminu piramide A_1ABCD u odnosu 5:3.

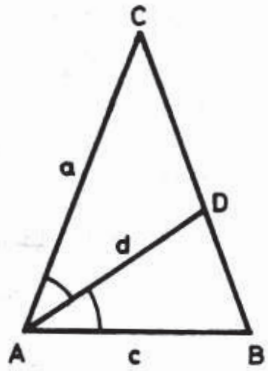
63.4.1. a) Dobija se piramida čija je osnova kvadrat sa dijagonalom $2a - 2x$. Lako se dobija da su bočna ivica i visina piramide redom jednake $\sqrt{a^2 + x^2}$ i $\sqrt{2ax}$. Zapremina piramide je

$$V(x) = \frac{1}{3}\frac{(2a-2x)^2}{2}\sqrt{2ax} = \frac{2\sqrt{2a}}{3}\sqrt{x}(a-x)^2,$$

pri čemu je $0 < x < a$.



Sl. 19.



Sl. 20.

b) Odredimo izvod funkcije $V(x)$:

$$V'(x) = \frac{2\sqrt{2a}}{3}\frac{(a-x)(a-5x)}{2\sqrt{x}} \quad \begin{cases} > 0, & \text{ako je } 0 < x < a/5, \\ = 0, & \text{ako je } x = a/5, \\ < 0, & \text{ako je } a/5 < x < a. \end{cases}$$

Prema tome, funkcija $V(x)$ raste na intervalu $(0, a/5)$ i opada na intervalu $(a/5, a)$, a u tački $x = a/5$ ima maksimum.

c) Drugi izvod funkcije V je

$$V''(x) = \frac{2\sqrt{2a}}{3}\frac{15x^2 - 6ax - a^2}{4x\sqrt{x}}, \quad 0 < x < a.$$

Kvadratni trinom $15x^2 - 6ax - a^2$ ima u intervalu $(0, a)$ nulu $x_0 = \frac{3+\sqrt{24}}{15}a$. To je prevojna tačka funkcije V čiji je grafik dat na sl. 19.

63.4.2. Neka je ABC jednakokraki trougao sa osnovicom AB i neka je D presek simetrale ugla A sa krakom BC, sl. 20. Tada je

$$\frac{BD}{DC} = \frac{c}{a} \quad \text{i} \quad BD + DC = a,$$

odakle lako dobijamo $BD = \frac{ca}{a+c}$, $DC = \frac{a^2}{a+c}$. Na osnovu kosinusne teoreme imamo

$$\left(\frac{a^2}{a+c}\right)^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\frac{A}{2},$$

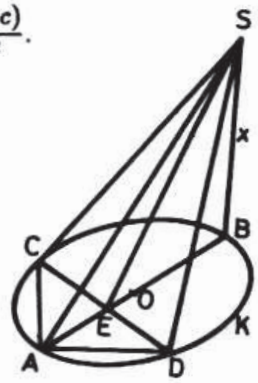
$$\left(\frac{ac}{a+c}\right)^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\frac{A}{2}.$$

Eliminacijom $\cos\frac{A}{2}$ lako dobijamo $d^2 = \frac{c^2a(2a+c)}{(a+c)^2}$.

63.4.3. a) Neka je E presek ravni β i prave AB. Trougao SEB je pravougli, pri čemu je $\angle SBE = \pi/2$, $\angle SEB = \pi/3$, pa odatle lako sledi $BE = x/\sqrt{3}$. Tačka E je unutrašnja tačka duži AB (tj. krug K i ravan β imaju dve zajedničke tačke) ako i samo ako je $0 < x < 2R\sqrt{3}$.

b) Neka je $0 < x < 2R\sqrt{3}$ i neka je O centar kruga K. Tada je

$$OE = |BE - BO| = \left|\frac{x}{\sqrt{3}} - R\right|.$$



Sl. 21.

Primetimo da su trouglovi CEO, CEA, SBE, SBA, SEC pravougli sa pravim uglom redom kod temena E, E, B, B, E, sl. 21. Na osnovu Pitagorine teoreme redom dobijamo

$$CE^2 = CO^2 - OE^2 = R^2 - \left(\frac{x}{\sqrt{3}} - R\right)^2 = \frac{2Rx}{\sqrt{3}} - \frac{x^2}{3},$$

$$AC^2 = AE^2 + CE^2 = \left(2R - \frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{2Rx}{\sqrt{3}} - \frac{x^2}{3} = 4R^2 - \frac{2Rx}{\sqrt{3}},$$

$$SC^2 = SE^2 + CE^2 = SB^2 + BE^2 + CE^2 = x^2 + \frac{2Rx}{\sqrt{3}},$$

$$SC^2 + AC^2 = x^2 + 4R^2 = BS^2 + AB^2 = SA^2.$$

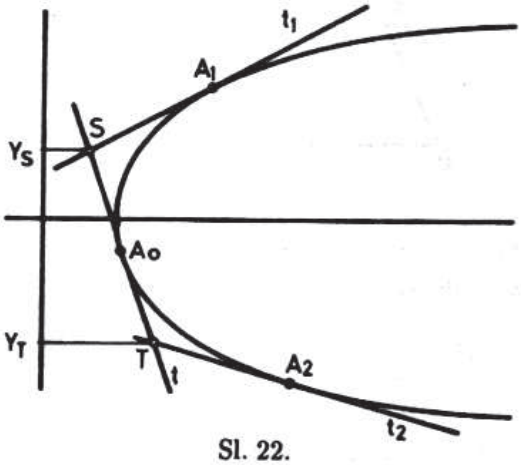
Prema tome i trougao SCA je pravougli sa pravim uglom kod temena C. Analogno se dokazuje da je ugao SDA prav.

c) $$y = SA^2 + SD^2 + AD^2 + SC^2 + AC^2 + CD^2 = 3 \cdot SA^2 + CD^2$$
$$= \frac{5}{3}x^2 + \frac{8R}{\sqrt{3}}x + 12R^2.$$

d) Koordinate temena dobijene parabole su $x = -\frac{4\sqrt{3}}{5}R$, $y = \frac{44}{5}R^2$, odakle eliminacijom parametra R dobijamo jednačinu geometrijskog mesta temena

$$y = \frac{55}{12}x^2, \quad x < 0.$$

(Razmatrali smo dobijenu kvadratnu funkciju kao funkciju koja je definisana na skupu svih realnih brojeva. Funkcija $y(x)$, $0 < x < 2R\sqrt{3}$, nema ekstremuma.)



Sl. 22.

63.4.4. Neka su $A_1(x_1, y_1)$ i $A_2(x_2, y_2)$ fiksirane tačke na datoj paraboli, $A_0(x_0, y_0)$ proizvoljna tačka te parabole, sl. 22. Tangente t_0, t_1, t_2 na parabolu redom u tačkama A_0, A_1, A_2 određene su redom jednačinama

$$x - x_0 = \frac{y_0}{p}(y - y_0),$$
$$x - x_1 = \frac{y_1}{p}(y - y_1),$$
$$x - x_2 = \frac{y_2}{p}(y - y_2).$$

Neka je $S(x_S, y_S)$ presek pravih t_0 i t_1, a $T(x_T, y_T)$ presek pravih t_0 i t_2. Lako se dobija da je

$$y_S = \frac{1}{2}(y_1 + y_0), \quad y_T = \frac{1}{2}(y_2 + y_0).$$

Kako je direktrisa parabole $y^2 = 2px$ paralelna y-osi, to je dužina projekcije duži ST na tu direktrisu jednaka

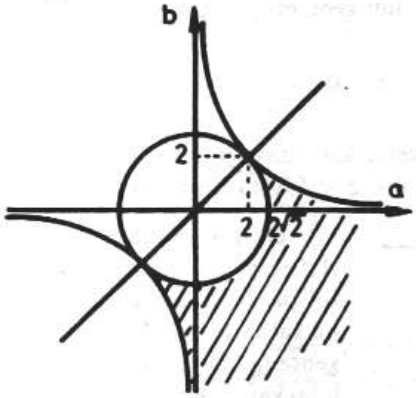
$$|y_S - y_T| = \frac{1}{2}|y_1 - y_2|$$

i ne zavisi od tačke A_0.

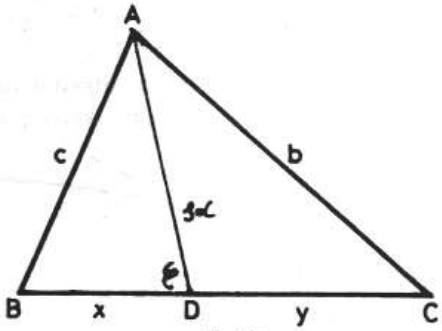
64.3.1. Iz date jednačine dobijamo

$$x^2 = a - b \pm \sqrt{a^2 + b^2 - 8}.$$

Da bi sva rešenja date jednačine bila realna neophodno je i dovoljno da je (a) $a^2 + b^2 \geq 8$ i (b) $a - b - \sqrt{a^2 + b^2 - 8} \geq 0$. Prvi uslov zadovoljavaju tačke u Oab ravni koje se nalaze izvan kruga $a^2 + b^2 = 8$ ili na njegovom rubu, a drugi uslov tačke za koje je $a \geq b$ i $ab \leq 4$, tj. tačke ispod prave $b = a$ i između dveju grana hiperbole $ab = 4$. Traženi skup tačaka prikazan je na sl. 23.



Sl. 23.



Sl. 24.

64.3.2. Dokažimo najpre da, ako su a, b, c dužine stranica datog trougla i $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ njegov poluobim, važi jednakost

$$s_a^2 = \frac{4bcs(s-a)}{(b+c)^2}. \tag{1}$$

U tom cilju označimo sa A, B i C temena trougla, sa D presek simetrale ugla kod A sa stranicom BC, sa x i y dužine odsečaka koje ta simetrala gradi na BC i $\varphi = \angle ADB$ (sl. 24). Iz relacija $x + y = a$ i $x : y = c : b$ dobija se $x = \frac{ac}{b+c}$, $y = \frac{ab}{b+c}$. S druge strane, primenjujući kosinusnu teoremu na trouglove ABD i ADC, imamo

$$c^2 = x^2 + s_a^2 - 2xs_a \cos\varphi,$$
$$b^2 = y^2 + s_a^2 + 2ys_a \cos\varphi.$$

Ako prvu od te dve relacije pomnožimo sa y, a drugu sa x i dobijene jednakosti saberemo, dobijamo

$$c^2y + b^2x = axy + as_a^2.$$

Zamenjujući vrednosti za x i y i rešavajući po s_a^2 dobijamo relaciju (1).

Iz dokazane relacije, s obzirom da je $bc \leq \left(\frac{b+c}{2}\right)^2$, sledi

$$s_\alpha \leq \sqrt{s(s-a)}.$$

Na sličan način se dokazuje da je

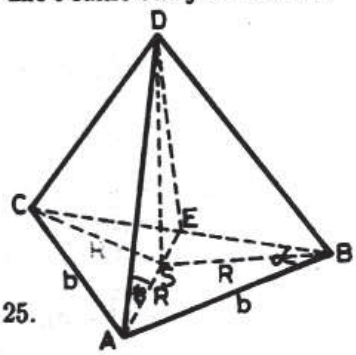
$$s_\beta \leq \sqrt{s(s-b)} \quad \text{i} \quad s_\gamma \leq \sqrt{s(s-c)}.$$

Zato je

$$rs_\alpha s_\beta s_\gamma \leq rs\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = p \cdot p = p^2.$$

Iz prethodnog izvođenja je jasno da jednakost važi ako i samo ako je $a = b = c$.

64.3.3. Označimo temena osnove piramide sa A, B, C (A je vrh), vrh piramide sa D, podnožje visine bočne strane BCD sa E, sl. 25. Neka je, dalje, krak osnove b, a poluprečnik njenog opisanog kruga R. Trouglovi DAS i DBS imaju prave uglove ASD, odnosno BSD, zajedničku stranicu SD i $\angle DAS = \angle DBS = \varphi$, pa su podudarni. Zato je $AS = BS$ i, slično, $AS = CS$, što znači da je S centar opisanog kruga osnove i $AS = BS = R = b/(2\sin\alpha)$.



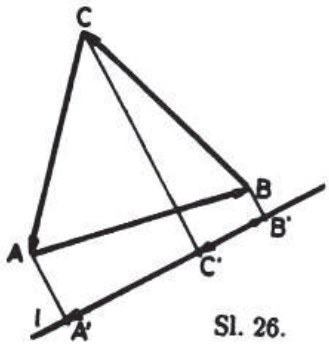
Sl. 25.

Iz pravouglog trougla ABE je $AE = b\sin\alpha$, a iz pravouglog trougla DAS je $SD = R\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{2\sin\alpha}\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b\cos\alpha}{2\sin^2\alpha}$. Zato je

$$p = \frac{1}{2}AE \cdot SD = \frac{1}{2}b\sin\alpha\frac{b\cos\alpha}{2\sin^2\alpha} = \frac{1}{4}b^2\operatorname{ctg}\alpha,$$

odnosno $b^2 = 4p\operatorname{tg}\alpha$. Za zapreminu piramide dobijamo

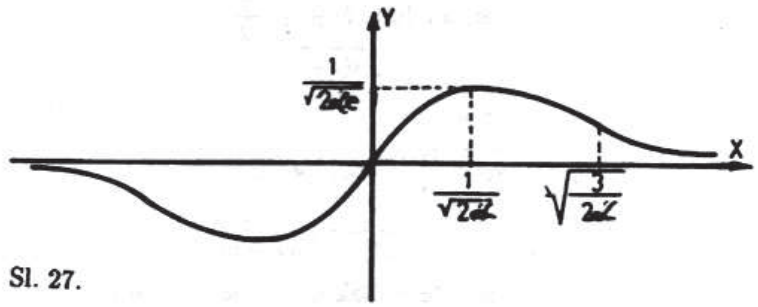
$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}b^2\sin(180^\circ - 2\alpha)\frac{b\cos\alpha}{2\sin^2\alpha} = \frac{1}{6}b^3\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{4}{3}\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}(p\operatorname{tg}\alpha)^{3/2}.$$



Sl. 26.

64.3.4. Jasno je da zbir trećih stepena (algebarskih vrednosti) projekcija vektora $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{CA}$ na osu l može biti jednak nuli samo u slučaju da je jedna od tih projekcija jednaka nuli, tj. da je jedna od stranica trougla ABC normalna na osu l.

64.4.1. a) Funkcija je definisana za svako $x \in \mathbf{R}$ i neparna je. Nula i znak joj se poklapaju sa nulom i znakom argumenta. Zbog $y' = (1-2\alpha x^2)e^{-\alpha x^2}$, ima ekstremne vrednosti za $x_e = \pm 1/\sqrt{2\alpha}$, i to minimum $y_e = -1/\sqrt{2\alpha e}$, odnosno maksimum $y_e = 1/\sqrt{2\alpha e}$. Intervali monotonosti, kao i konveksnosti prikazani su na grafiku (sl. 27). Kako je $y'' = 2\alpha x(2\alpha x^2 - 3)e^{-\alpha x^2}$, prevojne tačke su $(\pm\sqrt{3/2\alpha}, \pm\sqrt{3/2\alpha e^3})$.



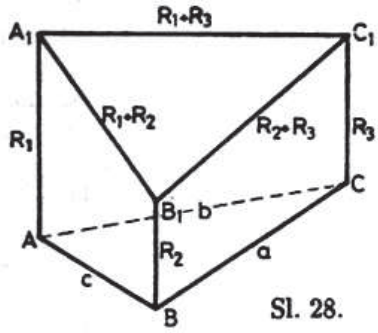
Sl. 27.

b) Zbog $x_e = \pm 1/\sqrt{2\alpha}$, $y_e = \pm 1/\sqrt{2\alpha e}$, sve ekstremne tačke pripadaju pravoj $y = x/\sqrt{e}$.

c) $P(b) = \int_0^b xe^{-\alpha x^2}\,dx = \frac{1}{2\alpha}(1 - e^{-\alpha b^2})$, $\lim\limits_{b\to\infty} P(b) = \frac{1}{2\alpha}$.

64.4.2. Označimo centre datih lopti sa A_1, B_1 i C_1, a poluprečnike sa R_1, R_2 i R_3, sl. 28. U pravouglom trapezu ABB_1A_1 je $AB = c$, $BB_1 = R_2$, $B_1A_1 = R_1 + R_2$ i $A_1A = R_1$, pa je $c^2 = (R_1+R_2)^2-(R_1-R_2)^2 = 4R_1R_2$. Slično se dobija $a^2 = 4R_2R_3$ i $b^2 = 4R_3R_1$. Iz poslednje tri relacije se dobijaju tražene vrednosti poluprečnika:

$$R_1 = \frac{bc}{2a}, \quad R_2 = \frac{ca}{2b}, \quad R_3 = \frac{ab}{2c}.$$



Sl. 28.

64.4.3. Da bi brojevi 2, $\sqrt{6}$ i 9/2 bili članovi jednog aritmetičkog niza, neophodno je i dovoljno da postoji realan broj d i prirodni brojevi k i l, takvi da je

$$\sqrt{6} - 2 = kd, \qquad \frac{9}{2} - \sqrt{6} = ld.$$

Međutim, to je nemoguće, jer bi tada bilo

$$\frac{k}{l} = \frac{\sqrt{6}-2}{\frac{9}{2}-\sqrt{6}} = \frac{2(11\sqrt{6}-30)}{57},$$

što nije racionalan broj.

Dati brojevi su članovi geometrijskog niza sa korficijentom q, tako izabranim da je

$$\frac{\sqrt{6}}{2} = q^k, \qquad \frac{9}{2\sqrt{6}} = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3 = q^{3k}$$

za neki prirodan broj k.

64.4.4. Data nejednakost ekvivalentna je sa

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) < 0,$$

odnosno sa

$$-(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) < 0,$$

tj, zbog a, b, $c > 0$, sa

$$(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b) > 0.$$

Odatle sledi tvrđenje zadatka.

64.4.5. Svaki četvoročlani skup koji sadrži po dve od datih tačaka sa svake od datih pravih određuje tačno jednu od opisanih presečnih tačaka i obrnuto. Zato je traženi broj jednak $\binom{m}{2}\binom{n}{2}$.

65.3.1. $P(m) = m^4 - (x^2 - x)m^2 + (x-1)^3 = (m^2 - x + 1)(m^2 - (x-1)^2)$. Rešenja date jednačine su

$$x_1 = m^2 + 1, \quad x_2 = m + 1, \quad x_3 = -m + 1.$$

65.3.2. Neka su a, b, c ivice kvadra i neka je $c = \sqrt{ab}$. Prema uslovu zadatka je

$$a + b + \sqrt{ab} = s, \quad a^2 + b^2 + ab = d^2,$$

odakle dobijamo $(s - \sqrt{ab})^2 = d^2 + ab$ i $\sqrt{ab} = (s^2 - d^2)/2s$, pri čemu mora biti $s > d$. Dalje lako dobijamo

$$ab = \left(\frac{s^2 - d^2}{2s}\right)^2, \quad a + b = \frac{s^2 + d^2}{2s}.$$

Prema tome, a i b su rešenja kvadratne jednačine

$$t^2 - \frac{s^2 + d^2}{2s}t + \left(\frac{s^2 - d^2}{2s}\right)^2 = 0$$

po nepoznatoj t. Ta jednačina ima realna rešenja ako i samo ako je

$$\left(\frac{s^2 + d^2}{2s}\right)^2 - 4\left(\frac{s^2 - d^2}{2s}\right)^2 \geq 0,$$

tj. ako i samo ako je $3d^2 \geq s^2$. Konačno, pri uslovu $d < s \leq d\sqrt{3}$ dobijamo tražene brojeve

$$\frac{s^2 + d^2 + \sqrt{(3d^2 - s^2)(3s^2 - d^2)}}{4s}, \quad \frac{s^2 + d^2 - \sqrt{(3d^2 - s^2)(3s^2 - d^2)}}{4s}, \quad \frac{s^2 - d^2}{2s}.$$

65.3.3. Primetimo da je

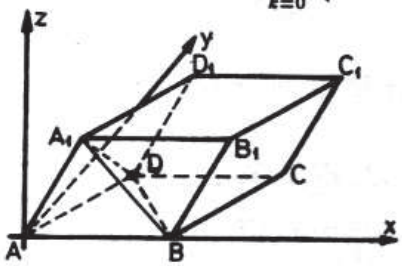
$$\frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x} = \frac{\sin 3x(1 + 2\cos x)}{\cos 3x(1 + 2\cos x)}.$$

Zadatak je odrediti sve realne brojeve za koje važi

$$\operatorname{tg} 3x > 1, \quad \cos x \neq -\frac{1}{2}, \quad 0 < x < 2\pi.$$

Skup svih takvih brojeva jednak je

$$\bigcup_{k=0}^{5} \left(\frac{(4k+1)\pi}{12}, \frac{(4k+2)\pi}{12} \right).$$



Sl. 29.

65.3.4. Neka je $ABCDA_1B_1C_1D_1$ dati paralelepiped ($ABCD$ je jedna strana, a AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 su ivice paralelepipeda) i neka je

$$\angle BAD = \angle DAA_1 = \angle A_1AB = 60°.$$

Uvedimo pravougli koordinatni sistem tako da važi:

1) koordinatni početak O poklapa se sa tačkom A,
2) tačka B pripada pozitivnom delu x-ose,
3) tačka D pripada xOy ravni i ima pozitivnu y-koordinatu,
4) tačka A_1 ima pozitivnu z-koordinatu (sl. 29).

Neka je $a = AB$. Tada je ABD jednakostranični trougao čija je visina jednaka $a\sqrt{3}/2$, a $ABDA_1$ je pravilan tetraedar čija je visina jednaka $a\sqrt{6}/3$. Na osnovu toga lako određujemo koordinate svih temena paralelepipeda:

$$A(0,0,0),\ B(a,0,0),\ C\left(\frac{3a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, 0\right),\ D\left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, 0\right),\ A_1\left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{6}, \frac{a\sqrt{6}}{3}\right),$$
$$B_1\left(\frac{3a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{6}, \frac{a\sqrt{6}}{3}\right),\ C_1\left(2a, \frac{2a\sqrt{3}}{3}, \frac{a\sqrt{6}}{3}\right),\ D_1\left(a, \frac{2a\sqrt{3}}{3}, \frac{a\sqrt{6}}{3}\right).$$

Dalje je $d^2 = AC_1^2 = (2a)^2 + \left(\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 = 6a^2$, pa odatle sledi $a = d/\sqrt{6}$.

Dalje lako dobijamo dužine dijagonala paralelepipeda:

$$BD_1 = DB_1 = CA_1 = d/\sqrt{3}.$$

65.4.1. Traženi zbir jednak je

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=j}^{j+k-1} i = \sum_{j=1}^{k}\frac{k}{2}(2j+k-1) = \frac{k^2(k-1)}{2} + k\sum_{j=1}^{k} j$$
$$= \frac{k^2(k-1)}{2} + k\frac{k(k+1)}{2} = k^3.$$

65.4.2. a) S obzirom da je $y' = 3x^2 + p$, to data funkcija ima lokalne ekstremume u tačkama $x_1 = -\sqrt{-p/3}$, $x_2 = \sqrt{-p/3}$, ako je $p < 0$. Zato je

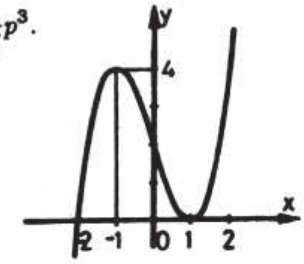
$$Mm = y(x_1)y(x_2) = \left(\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} - p\sqrt{-\frac{p}{3}} + q\right)\left(-\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} + p\sqrt{-\frac{p}{3}} + q\right)$$
$$= \left(q - \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)\left(q + \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) = q^2 + \frac{4}{27}p^3.$$

b) Sistem jednačina

$$M - m = -\frac{4p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} = 4, \quad (-2)^3 - 2p + q = 0$$

ima tačno jedno rešenje: $p = -3$, $q = 2$.

Grafik funkcije $y = x^3 - 3x + 2$ prikazan je na sl. 30.



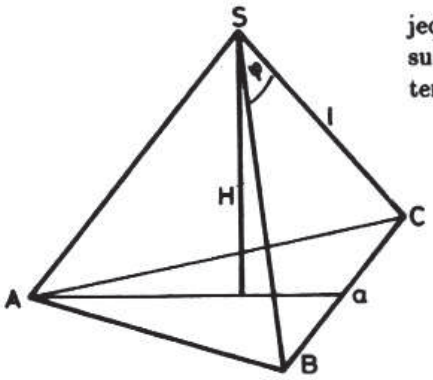
Sl. 30.

65.4.3. Konstruisano je ukupno 35 pravih (10 određenih tačkama A_i, 10 određenih tačkama B_i i još 15 pravih koje spajaju tačke B_i sa temenima petougla). Svaku od tačaka A_i sadrži tačno 7 od tih pravih, a svaku od tačaka B_i sadrži tačno 8 od tih pravih. Broj svih tačaka u kojima se seku tačno dve od konstruisanih pravih jednak je

$$\binom{35}{2} - 5\left[\binom{7}{2} - 1\right] - 5\left[\binom{8}{2} - 1\right] = 360.$$

65.4.4. Neka su ivični uglovi datog triedra jednaki φ (pri čemu je $0 < \varphi < 2\pi/3$) i neka su $a(= AB)$ i h redom osnovna ivica i visina iz temena S tetraedra $SABC$, sl. 31. Tada je

$$a^2 = l^2 + l^2 - 2l^2\cos\varphi = 4l^2\sin^2\frac{\varphi}{2},$$
$$a = 2l\sin\frac{\varphi}{2},$$
$$H^2 = l^2 - \left(\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}2l\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2$$
$$H = l\sqrt{1 - \frac{4}{3}\sin^2\frac{\varphi}{2}}.$$



Sl. 31.

Zapremina tetraedra jednaka je

$$V(\varphi) = \frac{H}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{3}l^3 \sin^2\frac{\varphi}{2}\sqrt{3 - 4\sin^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Izvod funkcije $f(t) = t\sqrt{3-4t}$, $0 < t < 3/4 (= \sin^2 \pi/3)$ je

$$f'(t) = \frac{3-6t}{\sqrt{3-4t}} \quad \begin{cases} > 0, & \text{ako je } 0 < t < 1/2, \\ = 0, & \text{ako je } t = 1/2, \\ < 0, & \text{ako je } 1/2 < t < 3/4. \end{cases}$$

Prema tome, funkcija f dostiže maksimum za $t = 1/2$, a funkcija $V(\varphi)$, $0 < \varphi < 2\pi/3$, dostiže maksimum za $\sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}$, tj. za $\varphi = \pi/2$.

66.3.1. Iz uslova

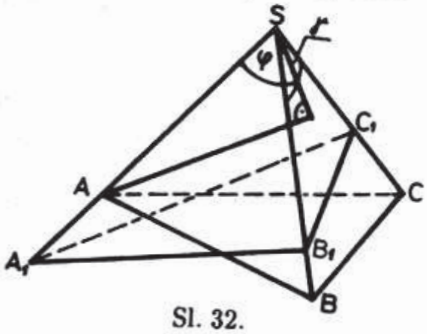
$$\overline{aabb} = 1100a + 11b = 11(100a + b) = k^2, \qquad k \in \mathbf{Z},$$

dobijamo da mora da bude $100a + b = 11l^2$, $l \in \mathbf{Z}$, gde $a, b \in \{1, \ldots, 9\}$. Provera pokazuje da je jedina mogućnost da to bude ispunjeno $l = 8$, $a = 7$, $b = 4$; zaista je $88^2 = 7744$.

66.3.2. Neka su $SABC$ i $SA_1B_1C_1$ tetraedri za koje važi uslov zadatka i neka je

$$\gamma = \angle BSC \quad (= \angle B_1SC_1),$$

a φ ugao između prave SA i ravni BSC, sl. 32. Visine tetraedara $SABC$ i $SA_1B_1C_1$ iz temena A i A_1 jednake su redom $SA\sin\varphi$ i $SA_1\sin\varphi$. Zapremine tih tetraedara su



Sl. 32.

$$V_{SABC} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}SB\cdot SC\sin\gamma\, SA\sin\varphi,$$
$$V_{SA_1B_1C_1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}SB_1\cdot SC_1\sin\gamma\, SA_1\sin\varphi,$$

pa odatle sledi

$$\frac{V_{SABC}}{V_{SA_1B_1C_1}} = \frac{SA\cdot SB\cdot SC}{SA_1\cdot SB_1\cdot SC_1}.$$

66.3.3. Data nejednačina ekvivalentna je sa

$$2(\sqrt{3}-1)\sin^4 x + (1 - 3\sqrt{3})\sin^2 x + 1 > 0.$$

Označimo sa y_1, y_2 $(y_1 < y_2)$ rešenja kvadratne jednačine

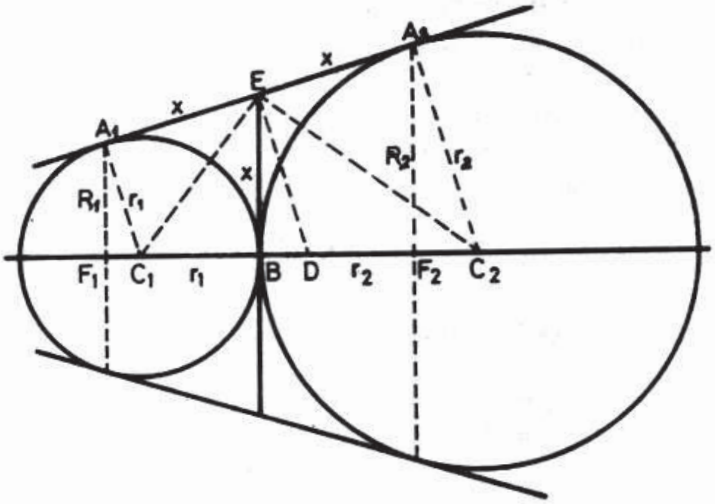
$$2(\sqrt{3}-1)y^2 + (1-3\sqrt{3})y + 1 = 0.$$

Lako je proveriti da za njih važi $0 < y_1 < 1 < y_2$. Uzimajući u obzir da mora biti $0 \leq \sin^2 x \leq 1$, odatle dobijamo da je data nejednačina zadovoljena za $0 \leq \sin^2 x < y_1$, odnosno $|\sin x| < \sqrt{y_1}$. Dakle, vrednosti $x \in [0, 2\pi]$ koje zadovoljavaju jednačinu su:

$$0 \leq x < \arcsin\sqrt{y_1},\ \pi - \arcsin\sqrt{y_1} < x < \pi + \arcsin\sqrt{y_1},\ 2\pi - \arcsin\sqrt{y_1} < x \leq 2\pi.$$

66.3.4. Pod datim pretpostavkama sistem ima jedinstveno rešenje:

$$x = \frac{(d-b)(d-c)}{(a-b)(a-c)}, \quad y = \frac{(d-a)(d-c)}{(b-a)(b-c)}, \quad z = \frac{(d-a)(d-b)}{(c-a)(c-b)}.$$



Sl. 33.

66.3.5. a) Označimo sa B dodirnu tačku datih krugova i sa D središte duži C_1C_2, sl. 33. Duži EA_1, EB i EA_2 su međusobno jednake — označimo njihovu dužinu sa x. Duž ED je srednja duž trapeza $A_1C_1C_2A_2$, pa je jednaka poluzbiru osnovica: $ED = \frac{r_1 + r_2}{2} = C_1D = DC_2$. Zato tačka E pripada krugu nad prečnikom C_1C_2, pa je ugao C_1EC_2 prav.

b) Označimo sa F_1 i F_2 središta osnova dobijene zarubljene kupe, a sa R_1 i R_2 njihove poluprečnike. U trapezu $F_1F_2A_2A_1$ je EB srednja duž, pa je $R_1 + R_2 = 2x$. Površina omotača kupe je $M = \pi(R_1 + R_2)2x = 4\pi x^2$. Iz sličnosti trouglova EBC_1 i C_2BE dobijamo $r_1r_2 = x^2$, pa je $M = 4\pi r_1 r_2$.

c) Kako je

$$M = 4\pi r_1 r_2 \leq 4\pi \left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^2 = \pi a^2$$

i jednakost važi ako i samo ako je $r_1 = r_2$, to je tražena maksimalna vrednost πa^2 i postignuta je kad zarubljena kupa prelazi u valjak.

66.4.1. Imamo

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}, \quad x_3 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3},$$
$$x_1x_2 = x_2, \quad x_1x_3 = x_3 \quad \text{i} \quad x_2x_3 = x_1.$$

Odatle direktno sledi data relacija.

66.4.2. Traženi broj jednak je $\binom{9}{3}2^3 \cdot 3^6 = 489\,888$, jer 3 mesta na kojima će stajati crne kuglice možemo izabrati na $\binom{9}{3}$ načina, zatim na svakom od ta tri mesta možemo postaviti crnu kuglicu na 2 načina, a na svakom od preostalih 6 mesta možemo postaviti belu kuglicu na 3 načina.

66.4.3. Treba dokazati da su brojevi n i $3n+1$ uzajamno prosti i isto za brojeve $2n+1$ i $3n+1$. Ako bi n i $3n+1$ imali zajednički delilac: $n = kd$, $3n+1 = ld$, $d \in \mathbf{N}$, sledilo bi $1 = (l-3k)d$, što je moguće jedino za $d = 1$. Slično, iz $2n+1 = k_1d$, $3n+1 = l_1d$ sledilo bi $1 = (3k_1 - 2l_1)d$, tj. $d = 1$.

66.4.4. a) Koristeći poznatu nejednakost $|\sin t| \le |t|$, $t \in \mathbf{R}$, dobijamo

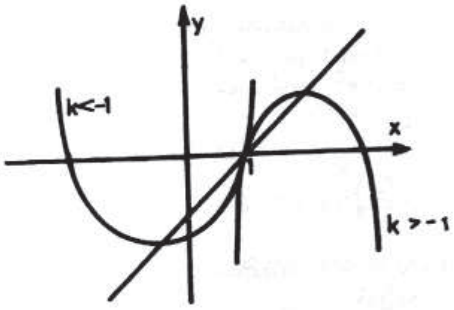
$$|\sin x - \sin x_1| = 2\left|\sin\frac{x-x_1}{2}\cos\frac{x+x_1}{2}\right| \le 2\left|\frac{x-x_1}{2}\right| = |x-x_1| \le \frac{1}{100}.$$

b) Odgovor je negativan. Naime, izaberimo $x_1 = \sqrt{n\pi}$, $n \in \mathbf{N}$. S obzirom da je

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}+n\pi} - \sqrt{n\pi}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{\frac{\pi}{2}+n\pi}+\sqrt{n\pi}} = 0,$$

za dovoljno veliko n biće $\sqrt{\frac{\pi}{2}+n\pi} - \sqrt{n\pi} < \delta$, ma kakvo bilo unapred zadato $\delta > 0$. Dakle, ako izaberemo $x = \sqrt{\frac{\pi}{2}+n\pi}$, biće $x \in \Delta$ i

$$|\sin x^2 - \sin x_1^2| = |\sin(\tfrac{\pi}{2}+n\pi) - \sin n\pi| = 1 > \frac{1}{100}.$$



Sl. 34.

67.2.1. a) Teme parabole

$$y = (k+1)x^2 - 2kx + k - 1,$$

$k \ne -1$, ima koordinate

$$x = 1 - \frac{1}{k+1}, \quad y = -\frac{1}{k+1}.$$

Geometrijsko mesto temena takvih parabola je skup

$$\{(x,y) \mid y = x - 1,\ x \neq 1\}.$$

b) Svaka od parabola date familije sadrži tačku $(1,0)$, sl. 34.

c) Rešenja jednačine $(k+1)x^2 - 2kx + k - 1 = 0$ su $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{k-1}{k+1}$.

d) Traženi brojevi su 2, 5, 8, 17.

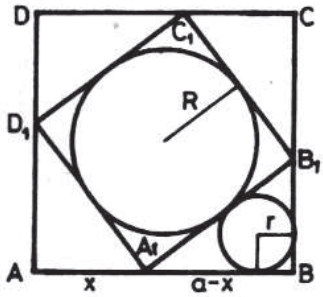
67.2.2. Neka je $f(n) = 9n^2 + 3n - 2$.

a) Za svaki ceo broj n važi $f(n) \equiv 1 \pmod 3$, odakle sledi da broj $f(n)$ nije deljiv sa 9 ni za jedno celobrojno n.

b) Važi: $f(4k) \equiv -2 \pmod 4$, $f(4k+1) \equiv 2 \pmod 4$, $f(4k+2) \equiv 0 \pmod 4$, $f(4k+3) \equiv 0 \pmod 4$. Broj $f(n)$ je deljiv sa 4 ako i samo ako je ostatak pri deljenju broja n sa 4 jednak 2 ili 3.

67.2.3. Neka je $ABCD$ dati kvadrat i $A_1B_1C_1D_1$ upisani kvadrat, pri čemu tačke A_1, B_1, C_1, D_1 pripadaju redom stranicama AB, BC, CD, DA. Označimo sa R i r poluprečnike upisanih krugova u kvadrat $A_1B_1C_1D_1$ i trougao A_1BB_1, sl. 35. Tada je

$$A_1B_1 = 2R \quad \text{i} \quad A_1B + BB_1 = a,$$



Sl. 35.

pa, pošto je trougao A_1BB_1 pravougli (sa pravim uglom kod temena B), to je $a - 2r = 2R$. Zbir površina upisanih krugova je

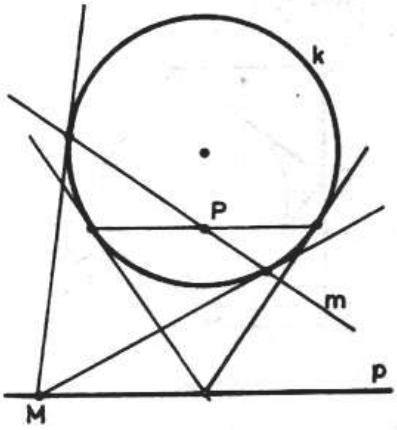
$$R^2\pi + 4r^2\pi = \left(\frac{a}{2} - r\right)^2 \pi + 4r^2\pi = \left(5r^2 - ar + \frac{a^2}{4}\right)\pi$$
$$= \left[5\left(r - \frac{a}{10}\right)^2 + \frac{a^2}{5}\right]\pi .$$

i ima minimalnu vrednost za $r = a/10$. Označimo $AA_1 = x$, $A_1B = y$. Za $r = a/10$ dobijamo $R = 2a/5$ i

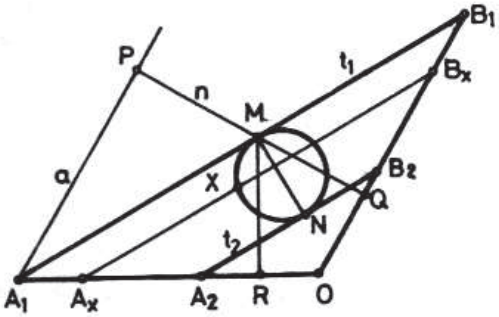
$$x + y = a, \qquad x^2 + y^2 = 4R^2 = \frac{16}{25}a^2,$$

odakle lako sledi $x = \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{7}}{10}\right)a$ ili $x = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{7}}{10}\right)a$.

67.2.4. Neka je β ravan koja sadrži centar date sfere i tačku M ravni α, a normalna je na ravan α. Označimo sa p presek ravni α i β, a sa k presek date sfere i ravni β. Neka je P pol prave p u odnosu na krug k i m polara tačke M u odnosu na isti krug, sl. 36. Tada prava m sadrži tačke u kojima tangente iz M na krug k dodiruju taj krug, a kako $M \in p$, to $P \in m$. Ravan koja sadrži pravu m (pa prema tome i tačku P), a normalna je na ravan β, deli osvetljeni od neosvetljenog dela sfere ako je izvor svetlosti u tački M. Tačka P je pol ravni α u odnosu na datu sferu, a sadrže je sve opisane ravni.



Sl. 36.



Sl. 37.

67.3.1. Data jednačina ekvivalentna je sa jednačinom

$$\sqrt{5x+1}+\sqrt{5x+10}=\sqrt{16-4x}+\sqrt{61-4x},$$

pri čemu su svi zapisani izrazi definisani za $-1/5 \leq x \leq 4$. Označimo $f(x) = \sqrt{5x+1}+\sqrt{5x+10}$, $g(x)=\sqrt{16-4x}+\sqrt{61-4x}$. Tada je $f(3)=g(3)=9$. Za $-1/5 \leq x < 3$ važi $f(x) < f(3) = g(3) < g(x)$, a za $3 < x \leq 4$ važi $f(x) > f(3) = g(3) > g(x)$. Prema tome $x = 3$ je jedino rešenje date jednačine.

67.3.2. Neka je s simetrala datog ugla, a t_1 i t_2 tangente datog kruga koje su normalne na pravu s. Neka su A_1, B_1 i M (odnosno A_2, B_2 i N) redom presečne tačke tangente t_1 (odnosno t_2) sa kracima datog ugla i dodirna tačka sa datim krugom. Bez smanjenja opštosti možemo pretpostaviti da tačka A_2 pripada duži OA_1, a tačka B_2 duži OB_1. Neka je a prava koja sadrži tačku A_1 i paralelna je sa OB_1, a P, Q i R redom podnožja normala iz M na prave a, OB_1 i OA_1. Pošto je $a \parallel OB_1$, to su tačke P, M i Q kolinearne, a duž PQ jednaka je visini iz temena A_1 trougla A_1OB_1, sl. 37. Trouglovi A_1RM i A_1PM su podudarni jer je $\angle PA_1M = \angle A_1B_1O = \angle RA_1M$, $A_1M = A_1M$ i

$$\angle A_1PM = \angle A_1RM = 90^\circ.$$

Zato je $MP = MR$, pa dobijamo $MR + MQ = MP + MQ = PQ$. Neka je $X \neq M$ proizvoljna tačka datog kruga, a A_x i B_x redom preseci prave koja sadrži X i paralelna je t_1 sa pravim OA_1 i OB_1. Analogno kao malopre dokazujemo da je zbir rastojanja tačke X od krakova OA_1 i OB_1 jednak visini iz temena A_x trougla A_xOB_x. Kako je X unutrašnja tačka trougla A_1OB_1, to tačka A_x pripada duži OA_1 pa je $A_1O > A_xO$, a kako su trouglovi A_1OB_1 i A_xOB_x slični (jer imaju po dve paralelne stranice i nalegle uglove jednake), to je i visina iz temena A_1 trougla A_1OB_1 veća od visine iz temena A_x trougla A_xOB_x. Time je dokazano da od svih tačaka datog kruga tačka M ima najveći zbir rastojanja od krakova datog ugla. Slično se dokazuje da je kod tačke N taj zbir minimalan.

67.3.3. Koristeći formulu $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$ datu nejednačinu možemo zapisati u obliku

$$(1+\sqrt{3})\sin 2x \geq 1 + \sqrt{3} + (\sqrt{3}-1)\cos 2x. \tag{1}$$

Neka je $t = \cos 2x$. Ako je x rešenje date nejednačine, onda je $\sin 2x \geq 0$, tj. $\sin 2x = \sqrt{1-t^2}$ i

$$(1+\sqrt{3})\sqrt{1-t^2} \geq 1 + \sqrt{3} + (\sqrt{3}-1)t. \tag{2}$$

Nejednačina (2) se može kvadrirati jer su obe strane pozitivni brojevi. Dobija se ekvivalentna nejednačina (po nepoznatoj t) $(2t+1)t \leq 0$ čije je rešenje svaki broj $t \in [-1/2, 0]$. Skup rešenja nejednačine (1) je

$$\begin{aligned} S &= \{\, x \mid -1/2 \leq \cos 2x \leq 0, \quad \sin 2x \geq 0 \,\} \\ &= \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi\right]. \end{aligned}$$

67.3.4. a) Neka je O proizvoljna tačka i $\overrightarrow{OM} = \lambda\overrightarrow{OA} + (1-\lambda)\overrightarrow{OA_1}$, gde je $0 \leq \lambda \leq 1$. Tada je (sl. 38):

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \lambda\overrightarrow{OB} + (1-\lambda)\overrightarrow{OB_1} - \lambda\overrightarrow{OA} - (1-\lambda)\overrightarrow{OA_1} \\ &= \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + (1-\lambda)(\overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OA_1}) = \lambda\overrightarrow{AB} + (1-\lambda)\overrightarrow{A_1B_1}, \\ \overrightarrow{QP} &= \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = \lambda\overrightarrow{OC} + (1-\lambda)\overrightarrow{OC_1} - \lambda\overrightarrow{OD} - (1-\lambda)\overrightarrow{OD_1} \\ &= \lambda(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}) + (1-\lambda)(\overrightarrow{OC_1} - \overrightarrow{OD_1}) = \lambda\overrightarrow{DC} + (1-\lambda)\overrightarrow{D_1C_1} \\ &= \lambda\overrightarrow{AB} + (1-\lambda)\overrightarrow{A_1B_1}. \end{aligned}$$

Prema tome, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$, tj. $MNPQ$ je paralelogram.

b) Neka su E, E_1 i R redom središta paralelograma $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ i $MNPQ$. Tada je

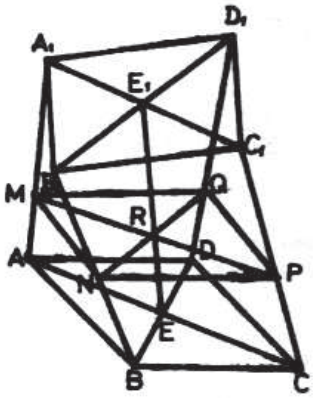
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ})\\ &= \frac{\lambda}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})+\frac{1-\lambda}{4}(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}+\overrightarrow{OD_1})\\ &= \lambda\overrightarrow{OE}+(1-\lambda)\overrightarrow{OE_1}.\end{aligned}$$

Ako je $0 \le \lambda \le 1$, onda tačka R pripada duži EE_1. Obrnuto, neka je X proizvoljna tačka duži EE_1 i neka je

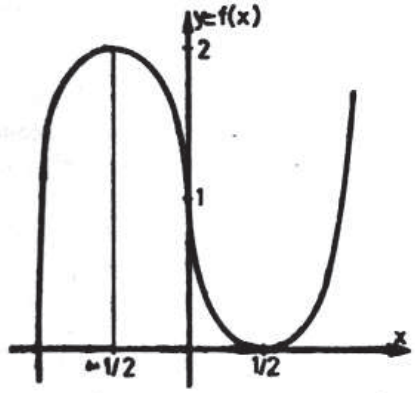
$$\overrightarrow{OX} = \mu\overrightarrow{OE}+(1-\mu)\overrightarrow{OE_1}.$$

Neka su dalje M_1, N_1, P_1, Q_1 redom tačke na dužima AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, koje dele te duži u istom odnosu u kome tačka X deli duž EE_1. Tada je $M_1N_1P_1Q_1$ paralelogram čije je središte upravo tačka X.

Traženo geometrijsko mesto tačaka je duž EE_1.



Sl. 38.



Sl. 39.

67.4.1. a) Funkcija $f(x) = \frac{4}{p^2}x^3 - 3x + p$, gde je $p \neq 0$, ima u tački $-p/2$ lokalni maksimum jednak $2p$, a u tački $p/2$ ima lokalni minimum jednak 0. Skup tačaka maksimuma je

$$\{(x,y) \mid y = -4x,\ x \neq 0\},$$

a skup tačaka minimuma je $\{(x,0) \mid x \neq 0\}$.

Grafik funkcije $f(x) = 4x^3 - 3x + 1 = (x+1)(2x-1)^2$ dat je na sl. 39.

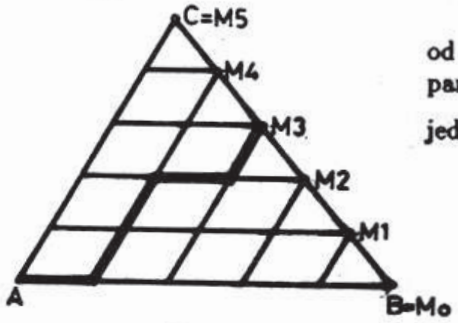
b) Kako je $\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$, to smenom $x = \cos t$ dobijamo

$$f(x) = f(\cos t) = 4\cos^3 t - 3\cos t + \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 3t + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Skup rešenja jednačine $\cos 3t = -\sqrt{2}/2$ (po nepoznatoj t) je

$$S = \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3} \,\middle|\, k \in \mathbf{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \,\middle|\, k \in \mathbf{Z} \right\}$$
$$= \bigcup_{j=1}^{6} \{ t_j + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \},$$

gde je $t_1 = \pi/4$, $t_2 = 5\pi/12$, $t_3 = 11\pi/12$, $t_4 = 13\pi/12$, $t_5 = 19\pi/12$, $t_6 = 21\pi/12$. Lako se proverava da važi $\cos t_1 = \cos t_6$, $\cos t_2 = \cos t_5$ i $\cos t_3 = \cos t_4$. Prema tome jednačina $4x^3 - 3x + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$ ima tri rešenja: $x_1 = \cos\frac{\pi}{4}$, $x_2 = \cos\frac{5\pi}{12}$, $x_3 = \cos\frac{11\pi}{12}$.



Sl. 40.

67.4.2. a) Put do tačke M_k se sastoji od k duži paralelnih pravoj AC i $n-k$ duži paralelnih pravoj AB, sl. 40. Traženi broj jednak je $\binom{n}{k}$.

b) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$.

c) Dužina svih puteva je

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(k\frac{AB}{n} + (n-k)\frac{AC}{n} \right)$$
$$= AB \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} + AC \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!} = 2^{n-1}(AB + AC).$$

67.4.3. Primetimo da je

$$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha \cos\alpha - \cos 2\alpha \sin\alpha}{\sin\alpha \sin 2\alpha}$$
$$= \frac{\sin(2\alpha - \alpha)}{\sin\alpha \sin 2\alpha} = \frac{1}{\sin 2\alpha}, \qquad \text{ako } \alpha \notin \left\{ \frac{k\pi}{2} \,\middle|\, k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Stavljajući u jednakosti $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{1}{\sin 2\alpha}$ umesto α redom vrednosti x, $2x$, 2^2x, $\ldots$, $2^{n-1}x$, pri čemu

$$x \notin \left\{ \frac{k\pi}{2^n} \,\middle|\, k \in \mathbf{Z} \right\}$$

i sabirajući dobijene jednakosti, dobijamo

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin 2^k x} = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2^n x.$$

67.MO.1. Primetimo da su $\log(\alpha x+\beta)$ i $\log(x+1)$ definisani ako je $\alpha x+\beta > 0$ i $x+1 > 0$ i da je diskriminanta D kvadratne jednačine $(x+1)^2 = \alpha x+\beta$ jednaka $\alpha^2-4\alpha+4\beta$. Na osnovu toga dobijamo: $x_1 = \dfrac{\alpha-2-\sqrt{D}}{2}$ je rešenje date jednačine ako je

$$D \geq 0, \quad \sqrt{D} < \alpha, \quad \alpha\sqrt{D} < \alpha^2 - 2\alpha + 2\beta;$$

$x_2 = \dfrac{\alpha-2+\sqrt{D}}{2}$ je rešenje date jednačine ako je

$$D \geq 0, \quad \sqrt{D} > -\alpha, \quad \alpha\sqrt{D} > 2\alpha - \alpha^2 - 2\beta.$$

Lako se dokazuje da zapisane uslove možemo izraziti u pogodnijem obliku: x_1 je rešenje ako je $D_1 \geq 0$, $\alpha > \beta$, $\alpha > 0$; x_2 je rešenje ako je $D \geq 0$ i važi $\alpha > 0$ ili $\beta > \alpha$.

67.MO.2. a) Kako je nejednakost $a \geq b$ ekvivalentna nejednakosti $\alpha \geq \beta$, to je $(a-b)(\alpha-\beta) \geq 0$. Pri tome jednakost važi ako i samo ako je $a = b$. Slično je $(b-c)(\beta-\gamma) \geq 0$ i $(c-a)(\gamma-\alpha) \geq 0$, pa sledi

$$(a-b)(\alpha-\beta) + (b-c)(\beta-\gamma) + (c-a)(\gamma-\alpha) \geq 0. \tag{1}$$

Koristeći uslov $\alpha+\beta+\gamma = \pi$, nejednakost (1) možemo ekvivalentno transformisati na sledeći način:

$$\begin{gathered} a(2\alpha-\beta-\gamma) + b(2\beta-\gamma-\alpha) + c(2\gamma-\alpha-\beta) \geq 0, \\ a(3\alpha-\pi) + b(3\beta-\pi) + c(3\gamma-\pi) \geq 0, \\ 3(a\alpha+b\beta+c\gamma) \geq \pi(a+b+c), \\ \frac{\pi}{3} \leq \frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c}. \end{gathered}$$

Jednakost važi ako i samo ako je $a = b = c$.

b) Kako je zbir dve stranice trougla veći od treće, to je

$$(b+c-a)\alpha + (c+a-b)\beta + (a+b-c)\gamma > 0,$$

pa dalje lako sledi:

$$\begin{gathered} a(\beta+\gamma-\alpha) + b(\gamma+\alpha-\beta) + c(\alpha+\beta-\gamma) > 0, \\ a(\pi-2\alpha) + b(\pi-2\beta) + c(\pi-2\gamma) > 0, \\ \pi(a+b+c) > 2(a\alpha+b\beta+c\gamma), \\ \frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c} < \frac{\pi}{2}. \end{gathered}$$

67.MO.3. Neka je O proizvoljna tačka. Kako tačke P i R pripadaju ravni kojoj su paralelne prave AD i BC, to te tačke dele duži AB i DC u istom odnosu, tj. postoji realan broj λ, takav da važi

$$\overrightarrow{OP} = \lambda\overrightarrow{OA} + (1-\lambda)\overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{OR} = \lambda\overrightarrow{OD} + (1-\lambda)\overrightarrow{OC}. \tag{1}$$

Analogno dobijamo da postoji broj μ, takav da važi

$$\overrightarrow{OS} = \mu\overrightarrow{OA} + (1-\mu)\overrightarrow{OD}, \quad \overrightarrow{OQ} = \mu\overrightarrow{OB} + (1-\mu)\overrightarrow{OC}. \tag{2}$$

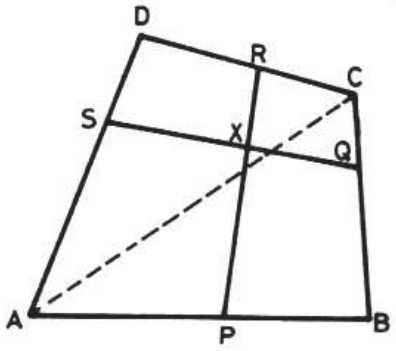
Neka je X tačka duži PR i Y tačka duži QS određene uslovima

$$\overrightarrow{OX} = \lambda\overrightarrow{OS} + (1-\lambda)\overrightarrow{OQ}, \quad \overrightarrow{OY} = \mu\overrightarrow{OP} + (1-\mu)\overrightarrow{OR}, \tag{3}$$

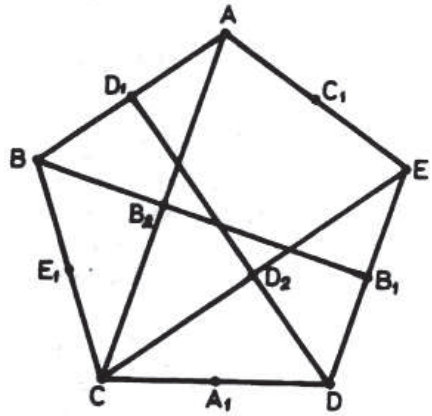
sl. 41. Iz jednakosti (1), (2) i (3) sledi

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OY} = \lambda\mu\overrightarrow{OA} + (1-\lambda)\mu\overrightarrow{OB} + (1-\lambda)(1-\mu)\overrightarrow{OC} + \lambda(1-\mu)\overrightarrow{OD}.$$

Prema tome, $X \equiv Y$, prave PR i QS se seku, a tačke P, Q, R, S pripadaju istoj ravni.



Sl. 41.



Sl. 42.

67.MO.4. Iz uslova zadatka sledi da su trouglovi ABC, BCD, CDE, DEA i EAB podudarni, pa su dijagonale AC, BD, CE, DA, EB petougla $ABCDE$ međusobno jednake. Neka je $f(A) = B$, $f(B) = A$, $f(C) = E$ i $f(D) = D$. Tada je f izometrično preslikavanje skupa $\{A, B, C, D\}$ na skup $\{A, B, E, D\}$ i jednoznačno se može produžiti do izometrije celog prostora. Ta izometrija je jedno od sledeća dva preslikavanja:

1) Simetrija u odnosu na ravan π koja sadrži središte D_1 duži AB i normalna je na pravu AB. U ovom slučaju tačke C i E su međusobno simetrične u odnosu na ravan π. Zato je $AB \parallel CE$, pa sledi da tačke A, B, C, E pripadaju jednoj ravni.

2) Simetrija u odnosu na pravu DD_1. U ovom slučaju središte D_2 duži CE pripada pravoj DD_1, pa tačke C, D, E, D_1, D_2 pripadaju jednoj ravni.

Analogno zaključivanje možemo ponoviti polazeći od skupova $\{B, C, D, E\}$, $\{C, D, E, A\}$, $\{D, E, A, B\}$ ili $\{E, A, B, C\}$ umesto skupa $\{A, B, C, D\}$. Ako su bar dva od parova tačaka C i E, D i A, E i B, A i C, B i D simetrični u odnosu na ravni koje se definišu analogno definiciji ravni π, onda od datih pet tačaka možemo izabrati bar dve četvorke komplanarnih tačaka, pa sledi da su i sve date tačke komplanarne.

U suprotnom, središta bar četiri od dijagonala CE, DA, EB, AC, BD pripadaju redom pravim DD_1, EE_1, AA_1, BB_1, CC_1, gde su A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 redom središta duži CD, DE, EA, AB, BC. Bar dve od te četiri dijagonale polaze iz istog temena petougla $ABCDE$. Neka su to, na primer, dijagonale CE i CA, tj. neka središta D_2 i B_2 dijagonala CE i CA pripadaju redom pravama DD_1 i BB_1. Tada su komplanarne tačke C, D, E, B_1, D_1, D_2. To isto važi i za tačke A, B, C, D_1, B_1, B_2. Prema tome, ravan određena tačkama B_1, C i D_1 sadrži svaku od tačaka A, B, C, D, E.

67.MO.5. a) Neka je $c \neq 0$ i $\sqrt{a+b} = \sqrt{a+c} + \sqrt{b+c}$. Tada je

$$a + b = a + b + 2c + 2\sqrt{a+c}\sqrt{b+c}, \quad \text{tj.} \quad c = -\sqrt{a+c}\sqrt{b+c}.$$

Zato je $c < 0$, $a \geq -c > 0$, $b \geq -c > 0$, pa dalje redom dobijamo

$$c^2 = (a+c)(b+c), \quad ab + bc + ca = 0, \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0.$$

b) Neka je $a > 0$, $b > 0$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$. Tada je $c < 0$ i $ab + bc + ca = 0$, odakle sledi $c^2 = (a+c)(b+c)$. Kako je $c < 0$, to je $c = -\sqrt{(a+c)(b+c)}$. Brojevi $a+c$ i $b+c$ su istog znaka. Ako je $a+c < 0$ i $b+c < 0$, onda je $c < -a < 0$, $c < -b < 0$, pa sledi $|c+a| < |c|$, $|b+c| < |c|$ i $(a+c)(b+c) < c^2$, što je kontradikcija. Zato je $a+c > 0$, $b+c > 0$, pa dobijamo:

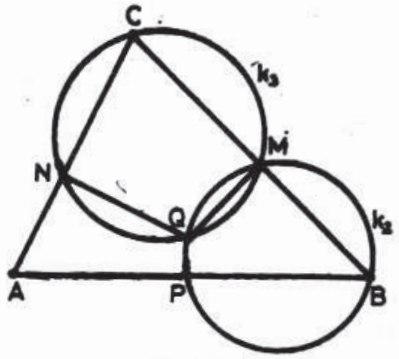
$$\begin{aligned} c &= -\sqrt{a+c}\sqrt{b+c}, \\ a+b &= a+b+2c+2\sqrt{a+c}\sqrt{b+c}, \\ a+b &= (\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c})^2 \end{aligned}$$

i konačno $\sqrt{a+b} = \sqrt{a+c} + \sqrt{b+c}$.

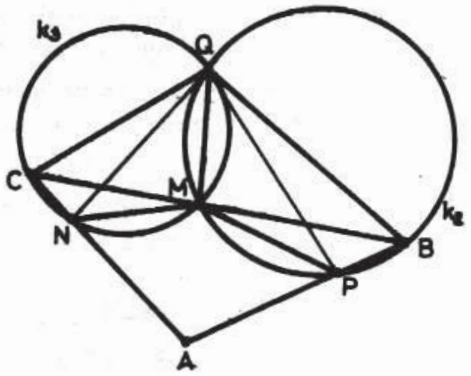
67.MO.6. Neka su k_1, k_2 i k_3 redom krugovi opisani oko trouglova APN, BMP i CNM. Razmotrimo sledeće slučajeve:

a) Krugovi k_2 i k_3 imaju dve zajedničke tačke M i Q i tačka Q se nalazi unutar trougla ABC, sl. 43. Tada je

$$\begin{aligned} \angle NAP + \angle NQP &= 180^\circ - \angle NCM - \angle PBM + 360^\circ - \angle MQN - \angle PQM \\ &= 180^\circ + 360^\circ - (\angle NCM + \angle MQN) - (\angle PQM + \angle MBP) \\ &= 180^\circ + 360^\circ - 180^\circ - 180^\circ = 180^\circ, \end{aligned}$$



Sl. 43.



Sl. 44.

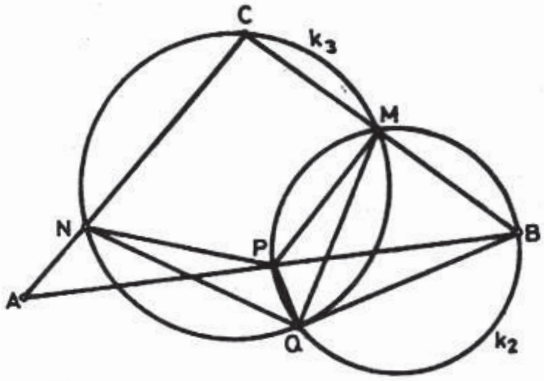
pa sledi da tačka Q pripada krugu k_1.

b) Krugovi k_2 i k_3 imaju dve zajedničke tačke M i Q i tačke A i Q se nalaze sa raznih strana prave BC, sl. 44. Tada je

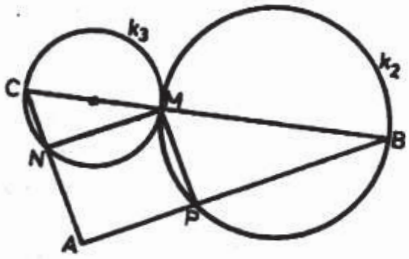
$$\begin{aligned}\angle NAP + \angle NQP &= \angle NAP + \angle NQM + \angle MQP \\ &= \angle NAP + \angle NCM + \angle MBP = 180^\circ,\end{aligned}$$

pa sledi da tačka Q pripada i krugu k_1.

c) Krugovi k_2 i k_3 imaju zajedničku tačku Q van trougla ABC, ali sa iste strane prave BC sa koje je i tačka A, sl. 45. Tada je $\angle ANQ = 180^\circ - \angle CNQ = \angle CMQ = 180^\circ - \angle QMB = 180^\circ - \angle QPB = \angle APQ$, pa tačke A, Q, P, N pripadaju istom krugu.



Sl. 45.



Sl. 46.

d) Krugovi k_2 i k_3 se dodiruju u tački M, sl. 46. Tada se centri krugova k_2 i k_3 nalaze na pravoj BC, pa je $\angle CNM = \angle MPB = 90^\circ$ i

$$\angle NAP + \angle NMP = 360^\circ - \angle MNA - \angle MPA = 180^\circ,$$

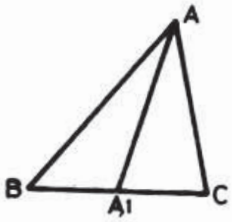
odakle sledi da tačka M pripada krugu k_1.

e) Slučaj kada krugovi k_2 i k_3 imaju zajedničke tačke M i Q, pri čemu je $Q = P$ ili $Q = N$ je jednostavan i njegovo razmatranje prepuštamo čitaocu.

67.MO.7. Neka je A_1 središte stranice BC trougla ABC, sl. 47, i neka su a, b i c prirodni brojevi, takvi da važi $BC = AA_1 = a$, $CA = b$, $AB = c$. Tada je

$$b^2 = \frac{5a^2}{4} - a^2 \cos \angle AA_1C,$$

$$c^2 = \frac{5a^2}{4} + a^2 \cos \angle AA_1C,$$



Sl. 47.

odakle sledi $5a^2/4 - b^2 = c^2 - 5a^2/4$, tj. $5a^2 = 2(b^2 + c^2)$. Iz poslednje jednakosti sledi da je a paran broj. Lako se proverava da za $a \in \{2, 4, 6, 8, 12, 14\}$ jednačina $5a^2 = 2(b^2 + c^2)$ nema rešenja u skupu prirodnih brojeva za koja važi $b + c > a$, $c + a > b$, $a + b > c$. Za $a = 10$ jedino rešenje za koje važe navedeni uslovi je $a = 10$, $\{b, c\} = \{9, 13\}$. Obim odgovarajućeg trougla je 32. Ako za prirodne brojeve a, b, c koji mogu biti dužine stranica trougla važi $5a^2 = 2(b^2 + c^2)$ i $a \geq 16$, onda je $a + b + c > a + a \geq 32$. Prema tome, dužine stranica traženog trougla su 9, 10, 13.

67.MO.8. Datu nejednakost dokazujemo metodom matematičke indukcije. Za $n = 1$ ona prima oblik $1 + a_1 \leq 1 + a_1$ i očigledno važi. Pretpostavimo da za neki prirodan broj n važi

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \leq 1 + S_n + \frac{S_n^2}{2!} + \cdots + \frac{S_n^n}{n!}. \tag{1}$$

Na osnovu binomne formule dobijamo da za nenegativne brojeve $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$ i svaki prirodan broj $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ važi

$$(a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1})^k \geq (a_1 + \cdots + a_n)^k + k(a_1 + \cdots + a_n)^{k-1} a_{n+1},$$

odakle sledi

$$\frac{S_{n+1}^k}{k!} \geq \frac{S_n^k}{k!} + \frac{S_n^{k-1}}{(k-1)!} a_{n+1}, \tag{2}$$

gde je $S_{n+1} = a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1}$. Na osnovu binomne formule takođe sledi

$$\frac{S_{n+1}^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(S_n + a_{n+1})^{n+1}}{(n+1)!} \geq \frac{(n+1) S_n^n a_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{S_n^n}{n!} a_{n+1}. \tag{3}$$

Na osnovu induktivne pretpostavke (1) i nejednakosti (2) i (3) dobijamo

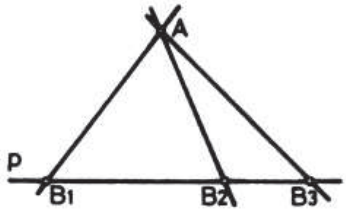
$$\begin{aligned}(1 + a_1) \cdots (1 + a_n)(1 + a_{n+1}) &\leq \left(1 + S_n + \frac{S_n^2}{2!} + \cdots + \frac{S_n^n}{n!}\right)(1 + a_n) \\ &\leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{S_n^k}{k!} + \frac{S_n^{k-1}}{(k-1)!} a_{n+1}\right) + \frac{S_n^n}{n!} a_{n+1} \\ &\leq 1 + S_{n+1} + \frac{S_{n+1}^2}{2!} + \cdots + \frac{S_{n+1}^{n+1}}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

Time je dokaz završen.

67.MO.9. Kako je $x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_nx_1 = 0$ i kako je svaki od brojeva x_1x_2, $x_2x_3, \ldots, x_nx_1$ jednak 1 ili -1, to među tim brojevima ima isti broj pozitivnih i negativnih. Zato je $n = 2k$, gde je k prirodan broj. Primetimo da među brojevima $x_1x_2, x_2x_3, \ldots, x_nx_1$ ima onoliko negativnih koliko u nizu

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ x_1$$

ima članova sa različitim predznakom od prethodnog člana. Kako su u tom nizu prvi i poslednji član jednaki x_1, to je broj promena znaka u njemu paran. Prema tome, postoji prirodan broj l takav da važi $k = 2l$, tj. $n = 4l$.



Sl. 48.

67.MO.10. Pretpostavimo da ne postoji tačka koju sadrži svaka od datih pravih. Neka je A ona od presečnih tačaka datih pravih i p ona od datih pravih za koje važi:

a) tačka A ne pripada pravoj p,

b) rastojanje od tačke A do prave p je minimalno.

Prema uslovu zadatka tačku A sadrže bar tri od datih pravih. Neka te prave seku pravu p u tačkama B_1, B_2 i B_3 i neka je, na primer, tačka B_2 između tačaka B_1 i B_3, sl. 48. Bar jedan od uglova AB_2B_1 i AB_2B_3 nije oštar. Neka je, na primer, $\angle AB_2B_3 \geq 90°$. Tada u trouglu AB_2B_3 važi $AB_3 > B_2B_3$, pa sledi $d(B_2, AB_3) < d(A, B_2B_3)$, što je kontradikcija. ($d(X, YZ)$ je oznaka za rastojanje tačke X od prave YZ.)

67.MO.11. Neka je $n \geq 7$ i neka je $S = \{A_1, A_2, \ldots, A_7\}$ podskup datog skupa tačaka. Pretpostavimo da nikojih pet od tačaka skupa S ne pripadaju jednom krugu. Neka je k_1 krug koji sadrži četiri od tačaka A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, na primer,

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4 \in k_1.$$

Neka je k_2 krug koji sadrži četiri od tačaka A_1, A_2, A_3, A_5, A_6. Tada krug k_2 ne sadrži neku od tačaka A_1, A_2, A_3, jer bi se u protivnom poklapao sa k_1 i sadržao bar pet od datih n tačaka. Neka, na primer,

$$A_2,\ A_3,\ A_5,\ A_6 \in k_2.$$

Neka je k_3 krug koji sadrži četiri od tačaka A_1, A_3, A_4, A_5, A_6. Lako se dobija $A_3 \notin k_3$, tj.

$$A_1,\ A_4,\ A_5,\ A_6 \in k_3.$$

(U ostalim slučajevima k_3 se poklapa sa nekim od krugova k_1 i k_2 i sadrži bar pet od datih n tačaka.) Neka je k_4 krug koji sadrži četiri od tačaka A_1, A_2, A_3, A_5, A_7. Tada krug k_4 sadrži tačku A_1 (inače se poklapa sa k_2 i sadrži pet od datih tačaka) i ne sadrži svaku od tačaka A_1, A_2, $A_3 \in k_1$. Neka, na primer,

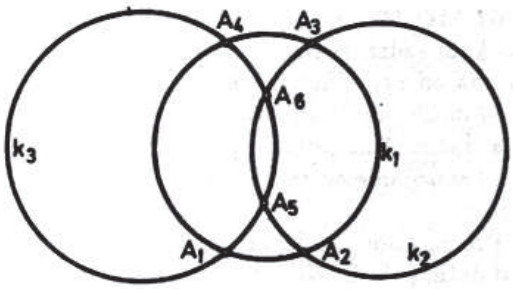
$$A_1,\ A_3,\ A_5,\ A_7 \in k_4.$$

Neka su k_5, k_6, k_7 krugovi koji sadrže po četiri tačke redom iz sledećih petočlanih skupova

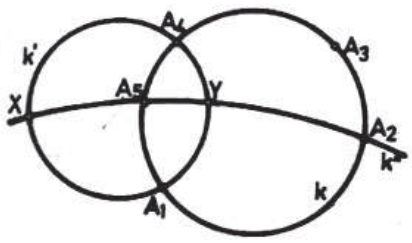
$$\{A_2, A_3, A_4, A_5, A_7\}, \quad \{A_1, A_2, A_5, A_6, A_7\}, \quad \{A_3, A_4, A_5, A_6, A_7\}.$$

Lako se dokazuje da važi

$$A_2,\ A_4,\ A_5,\ A_7 \in k_5, \qquad A_1,\ A_2,\ A_6,\ A_7 \in k_6, \qquad A_3,\ A_4,\ A_6,\ A_7 \in k_7.$$



Sl. 49.



Sl. 50.

Pretpostavimo da se tačke A_1, A_2, A_3, A_4 u zapisanom redosledu pojavljuju na krugu k_1, sl. 49. Kako krug k_2 sadrži tačke A_2 i A_3, a krug k_3 sadrži tačke A_1 i A_4, to se zajedničke tačke A_5 i A_6 tih krugova obe nalaze unutar ili obe van kruga k_1. Pretpostavimo da su tačke A_5 i A_6 unutar kruga k_1. Tada se i tačka A_7 nalazi unutar kruga k_1, jer

$$A_6,\ A_7 \in k_6 \cap k_7, \quad A_1,\ A_2 \in k_6, \quad A_3,\ A_4 \in k_7.$$

Međutim, kako A_1, $A_3 \in k_4$, A_2, $A_4 \in k_5$ i A_5, $A_7 \in k_4 \cap k_5$, to se jedna od tačaka A_5 i A_7 nalazi unutar, a druga van kruga k_1. Dobijena kontradikcija dokazuje da bar pet od tačaka skupa S pripada jednom krugu. Pretpostavimo da krug k sadrži tačke A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. Neka su X i Y neke dve od datih tačaka za koje važi X, $Y \notin \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$. Pretpostavimo $X \notin k$, $Y \notin k$.

Neka je k' krug koji sadrži četiri od tačaka A_1, A_4, A_5, X, Y, a k'' krug koji sadrži četiri od tačaka A_2, A_3, A_5, X, Y. Tada jedna od tačaka A_1, A_4, A_5 ne pripada krugu k'. Neka, na primer, A_1, A_4, X, $Y \in k'$, sl. 50. Slično, jedna od tačaka A_2, A_3, A_5 ne pripada krugu k''. Neka, na primer, A_2, A_5, X, $Y \in k''$. Tada nikoje četiri od tačaka A_3, A_4, A_5, X, Y ne pripadaju jednom krugu, što je kontradikcija. Prema tome, najviše jedna od tačaka X i Y ne pripada krugu k, pa lako sledi da najviše jedna od svih n tačaka ne pripada krugu k.

Za $n = 6$ tvrđenje ne važi, sl. 49, za $n \leq 5$ očigledno važi, a za $n < 5$ gubi smisao.

68.2.1. Da bi leva strana jednačine bila definisana, mora biti $x \geq 1/5$ i $y \geq 1/5$, odnosno, s obzirom da x i y teba da budu celi brojevi, $x \geq 1$ i $y \geq 1$. Takođe, mora biti $x - \frac{1}{5} \leq 5$ i $y - \frac{1}{5} \leq 5$, odnosno $x \leq 5$ i $y \leq 5$. Potražimo ona rešenja jednačine za koja je $x \leq y$; označimo $y = x + k$. Tada tražimo rešenja jednačine

$$\sqrt{x + k - \frac{1}{5}} = \sqrt{5} - \sqrt{x - \frac{1}{5}}$$

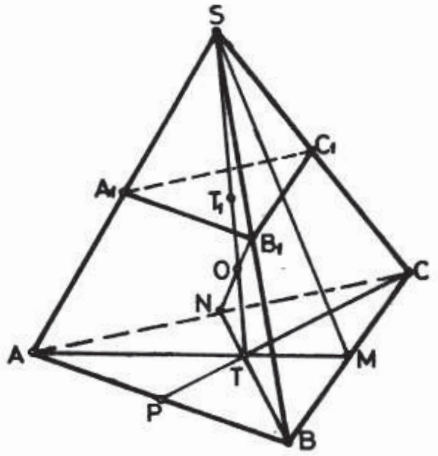
za koja je $x \in \{1, \ldots, 5\}$, $k \in \{0, \ldots, 5 - x\}$. Poslednja jednačina se, posle dvostrukog kvadriranja, transformiše u

$$x = \frac{k^2 - 10k + 29}{20},$$

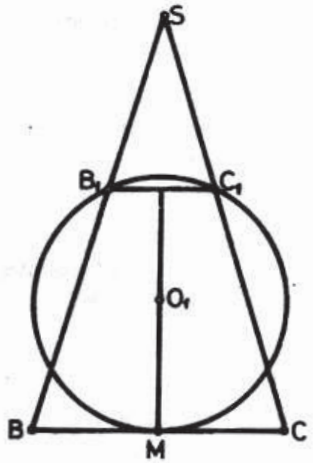
što pri datim uslovima ima jedino rešenje $k = 1$, $x = 1$. Dakle, jedina moguća rešenja date jednačine su $x = 1$, $y = 2$ i $x = 2$, $y = 1$. Lako se proverava da ona zaista zadovoljavaju jednačinu.

68.2.2. Da bi tangentne duži iz tačaka C i D na neki krug bile jednake, neophodno je i dovoljno da su tačke C i D podjednako udaljene od centra tog kruga. Dakle, centar traženog kruga pripada simetrali duži CD, tj. nalazi se u preseku simetrala duži AB i CD.

Konstrukciju i dokaz prepuštamo čitaocu. Zadatak ima rešenja ako simetrale duži AB i CD imaju (jednu ili više) zajedničkih tačaka i ako krug sa centrom u nekoj od tih tačaka koji sadrži A i B ne sadrži u svojoj unutrašnjosti tačke C i D.



Sl. 51.



Sl. 52.

68.2.3. a) Neka je $SABC$ data piramida (sa vrhom S), A_1, B_1, C_1, M, N, P redom središta duži SA, SB, SC, BC, CA, AB; dalje neka je s data sfera i k i

k_1 redom njeni preseci sa ravnima ABC i B_1MC_1. Kako su prave BC, CA i AB tangente na sferu s, to su one tangente i na krug k (redom u tačkama M, N i P). Zato je

$$AB = 2AP = 2AN = AC = 2CN = 2CM = BC,$$

tj. trougao ABC je jednakostraničan. Dalje, ako je O_1 središte kruga k_1, onda su tačke B i B_1 simetrične tačkama C i C_1 u odnosu na pravu O_1M, sl. 52, pa sledi

$$B_1B = C_1C, \quad \text{tj.} \quad SB = SC.$$

Analogno je $SA = SB$. Time je dokazano da je $SABC$ pravilna piramida.

b) Neka je O centar date sfere, R njen poluprečnik, T i T_1 težišta trouglova ABC i $A_1B_1C_1$, $h = ST$, $y = OT$, $a = AB = SM$, sl. 51. Tada je

$$h^2 = SM^2 - MT^2 = a^2 - \left(\frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{11}{12}a^2.$$

Kako su trouglovi OTP i OT_1A_1 pravougli (sa pravim uglovima kod temena T i T_1), to je

$$R^2 = OT^2 + TP^2 = OT_1^2 + A_1T_1^2,$$
$$y^2 + \left(\frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{h}{2} - y\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2.$$

Dalje lako dobijamo $h/2 - y = y$, tj. $y = h/4$ i $R = 3a/8$.

68.2.4. Za dato $a \geq 0$ uvek postoje realne vrednosti za x sa proizvoljno velikom apsolutnom vrednošću koje zadovoljavaju datu nejednačinu. Pretpostavimo zato da je $a < 0$. Tada je uslov naveden u zadatku ekvivalentan uslovu da jednačina

$$ax^2 + (1 - a^2)x - a = 0$$

ima oba korena po apsolutnoj vrednosti manja ili jednaka od 2 (lako se proverava da su njeni koreni uvek realni i različiti). Kako su ti koreni $x_1 = a$ i $x_2 = -1/a$, to je navedeni uslov ispunjen ako i samo ako je $-2 \leq a \leq -1/2$.

68.3.1. Sistem ima smisla ako i samo ako je $m, n \in \mathbf{R}$ i $a > 0$, $a \neq 1$. Pri tom nepoznate treba da zadovoljavaju uslove $x, y > 0$ i $y \neq 1$.

Ako uvedemo smenu $\log_a x = x_1$, $\log_a y = y_1$, dati sistem se može napisati u obliku

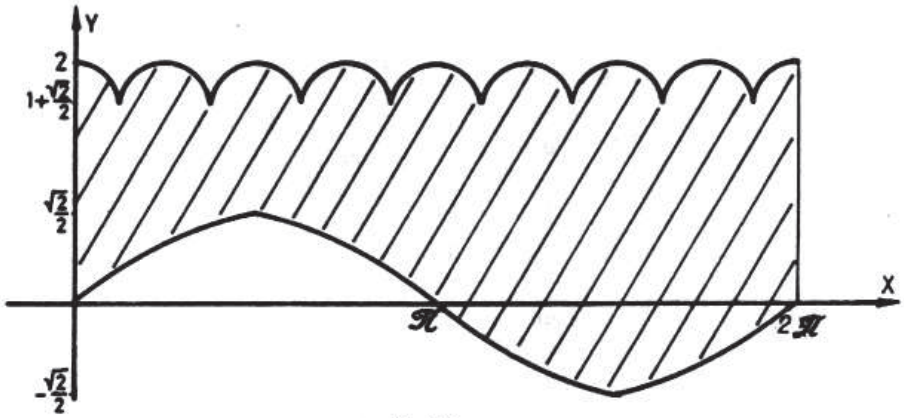
$$mx_1 = ny_1, \quad x_1 - y_1 = \frac{x_1}{y_1}. \tag{1}$$

U slučaju da je $m = 0$, mora biti i $n = 0$ (jer nije dozvoljeno $y_1 = 0$). Tada se sistem svodi na jednačinu $x_1 - y_1 = x_1/y_1$ čija rešenja su parovi oblika $\left(\frac{y_1^2}{y_1 - 1}, y_1\right)$ za $y_1 \neq 1$, pa su rešenja datog sistema u tom slučaju svi parovi oblika

$$\left(y^{\frac{\log_a y}{\log_a y - 1}}, y\right), \quad y > 0,\ y \neq 1,\ y \neq a.$$

Pretpostavimo sada da je $m \neq 0$. Rešavanjem sistema (1) tada dobijamo da za $m = n$ nema rešenja, a za $m \neq n$ rešenje je par $\left(\frac{n^2}{m(n-m)}, \frac{n}{n-m}\right)$. Tada je rešenje datog sistema

$$\left(a^{\frac{n^2}{m(n-m)}}, a^{\frac{n}{n-m}}\right).$$



Sl. 53.

68.3.2. Data relacija može se napisati u obliku

$$\frac{1}{2}\left(\left|\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right| - \left|\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right|\right) \leq y$$
$$\leq 1 + \frac{1}{2}(|\sin 2x + \cos 2x| + |\sin 2x - \cos 2x|).$$

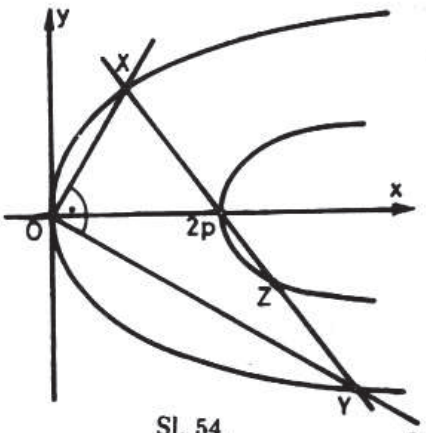
Leva strana ove dvostruke nejednakosti ima vrednosti:

$$L = \begin{cases} \sin(x/2), & \text{za } x \in [0, \pi/2], \\ \cos(x/2), & \text{za } x \in (\pi/2, 3\pi/2], \\ -\sin(x/2), & \text{za } x \in (3\pi/2, 2\pi], \end{cases}$$

a desna:

$$D = \begin{cases} 1 + \cos 2x, & \text{za } x \in [0, \pi/8] \cup (7\pi/8, 9\pi/8] \cup (15\pi/8, 2\pi], \\ 1 + \sin 2x, & \text{za } x \in (\pi/8, 3\pi/8] \cup (9\pi/8, 11\pi/8], \\ 1 - \cos 2x, & \text{za } x \in (3\pi/8, 5\pi/8] \cup (11\pi/8, 13\pi/8], \\ 1 - \sin 2x, & \text{za } x \in (5\pi/8, 7\pi/8] \cup (13\pi/8, 15\pi/8]. \end{cases}$$

Skup tačaka ravni xOy za koje je $0 \leq x \leq 2\pi$ i $L \leq y \leq D$ prikazan je na sl. 53.



Sl. 54.

68.3.3. a) Neka prava OX ima jednačinu $y = tx$, $t > 0$; tada prava OY ima jednačinu $y = -\frac{1}{t}x$. Njihovi preseci sa datom parabolom (osim tačke O) su

$$X\left(\frac{2p}{t^2}, \frac{2p}{t}\right), \quad Y(2pt^2, -2pt).$$

Zato središte Z duži XY ima koordinate

$$x = p\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right), \quad y = p\left(-t + \frac{1}{t}\right).$$

Eliminacijom parametra t dobijamo jednačinu traženog geometrijskog mesta

$$y^2 = p(x - 2p).$$

Lako se proverava da svaka tačka te parabole jeste središte jedne od opisanih duži XY.

b) Prava XY ima jednačinu

$$\left(x - \frac{2p}{t^2}\right) : \left(t^2 - \frac{1}{t^2}\right) = \left(y - \frac{2p}{t}\right) : \left(-t - \frac{1}{t}\right).$$

Direktno se proverava da tu jednačinu, za proizvoljno t, zadovoljavaju koordinate tačke $(2p, 0)$.

68.3.4. a) Iz datog identiteta (koji se dokazuje direktnom proverom) sledi

$$xy + yz + zx = \frac{1}{3}\left[(x+y+z)^2 - \frac{1}{2}\left((x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\right)\right] \le \frac{1}{3}s^2,$$

pri čemu se jednakost postiže ako i samo ako je $x = y = z = s/3$. Dakle, tražena maksimalna vrednost je $s^2/3$ ako su x, y i z jednaki među sobom.

b) Tvrđenje zadatka sledi iz dvostruke nejednakosti:

$$(x+y+z)^2 \ge x^2 + y^2 + z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy + yz + zx) \ge s^2 - \frac{2}{3}s^2 = \frac{1}{3}s^2,$$

pri čemu se jednakost na prvom mestu postiže ako i samo ako su dva od brojeva x, y, z jednaki nuli, a na drugom ako i samo ako je $x = y = z$.

68.4.1. Iz $q \mid p-1$ sledi $q < p$, pa kako je p prost, iz $p \mid q^3 - 1 = (q-1)(q^2+q+1)$ i $p > q-1$, sledi $p \mid q^2 + q + 1$. Neka je $q^2 + q + 1 = kp$ i, suprotno tvrđenju, $k > 1$. Tada iz $q \mid p - 1$ dobijamo $p - 1 = lq$ za neko $l \in \mathbf{N}$, pa je

$$q^2 + q + 1 = k(lq + 1) = klq + k.$$

Odatle sledi $q \mid k - 1$, pa je $k \ge q + 1$. No, onda je

$$q^2 + q + 1 \ge (q+1)(lq+1) \ge q^2 + 2q + 1,$$

što je nemoguće. Dakle, mora biti $k = 1$ i $p = q^2 + q + 1$.

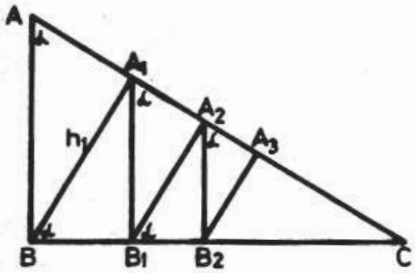
68.4.2. Neka se, pod datim uslovima, može formirati n ekipa. Uočimo sve dvočlane podskupove skupa od 25 učenika — njih ima $\binom{25}{2} = 300$. Svaka od n ekipa sadrži po $\binom{5}{2} = 10$ takvih dvočlanih podskupova. Zbog uslova zadatka dva para iz različitih ekipa su različita, pa mora biti $10n \leq 300$, tj. $n \leq 30$.

Napomena: Može se dokazati da se može formirati 30 ekipa na opisani način, tj. da je $n = 30$.

68.4.3. a) Lako se izvodi da je poluprečnik upisanog kruga pravouglog trougla sa hipotenuzom c i oštrim uglom α jednak $\frac{c}{2}(\sin\alpha + \cos\alpha - 1)$. Dati trouglovi

$$ABA_1,\ BA_1B_1,\ A_1B_1A_2,\ B_1A_2B_2, \ldots$$

su pravougli sa oštrim uglom α i hipotenuzama jednakim redom (sl. 55)



Sl. 55.

$$\frac{h_1}{\sin\alpha},\quad h_1,\quad h_1\sin\alpha,\quad h_1\sin^2\alpha,\quad \ldots.$$

Zato je traženi zbir površina njihovih upisanih krugova:

$$S = \frac{\pi}{4}h_1^2(\sin\alpha + \cos\alpha - 1)^2\left[\frac{1}{\sin^2\alpha} + 1 + \sin^2\alpha + \cdots\right]$$
$$= \frac{\pi}{4}h_1^2\left(\frac{\sin\alpha + \cos\alpha - 1}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)^2.$$

b) Izraz u poslednjoj zagradi ima na intervalu $\alpha \in (0, \pi/2)$ maksimum za $\alpha = \pi/4$ koji iznosi $4(3 - 2\sqrt{2})$, pa je $S_{\max} = \pi h_1^2(3 - 2\sqrt{2})$.

68.MO.1. Pretpostavimo najpre da postoje tri od datih šest tačaka (neka su to A, B i C) koje pripadaju jednoj pravoj i neka je B između A i C. Tada je

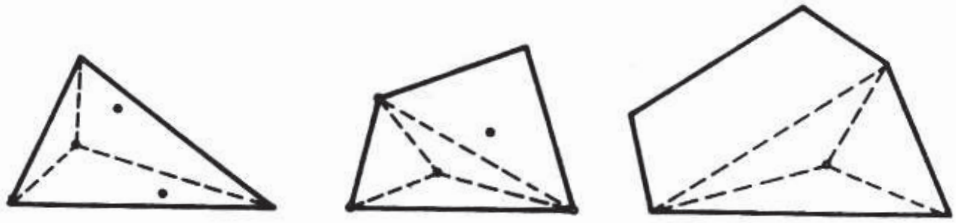
$$d \geq AC \geq 2\min\{AB, BC\} \geq 2\delta,$$

odakle je $d/\delta \geq 2 > \sqrt{3}$.

Neka sada među datim tačkama ne postoje tri kolinearne. Dokazaćemo da neke tri od njih obrazuju trougao čiji je jedan ugao veći ili jednak 120°.

Formirajmo konveksni omotač datih šest tačaka, tj. najmanji konveksan skup koji ih sadrži. On može biti trougao, četvorougao, petougao ili šestougao. Razmotrimo posebno svaki od tih slučajeva.

U slučajevima da je taj konveksni omotač trougao, četvorougao ili petougao, sl. 56, bar jedna od datih tačaka leži unutar tog omotača, pa je jasno da postoji trougao čija su temena date tačke, unutar koga se nalazi jedna od datih tačaka. Ako tu tačku spojimo sa temenima trougla u kome se nalazi, zbir triju uglova



Sl. 56.

čije je teme uočena tačka biće 360°, pa je bar jedan od njih veći ili jednak 120°. Odgovarajući trougao zadovoljava postavljene zahteve.

Ako datih šest tačaka obrazuju konveksan šestougao, zbir uglova tog šestougla je 720°, pa je bar jedan od njih veći ili jednak 120°.

Uočimo sada trougao čija je egzistencija dokazana; neka su njegova temena A, B i C i neka je $\angle BCA \geq 120°$. U njemu je

$$d \geq AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos \angle BCA} \geq \sqrt{\delta^2 + \delta^2 + 2\delta^2 \cdot 1/2} = \delta\sqrt{3},$$

čime je dokazano da je $d/\delta \geq \sqrt{3}$.

Napomena: Dokazana procena $d/\delta \geq \sqrt{3}$ nije najbolja moguća. Može se dokazati da važi $d/\delta \geq 2\cos 18° \approx 1,90$, pri čemu se jednakost postiže ako su pet od datih tačaka temena pravilnog petougla, a šesta je njegovo središte.

68.MO.2. Dokažimo najpre da je navedeni uslov dovoljan. Pretpostavimo, dakle, da je za neko $\alpha \in \mathbf{N}$ ispunjeno $n! = n(n-1)(\alpha n + 1)$, tj. $(n-2)! = \alpha n + 1$ i da, suprotno tvrđenju, broj n nije prost. Neka je p bilo koji njegov prost delilac. Tada je $1 \leq p \leq n-2$, pa $p \mid (n-2)!$. Međutim, $\alpha n + 1$ nije deljivo sa p jer $p \mid n$. Ova kontradikcija dokazuje da n mora biti prost broj.

Da bismo dokazali da je uslov dat u zadatku neophodan, dokažimo najpre sledeća dva pomoćna tvrđenja:

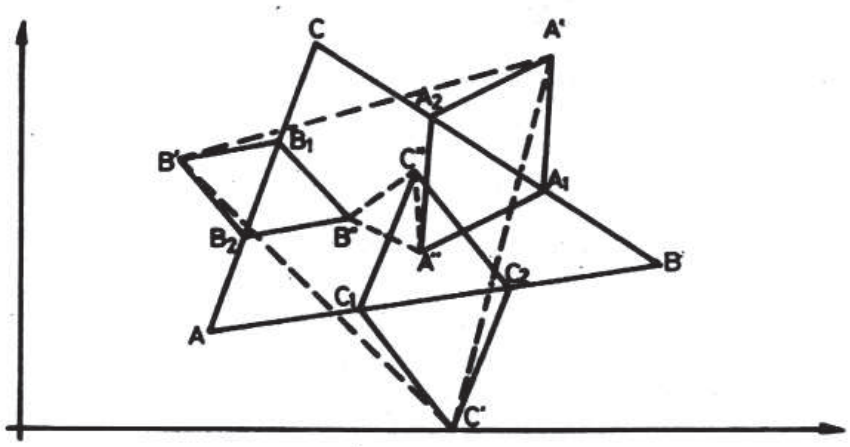
LEMA 1. Neka su a i m uzajamno prosti prirodni brojevi. Tada brojevi a, $2a$, $\ldots$, ma, uzeti u nekom poretku, daju ostatke $0, 1, \ldots, m-1$ pri deljenju sa m.

LEMA 2. Ako je p prost broj, tada za svaki ceo broj k, $2 \leq k \leq p-2$, postoji tačno jedan ceo broj l, $2 \leq l \leq p-2$, takav da je $kl \equiv 1 \pmod{p}$, pri čemu je $l \neq k$.

Za dokaz leme 1 primetimo da brojeva $a, 2a, \ldots, ma$ ima koliko i ostataka $0, 1, \ldots, m-1$, pa je dovoljo dokazati da ne postoje različiti brojevi k i l, $1 \leq k, l \leq m$, takvi da ka i la daju isti ostatak pri deljenu sa m. Međutim, ako bi bilo $ka \equiv la \pmod{m}$, tj. $m \mid (k-l)a$, s obzirom da su a i m uzajamno prosti, a $|k-l| < m$, sledilo bi $k - l = 0$, što je isključeno.

Na osnovu leme 1, za $2 \leq k \leq p-2$, brojevi k, $2k$, ..., pk daju, u nekom poretku, ostatke 0, 1, ..., $p-1$ pri deljenju sa p. Međutim, $k \not\equiv 1 \pmod p$, $(p-1)k \equiv p-k \not\equiv 1 \pmod p$ i $pk \equiv 0 \pmod p$, pa znači jedan (i samo jedan) od brojeva kl ($l = 2, 3, \ldots, p-2$) daje ostatak 1 pri deljenju sa p. Da ne može biti $l = k$ dokazujemo na sledeći način: kongruencija $k^2 \equiv 1 \pmod p$ ekvivalentna je sa $(k-1)(k+1) \equiv 0 \pmod p$, što povlači $k \equiv 1 \pmod p$ ili $k \equiv -1 \pmod p$, a oboje je isključeno pretpostavkom $2 \leq k \leq p-2$.

Iz dokazane leme 2 neposredno sledi da ako je n prost broj, onda se činioci 2, 3, ..., $n-2$ proizvoda $(n-2)!$ dele na $(n-3)/2$ para, tako da proizvod članova svakog od parova daje ostatak 1 pri deljenju sa n. Zato je i $(n-2)! \equiv 1 \pmod n$, što i znači da je za neko $\alpha \in \mathbf{N}$ ispunjeno $n! = n(n-1)(\alpha n + 1)$.



Sl. 57.

68.MO.3. a) Neka se dati trougao nalazi u kompleksnoj ravni i neka njegovim temenima A, B, C odgovaraju, redom, kompleksni brojevi a, b, c. Tada tačkama C_1 i C_2 (označenim na sl. 57) odgovaraju, redom, brojevi

$$a + \frac{b-a}{3} = \frac{2a+b}{3} \quad \text{i} \quad \frac{2a+b}{3} + \frac{b-a}{3} = \frac{a+2b}{3}.$$

Tačka C' se dobija rotacijom tačke C_2 oko tačke C_1 za $-\pi/3$, pa njoj odgovara broj $\frac{2a+b}{3} + \frac{b-a}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$. Na sličan način se dobija da tačkama A', B', A'', B'', C'' odgovaraju kompleksni brojevi:

$$\begin{aligned}
A' &: \quad \frac{2b+c}{3} + \frac{c-b}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right), \\
B' &: \quad \frac{2c+a}{3} + \frac{a-c}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right), \\
A'' &: \quad \frac{2b+c}{3} + \frac{c-b}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right),
\end{aligned}$$

$$B'' \quad : \quad \frac{2c+a}{3} + \frac{a-c}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right),$$
$$C'' \quad : \quad \frac{2a+b}{3} + \frac{b-a}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Rotacijom tačke B' oko tačke A' za $\pi/3$ dobija se tačka kojoj odgovara kompleksan broj

$$\frac{2b+c}{3} + \frac{c-b}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) + \frac{c+a-2b}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) + \frac{a+b-2c}{3}$$
$$= \frac{2a+b}{3} + \frac{b-a}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right),$$

dakle tačka C'. Zato je trougao $A'B'C'$ jednakostraničan. Na sličan način se dokazuje i da je trougao $A''B''C''$ jednakostraničan.

b) Težištu T trougla ABC odgovara kompleksan broj $\frac{1}{3}(a+b+c)$, težištu T' trougla $A'B'C'$ broj

$$\frac{1}{3}\left[\frac{3a+3b+3c}{3} + 0\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right] = \frac{1}{3}(a+b+c),$$

a isti broj odgovara i težištu T'' trougla $A''B''C''$, čime je tvrđenje zadatka dokazano.

68.MO.4. Bez ograničenja opštosti možemo pretpostaviti da je $k = 0$ (inače bismo umesto datog polinoma P koji uzima celobrojne vrednosti u tačkama k, $k+1$, $\ldots$, $k+n$, posmatrali polinom $P_1(x) = P(x+k)$ koji uzima celobrojne vrednosti u tačkama $0, 1, \ldots, n$).

Tvrđenje zadatka ćemo dokazati indukcijom po n. Pretpostavimo, najpre, da je $P(x) = ax + b$ polinom prvog stepena, takav da su $P(0) = b$ i $P(1) = a + b$ celi brojevi. Tada je i a ceo broj, pa polinom P zaista za svako celobrojno x uzima celobrojnu vrednost.

Pretpostavimo sada da svaki polinom Q stepena $n-1$ koji u tačkama $0, 1, \ldots, n-1$ uzima celobrojne vrednosti, uzima takođe celobrojne vrednosti u svim celobrojnim tačkama. Neka je P polinom stepena n, takav da su $P(0), P(1), \ldots, P(n)$ celi brojevi. Tada je

$$Q(x) = P(x+1) - P(x)$$

polinom stepena $n-1$ (zašto?), takav da su

$$Q(0) = P(1) - P(0), \quad Q(1) = P(2) - P(1), \quad \ldots, \quad Q(n-1) = P(n) - P(n-1)$$

celi brojevi. Na osnovu induktivne pretpostavke zaključujemo da polinom Q uzima celobrojne vrednosti za svako celobrojno x. No, odatle sledi da i polinom P ima tu osobinu — to se može, na primer, zaključitl indukcijom po $x \in \mathbb{Z}$, jer je

$$P(n+1) = Q(n) + P(n), \quad P(-1) = P(0) - Q(-1)$$

i tako dalje.

68.MO.5. a) Datu sumu napišimo u obliku

$$S(x,n) = \sum_{\substack{p,q=1\\ p\neq q}}^{n} (x+p)(x+q) = \sum_{\substack{p,q=1\\ p\neq q}}^{n} \left(x^2 + (p+q)x + pq\right) = Ax^2 + Bx + C,$$

gde su A, B, C koeficijenti koje treba odrediti. Parova (p,q) za koje je p, $q \in \{1,2,\dots,n\}$ i $p \neq q$ ima $n^2 - n$, pa je $A = n^2 - n$.

q						
n	$n+1$	$n+2$	$n+3$	$\dots$	$2n-1$	$2n$
$n-1$	n	$n+1$	$n+2$	$\dots$	$2n-2$	$2n-1$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
3	4	5	6	$\dots$	$n+2$	$n+3$
2	3	4	5	$\dots$	$n+1$	$n+2$
1	2	3	4	$\dots$	n	$n+1$
	1	2	3		$n-1$	n $\quad p$

Sl. 58.

Da bismo izračunali koeficijent B, poređajmo sve zbirove $p+q$ u tablicu kao na sl. 58 (tu se nalaze i oni za koje je $p = q$). Odatle se lako vidi da je

$$\begin{aligned} B &= 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + (n-1)n + n(n+1) + (n-1)(n+2) + \cdots \\ &\quad + 2(2n-1) + 2n - (2 + 4 + \cdots + 2n) \\ &= (2+2n) + 2(2+2n) + 3(2+2n) + \cdots + (n-1)(2+2n) + n(n+1) \\ &\quad - 2(1 + 2 + \cdots + n) \\ &= 2(n+1)\frac{(n-1)n}{2} + n(n+1) - 2\frac{n(n+1)}{2} = (n-1)n(n+1). \end{aligned}$$

q						
n	n	$2n$	$3n$	$\dots$	$(n-1)n$	n^2
$n-1$	$n-1$	$2n-2$	$3n-3$	$\dots$	$(n-1)^2$	$(n-1)n$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
3	3	6	9	$\dots$	$3n-3$	$3n$
2	2	4	6	$\dots$	$2n-2$	$2n$
1	1	2	3	$\dots$	$n-1$	n
	1	2	3		$n-1$	n $\quad p$

Sl. 59.

Na sličan način, koristeći tablicu na sl. 59 u kojoj su zapisani svi proizvodi pq, dobijamo

$$\begin{aligned} C &= (1 + 2 + \cdots + n) + 2(1 + 2 + \cdots + n) + \cdots + n(1 + 2 + \cdots + n) \\ &\quad - (1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) \\ &= \frac{n(n+1)}{2}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{12}(n-1)n(n+1)(3n+2). \end{aligned}$$

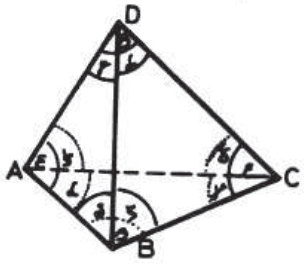
Dakle je

$$S(x,n) = (n-1)nx^2 + (n-1)n(n+1)x + \frac{1}{12}(n-1)n(n+1)(3n+2).$$

b) Rešavajući jednačinu $S(x,n) = 0$ dobijamo

$$x = \frac{-(n+1) \pm \sqrt{(n+1)/3}}{2},$$

što će (za celobrojno n) biti celi brojevi ako i samo ako je $n = 3k^2 - 1$, $k \in \mathbf{N}$.



Sl. 60.

68.MO.6. Pretpostavimo najpre da se centri sfera S i S' poklapaju. Tada su strane datog tetraedra podjednako udaljene od centra S opisane sfere, pa su preseci odgovarajućih ravni sa opisanom sferom podudarni krugovi. Uglovi BAC i BDC su, dakle, periferijski uglovi u podudarnim krugovima nad tetivom BC, sl. 60, pa su međusobno jednaki — označimo njihovu vrednost sa α. Na sličan način dobijamo da je

$$\angle CBA = \angle CDA = \beta, \quad \angle ACB = \angle ADB = \gamma, \quad \angle ABD = \angle ACD = \delta,$$
$$\angle BCD = \angle BAD = \varepsilon, \qquad \angle CBD = \angle CAD = \zeta.$$

Iz trouglova ABC, BCD, CDA i DAB dobijamo:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ, \quad \alpha + \varepsilon + \zeta = 180^\circ, \quad \beta + \delta + \zeta = 180^\circ, \quad \gamma + \delta + \varepsilon = 180^\circ.$$

Iz prve dve jednačine ovog sistema sledi da je $\beta + \gamma = \varepsilon + \zeta$, a iz druge dve $\beta + \zeta = \gamma + \varepsilon$. Iz te dve relacije dobijamo da je $\beta = \varepsilon$ i $\gamma = \zeta$. To ima za posledicu da su trouglovi ABC i DCB podudarni, odakle je $AB = DC$ i $CA = BD$. Slično se dokazuje i da je $BC = DA$.

Neka je sada ispunjen uslov jednakosti mimoilaznih ivica. To znači da su strane tetraedra međusobno podudarni trouglovi, pa su i oko njih opisani krugovi podudarni. Dakle, te strane su podjednako udaljene od centra S opisane sfere oko tetraedra, što znači da se centar S' upisane sfere poklapa sa S.

69.2.1. Ako je $m \neq -1$, onda je data jednačina ekvivalentna sa jednačinom

$$x^2 - \frac{5m+6}{m+1}x + \frac{6m+5}{m+1} = 0$$

i ima rešenja x_1 i x_2 za koja važe jednakosti

$$x_1 + x_2 = \frac{5m+6}{m+1} = 5 + \frac{1}{m+1},$$
$$x_1 x_2 = \frac{6m+5}{m+1} = 6 - \frac{1}{m+1}.$$

Sabiranjem ovih jednakosti dobijamo

$$x_1 + x_2 + x_1x_2 = 11.$$

69.2.2. Ako je $n = 2k+1$, gde $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$, onda je

$$3^{3n} + 2^{3n} = 27^{2k+1} + 8^{2k+1} = (27+8)\sum_{j=0}^{2k}(-1)^j 27^{2k-j} 8^j,$$

pa je broj $3^{3n} + 2^{3n}$ deljiv sa $27 + 8 = 35$.

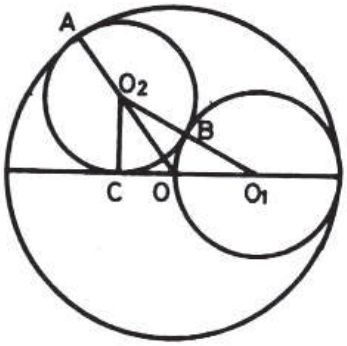
Ako je $n = 2k$, gde $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$, onda je

$$3^{3n} - 2^{3n} = 3^{6k} - 2^{6k} = 729^k - 64^k = (729-64)\sum_{j=0}^{k-1} 729^{k-1-j} 64^j$$

$$= 35 \cdot 19 \sum_{j=1}^{k-1} 729^{k-1-j} 64^j,$$

pa je broj $3^{3n} - 2^{3n}$ deljiv sa 35.

69.2.3. Označimo sa k i k_1 redom date krugove sa centrima O i O_1. Pretpostavimo da krug k_2 sa centrom O_2 i poluprečnikom x dodiruje krugove k i k_1 i pravu OO_1 redom u tačkama A, B i C, sl. 61. Označimo $OC = c$. Kako je $O_1O_2 = R/2 + x$, $OO_2 = R - x$, $O_2C = x$, $CO_1 = R/2 + c$ i kako su trouglovi O_2CO i O_2CO_1 pravougli (sa pravim uglom kod temena C), to na osnovu Pitagorine teoreme dobijamo



Sl. 61.

$$\left(\frac{R}{2} + c\right)^2 + x^2 = \left(\frac{R}{2} + x\right)^2,$$

$$c^2 + x^2 = (R - x)^2,$$

tj. $Rc + c^2 = Rx$, $c^2 = R^2 - 2Rx$. Eliminacijom c iz ovih jednakosti dobijamo $x = 4R/9$. Primetimo da je $O_1O_2 = 17R/18$, $OO_2 = 5R/9$.

Konstrukcija. Konstruišimo krug k_3 sa centrom O_1 i poluprečnikom $17R/18$ i krug k_4 sa centrom O i poluprečnikom $5R/9$. Neka je O_2' presek krugova k_3 i k_4. Konstruišimo krug k_2' sa centrom O_2' i poluprečnikom $4R/9$. Tada je k_2' traženi krug.

Dokaz. Krugovi k_3 i k_4 se seku jer brojevi $17R/18$, $5R/9$ i $R/2$ zadovoljavaju potreban i dovoljan uslov da mogu biti stranice trougla. Kako je $\left(\frac{17}{18}R\right)^2 > \left(\frac{5}{9}R\right)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2$, to je $O_1O_2'O$ tupougli trougao sa tupim uglom kod temena O.

Prema tome, tačka O se nalazi između tačke O_1 i podnožja C' visine trougla $O_1O_2'O$ iz temena O_2'. Označimo $C'O = c'$ i $C'O_2' = h$. Kako su trouglovi $O_2'C'O$ i $O_2'C'O_1$ pravougli sa pravim uglom kod temena C', to je

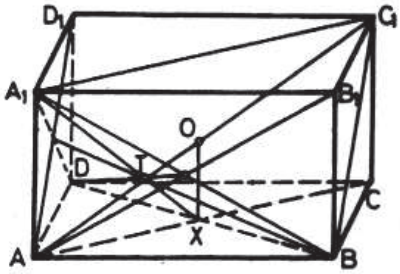
$$h^2 = \left(\frac{5}{9}R\right)^2 - c'^2 = \left(\frac{17}{18}R\right)^2 - \left(\frac{R}{2} + c'\right)^2.$$

Dalje lako dobijamo $c' = R/3$ i $h = 4R/9$, pa krug k_2' dodiruje pravu OO_1. Iz jednakosti $O_1O_2' = \frac{17}{18}R = \frac{R}{2} + \frac{4}{9}R$ sledi da krug k_2' dodiruje krug k_1. Kako je

$$OO_2' = \sqrt{c'^2 + h^2} = \frac{5}{9}R = R - \frac{4}{9}R,$$

to se i krugovi k_2' i k dodiruju.

Diskusija. Krugovi k_1 i k_2' imaju dve presečne tačke, pa zadatak ima dva rešenja.



Sl. 62.

69.2.4. Neka je $ABDA_1$ data piramida i neka su svi ivični uglovi kod temena A pravi. Neka je dalje $ABCDA_1B_1C_1D_1$ paralelepiped (sa jednom stranom $ABCD$ i ivicama BB_1, CC_1, DD_1), sl. 62. Neka je O središte duži AC_1 i T težište trougla A_1BD. Tada je O centar opisane sfere oko paralelepipeda $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (pa prema tome i oko piramide $ABDA_1$). Prava AC_1 je presek sledeće tri ravni:

$$ABC_1D_1, \quad ACC_1A_1, \quad ADC_1B_1.$$

Kako središte X duži BD pripada pravoj AC, to težišna duž A_1X trougla A_1BD pripada ravni ACC_1A_1. Slično se dokazuje da i ravni ABC_1D_1 i ADC_1B_1 sadrže po jednu težišnu duž trougla A_1BD. Prema tome, tačka T pripada preseku te tri ravni, tj. pravoj AO.

69.3.1. Primenjujući kosinusnu i Pitagorinu teoremu dobijamo

$$\cos\alpha = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{a^2 + b^2 + a^2 + c^2 - b^2 - c^2}{2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+c^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+c^2}}.$$

Dalje je

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \frac{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+c^2}}.$$

Analogno dobijamo

$$\cos\beta = \frac{b^2}{\sqrt{b^2+c^2}\sqrt{b^2+a^2}}, \qquad \sin\beta = \frac{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}{\sqrt{b^2+c^2}\sqrt{b^2+a^2}},$$

pa lako sledi

$$\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\beta} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{a^2}{b^2}.$$

Slično se dokazuju ostali odnosi.

69.3.2. Očigledno je da sistem ima sledećih n rešenja

$$(1,0,0,\dots,0),\quad (0,1,0,\dots,0),\quad \dots,\quad (0,0,\dots,0,1).$$

Dokažimo da drugih rešenja nema.

Neka je $n = 2$. Tada iz $x_1 + x_2 = x_1^2 + x_2^2 = 1$ sledi

$$2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - (x_1^2 + x_2^2) = 0,$$

pa je jedan od brojeva x_1 i x_2 jednak nuli, a drugi je jednak 1.

Neka je $n = 3$. Tada iz $x_1 + x_2 + x_3 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ i jednakosti

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1),$$
$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_1) + 3x_1x_2x_3$$

sledi $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 0$ i $x_1x_2x_3 = 0$. Prema tome, bar jedan od brojeva x_1, x_2, x_3 jednak je 0, pa analogno kao u prethodnom slučaju dobijamo da je jedan od ostala dva broja jednak 0, a drugi 1.

Neka je $n \geq 4$. Tada iz jednakosti $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_n^4 = 1$ dobijamo

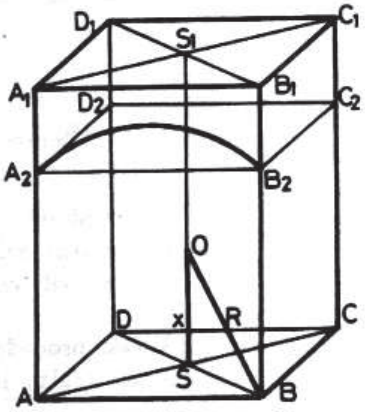
$$x_1^2 \leq 1,\quad x_2^2 \leq 1,\quad \dots,\quad x_n^2 \leq 1.$$

Ako je neki od brojeva $x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2$ (na primer x_1^2) jednak 1, onda je svaki od brojeva $x_2, x_3, \dots, x_n$ jednak 0, pa zbog uslova $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ dobijamo $x_1 = 1$. Ako je $x_1^2 < 1, x_2^2 < 1, \dots, x_n^2 < 1$, onda je

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 > x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_n^4,$$

pa n-torka $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nije rešenje datog sistema.

69.3.3. Neka su A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1 temena date prizme, pri čemu je osnova kvadrat $ABCD$ stranice $2a$, a AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 su ivice te prizme čija je dužina jednaka $(1 + \sqrt{3})a$. Neka je dalje S presek dijagonala kvadrata $ABCD$, S_1 presek dijagonala kvadrata $A_1B_1C_1D_1$, O i R redom centar i poluprečnik date sfere i $x = OS$, sl. 63. Trougao OSB je pravougli sa pravim uglom kod temena S. Zato je



Sl. 63.

$$S_1S - S_1O = x = \sqrt{OB^2 - BS^2},$$

pa dalje dobijamo

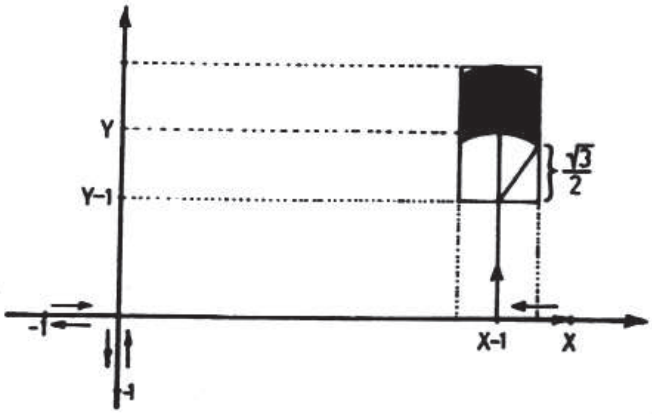
$$((1+\sqrt{3})a - R)^2 = R^2 - 2a^2, \quad R = \sqrt{3}\,a, \quad x = a.$$

Ako su A_2, B_2, C_2, D_2 redom tačke na ivicama AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, takve da važi $AA_2 = BB_2 = CC_2 = DD_2 = 2a$, onda je $ABCDA_2B_2C_2D_2$ kocka, a data sfera je opisana oko te kocke. Deo površine strane ABB_1A_1 prizme koji se nalazi unutar kruga opisanog oko kvadrata ABB_2A_2 jednak je

$$(2a)^2 + \frac{1}{4}[(a\sqrt{2})^2\pi - (2a)^2] = \frac{a^2\pi}{2} + 3a^2.$$

Deo površine prizme koji je unutar lopte jednak je

$$4\left(\frac{a^2\pi}{2} + 3a^2\right) + 4a^2 = 2a^2(8+\pi).$$



Sl. 64.

69.3.4. Uvedimo pravougli koordinatni sistem tako da se mudrac nalazi u koordinatnom početku. Neka se predmet nalazi u tački (x_0, y_0). Ne umanjujući opštost razmatranja možemo pretpostaviti $x_0 \geq 0$, $y_0 \geq 0$. Mudrac može tražiti predmet na sledeći način:

1) Najpre sa najviše četiri koraka pronađe kvadrant u kome se nalazi predmet (tačnije, kvadrant u kome se predmet nalazi ili od koga je udaljen manje od 1/2), sl. 64.

2) Zatim se kreće po onom delu x-ose koji je granica pronađenog kvadranta, sve dok ne počne da se udaljava od predmeta (na primer x koraka), pa se onda vrati jedan korak nazad. Pri tome važi $x - 3/2 \leq x_0 \leq x - 1/2$.

3) Zatim se u uočenom kvadrantu kreće paralelno y-osi (y koraka) dok ne ugleda predmet. Pri tome važi

$$y - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \leq y_0 \leq y + 1.$$

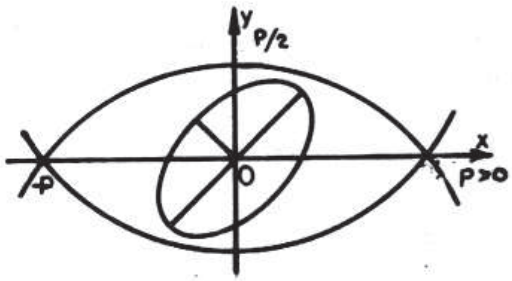
Ukupan broj koraka je najviše $A = 4 + x + 1 + y$, pa imamo

$$\begin{aligned} A = 5 + x + y &\leq 5 + x_0 + \frac{3}{2} + y_0 + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= x_0 + y_0 + 7 + \frac{1-\sqrt{3}}{2} < \sqrt{2}\,d + 7 < \frac{3}{2}d + 7. \end{aligned}$$

Koristili smo tvrđenje: ako za pozitivne brojeve a i b važi $a^2 + b^2 < d^2$ i $\frac{a}{b} = \operatorname{tg}\varphi$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, onda je

$$a + b < d(\sin\varphi + \cos\varphi) = \sqrt{2}\,d\cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) < \sqrt{2}\,d.$$

69.4.2. Primetimo da je $A - B = 2$ i $AB = (a^p)^{p-1} - 1$. Kako broj $A - B$ nije deljiv sa p (jer je p prost broj veći od 2), to nisu oba broja A i B deljiva sa p. Broj AB je deljiv sa p na osnovu Fermaove teoreme. Zato je tačno jedan od brojeva A i B deljiv sa p.



Sl. 65.

69.4.3. Ako se elipsa nalazi unutar oblasti ograničene parabolama $x^2 = p^2 + 2py$ i $x^2 = p^2 - 2py$, gde je, na primer, $p > 0$, sl. 65, onda se translacijom elipse tako da joj se presek osa poklopi sa koordinatnim početkom, a zatim rotacijom oko koordinatnog početka tako da velika osa elipse dođe na x-osu, dobija elipsa koja je unutar pomenute oblasti (dokazati!).

Jednačina tražene elipse sa maksimalnom površinom je oblika

$$\frac{x^2}{\lambda^2 b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1}$$

gde je $0 < b \leq p/2$. Elipsa (1) je cela sadržana u datoj oblasti ako i samo ako za svako $y \in (0, b]$ važi

$$x_p^2 - x_e^2 = p^2 - 2py - (\lambda^2 b^2 - \lambda^2 y^2) \geq 0, \tag{2}$$

gde su x_p i x_e redom apscise tačaka parabole i elipse koje imaju istu ordinatu. Pri tome, kod elipse koja ima maksimalnu površinu za neko $y_0 \in (0, b]$ važi $x_p^2 - x_e^2 = 0$. Ako je $y_0 = b$, onda je $y_0 = b = p/2$, a ordinata temena parabole

$$x = \lambda^2 y^2 - 2py + p^2 - \lambda^2 b^2 \tag{3}$$

nije manja od b, sl. 66. Dakle

$$y_T = \frac{p}{\lambda^2} \geq b = \frac{p}{2},$$

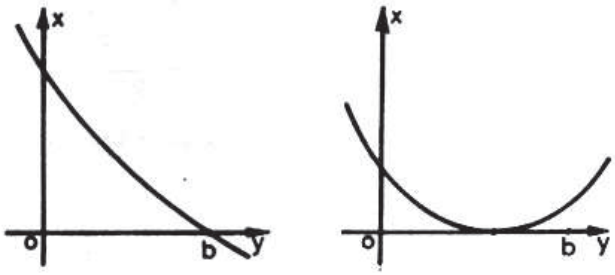
odakle sledi $\lambda^2 \leq 2$. Maksimalna površina je $P_1 = \pi\lambda b^2 = \dfrac{\pi p^2}{2\sqrt{2}}$.

Ako je $0 < y_0 < b$, onda su koordinate temena parabole (3)

$$y_0 = \frac{p}{\lambda^2},$$

$$x_0 = p^2 - \lambda^2 b^2 - \frac{p^2}{\lambda^2} = 0,$$

odakle dobijamo dve moguće vrednosti za λ^2:



Sl. 66.

$$\lambda_1^2 = \frac{p^2}{2b^2}(p - \sqrt{p^2 - 4b^2}), \quad \lambda_2^2 = \frac{p^2}{2b^2}(p + \sqrt{p^2 - 4b^2}).$$

Kako je $p/\lambda_1^2 > b$ i $p/\lambda_2^2 < b$, u obzir dolazi samo vrednost $\lambda = \lambda_2$. Površina odgovarajuće elipse je $P_2 = \pi\lambda b^2$, pa sledi

$$P_2^2 = \pi^2\lambda^2 b^4 = \frac{\pi^2 p^2}{2} b^2 (p + \sqrt{p^2 - 4b^2}).$$

Maksimum funkcije $\varphi(b^2) = b^2(p + \sqrt{p^2 - 4b^2})$ se dostiže za $b^2 = 2p^2/9$. Tada je $\lambda^2 = 3$ i $P_2 = \dfrac{2p^2\pi}{3\sqrt{3}} > P_1$.

Tražena elipsa je

$$\frac{x^2}{2p^2/3} + \frac{y^2}{2p^2/9} = 1.$$

69.4.4. Ako je $a = 0$, onda sistem ima tačno jedno rešenje

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0.$$

Ako je $a \neq 0$, onda analogno kao u zadatku 69.3.2. dokazujemo da su

$$(a, 0, 0, \ldots, 0), \quad (0, a, 0, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad (0, 0, \ldots, 0, a)$$

sva rešenja datog sistema.

69.MO.1. Označimo $\dfrac{b_i}{a_i} = \lambda_i$; na osnovu pretpostavki zadatka je $\lambda_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ i

$$\lambda_1 \geq 1, \quad \lambda_1\lambda_2 \geq 1, \quad \ldots, \quad \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \geq 1, \tag{1}$$

a, zbog $b_i - a_i = (\lambda_i - 1)a_i$, treba dokazati

$$(\lambda_1 - 1)a_1 + (\lambda_2 - 1)a_2 + \cdots + (\lambda_n - 1)a_n \geq 0.$$

Koristeći relacije (1) i nejednakosti između sredina, dobijamo

$$\lambda_1 \geq 1, \quad \lambda_1 + \lambda_2 \geq 2, \quad \ldots, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \geq n.$$

Ako još uvedemo oznake $\lambda_i - 1 = \mu_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, onda imamo

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n > 0,$$
$$\mu_1 \geq 0, \quad \mu_1 + \mu_2 \geq 0, \quad \ldots, \quad \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n \geq 0,$$

a treba dokazati

$$\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \cdots + \mu_n a_n \geq 0.$$

To, međutim, sledi iz

$$\begin{aligned}
&\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \cdots + \mu_n a_n \\
&= \mu_1(a_1 - a_2) + (\mu_1 + \mu_2)(a_2 - a_3) + \cdots + (\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_{n-1})(a_{n-1} - a_n) \\
&\qquad + (\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n)a_n \geq 0.
\end{aligned}$$

69.MO.2. Označimo $h(x) = f(x) - g(x)$; tada je $h(x)$ polinom stepena ne većeg od n za koji je

$$h(x_0) = h'(x_1) = h''(x_2) = \cdots = h^{(n)}(x_n) = 0,$$

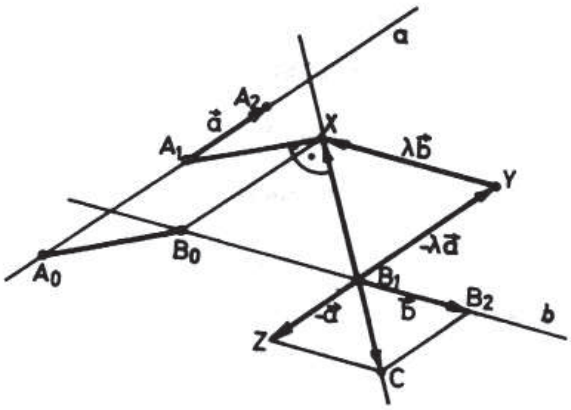
a treba dokazati da je $h(x) \equiv 0$. Međutim, ako je

$$h(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

tada iz poslednje jednačine sistema

$$\begin{array}{rrrrrr}
h(x_0) = & a_0 + & a_1 x_0 + & a_2 x_0^2 + & \cdots & + \quad a_n x_0^n = 0 \\
h'(x_1) = & & a_1 + & 2a_2 x_1 + & \cdots & + \quad n a_n x_1^{n-1} = 0 \\
h''(x_2) = & & & 2a_2 + & \cdots & + n(n-1)a_n x_2^{n-2} = 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
h^{(n-1)}(x_{n-1}) = & & & & (n-1)!\,a_{n-1} + & n!\,a_n x = 0 \\
h^{(n)}(x_n) = & & & & & n!\,a_n = 0
\end{array}$$

sledi da je $a_n = 0$, zatim iz pretposlednje da je $a_{n-1} = 0$ itd. Najzad, iz prve jednačine tog sistema sledi $a_0 = 0$. Dakle, svi koeficijenti polinoma h su jednaki nuli, što je i trebalo dokazati.



Sl. 67.

69.MO.3. Vektori $\vec{a} = \overrightarrow{A_1A_2}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{B_1B_2}$ su redom vektori brzina tačaka A i B. Za posmatrača iz tačke A tačka B se kreće brzinom koja je određena vektorom $\vec{b} - \vec{a}$. Neka su Z i C tačke određene uslovom $\overrightarrow{B_1Z} = -\vec{a}$, $\overrightarrow{B_1C} = \vec{b} - \vec{a}$. Minimalno rastojanje između tačaka A i B tokom kretanja jednako je A_1X, gde je X presek prave B_1C sa normalom na tu pravu koja sadrži tačku A_1, sl. 67. Neka je $\overrightarrow{B_1X} = \lambda\overrightarrow{B_1C} = \lambda(\vec{b} - \vec{a})$ i neka su A_0 i B_0 tačke određene uslovom

$$\overrightarrow{A_1A_0} = \lambda\vec{a}, \quad \overrightarrow{B_1B_0} = \lambda\vec{b}.$$

Tačke A_0 i B_0 su korespondentni položaji tačaka A i B tokom kretanja. Kako je

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_0B_0} &= \overrightarrow{A_0A_1} + \overrightarrow{A_1X} + \overrightarrow{XB_1} + \overrightarrow{B_1B_0}\\ &= -\lambda\vec{a} + \overrightarrow{A_1X} - \lambda(\vec{b} - \vec{a}) + \lambda\vec{b} = \overrightarrow{A_1X},\end{aligned}$$

to su A_0 i B_0 položaji tačaka A i B u trenutku kada je rastojanje među njima minimalno.

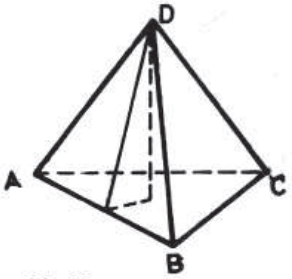
69.MO.4. Neka je $\{x_1, x_2, \ldots, x_b\}$ skup od b uzastopnih prirodnih brojeva. Tada se među njima nalazi broj x_i deljiv sa b i, zbog $a < b$, broj x_j deljiv sa a. Ako je $i \neq j$, tada je proizvod x_ix_j deljiv sa ab.

Pretpostavimo da je $i = j$. Označimo sa d najveći zajednički delilac brojeva a i b, a sa s njihov najmanji zajednički sadržalac. Tada je

$$ds = ab \qquad \text{i} \qquad s \mid x_i.$$

Dokažimo da bar jedan od brojeva $x_i + d$ i $x_i - d$ (koji su deljivi sa d) pripada skupu $\{x_1, x_2, \ldots, x_b\}$. Ako to ne bi bio slučaj, bilo bi $x_i + d > x_b$ i $x_i - d < x_1$, odakle bi sledilo $2d > x_b - x_1 + 1 = b$. Međutim, zbog $d \mid b$, to bi značilo da je $d = b > a$, pa ne bi moglo da važi $d \mid a$, suprotno definiciji broja d.

Neka, na primer, $x_i + d \in \{x_1, x_2, \ldots, x_b\}$. Tada je proizvod $x_i(x_i + d)$ deljiv sa $ds = ab$.



Sl. 68.

69.MO.5. Koristićemo oznaku $\sin(AB)$ za sinus diedra sa ivicom AB kod tetraedra $ABCD$, kao i analogne oznake u slučaju ostalih diedara. Neka je V zapremina tetraedra. tada je

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} P_{ABC} \frac{2P_{ABD}}{AB} \sin(AB) \\ &= \frac{1}{3} P_{BCD} \frac{2P_{ACD}}{CD} \sin(CD), \end{aligned}$$

odakle sledi

$$\frac{AB \cdot CD}{\sin(AB)\sin(CD)} = \frac{4P_{ABC}P_{ABD}P_{BCD}P_{ACD}}{9V^2}.$$

69.MO.6. Neka je A jedan od datih intervala. Definišimo karakteristiku $r(A)$ tog intervala na sledeći način: $r(A)$ je najveći prirodan broj r, takav da skup E sadrži intervale $I_1, I_2, \ldots, I_{r-1}, I_r = A$, za koje važi

$$I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_{r-1} \subset I_r = A.$$

Primetimo da ako za dva intervala A i B važi $r = r(A) = r(B)$, onda nijedan od njih nije podskup drugog. U protivnom je, na primer, $A \subset B$, a osim toga postoje intervali $I_1, I_2, \ldots, I_{r-1}$, svi različiti od A i B i takvi da važi

$$I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_{r-1} \subset A \subset B,$$

pa odatle sledi $r(B) \geq r + 1$, što je kontradikcija.

Ako neki od intervala iz E ima karakteristiku veću od n, tvrđenje je dokazano. U protivnom karakteristika svakog intervala je broj iz skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$. Kako skup E sadrži $n^2 + 1$ intervala, to na osnovu Dirihleovog principa sledi da bar $n + 1$ od tih intervala ima istu karakteristiku. Tada nijedan od tih $n + 1$ intervala nije sadržan u nekom drugom od tih istih $n + 1$ intervala.

70.2.1. Neka su traženi brojevi z_1, z_2 i z_3. Tada je $z_1 + z_2 + z_3 = 1$, $z_1 z_2 z_3 = 1$ i

$$z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = \frac{1}{z_3} + \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{\overline{z_3}}{|z_3|^2} + \frac{\overline{z_1}}{|z_1|^2} + \frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2} = \overline{z_1 + z_2 + z_3} = 1.$$

Zato su ti brojevi, na osnovu Vietovih pravila, rešenja jednačine

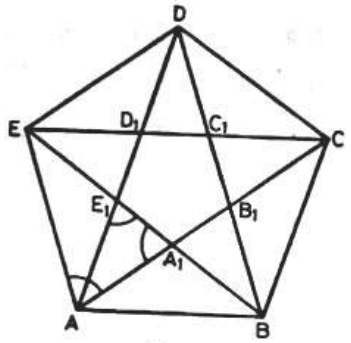
$$z^3 - z^2 + z - 1 = 0.$$

Znači, oni su jednaki 1, i i $-i$.

70.2.2. a) Zbir unutrašnjih uglova petougla $A_1B_1C_1D_1E_1$ iznosi $3 \cdot 180°$, a zbir unutrašnjih uglova desetougla

$$AA_1BB_1CC_1DD_1EE_1$$

iznosi $8 \cdot 180°$. Svaki od uglova tog petougla u zbiru sa odgovarajućim uglom desetougla daje $360°$, sl. 69. Zato je traženi zbir uglova zvezde, koji je jednak zbiru uglova desetougla kod temena A, B, C, D i E,

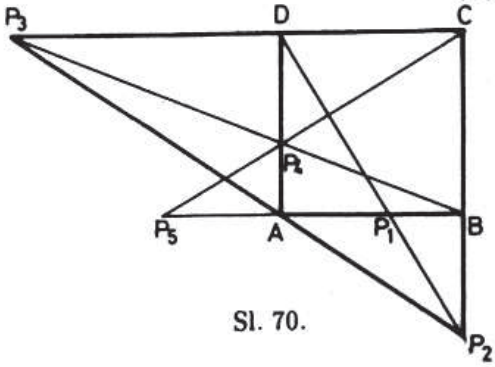


Sl. 69.

$$8 \cdot 180° + 3 \cdot 180° - 5 \cdot 360° = 180°.$$

b) Ako je petougao $ABCDE$ pravilan, on je simetričan u odnosu na simetralu svakog od svojih uglova, odakle sledi da je $AA_1 = AE_1 = EE_1$, $AC \parallel ED$ i $\angle AA_1E = \angle A_1ED = \angle CEA = \angle EAA_1$. Dakle, trougao AEA_1 je jednakokrak. Označimo $AE = a$ i $A_1E_1 = x$. Tada iz sličnosti jednakokrakih trouglova A_1AE_1 i A_1EA (koji imaju jednake uglove na osnovici) dobijamo $AA_1 : A_1E_1 = A_1E : AA_1$, tj. $(a - x) : x = a : (a - x)$. Rešavanjem ove jednačine po x, uzimajući u obzir da je $x < a$, dobijamo $x = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}a$. Petouglovi $ABCDE$ i $A_1B_1C_1D_1E_1$ su slični, pa je odnos njihovih površina

$$S : S_1 = \left(\frac{a}{x}\right)^2 = \frac{2}{7 - 3\sqrt{5}}.$$



Sl. 70.

70.2.3. Dokažimo najpre da je tačka P_4 između tačaka D i A, sl. 70.

Kako je tačka P_1 između A i B, to je ona između paralelnih pravih AD i BC, pa je između D i P_2, Dalje, zbog $AB \parallel CD$, imamo da je tačka B između C i P_2, pa je P_2 s one strane prave AB s koje nije prava CD. Dakle, A je između P_2 i P_3. Iz paralelnosti pravih AD i BC sledi da je D između P_3 i C, pa dobijamo da je P_4 između P_3 i B. Znači, P_4 je između pravih AB i CD, pa i između tačaka A i D.

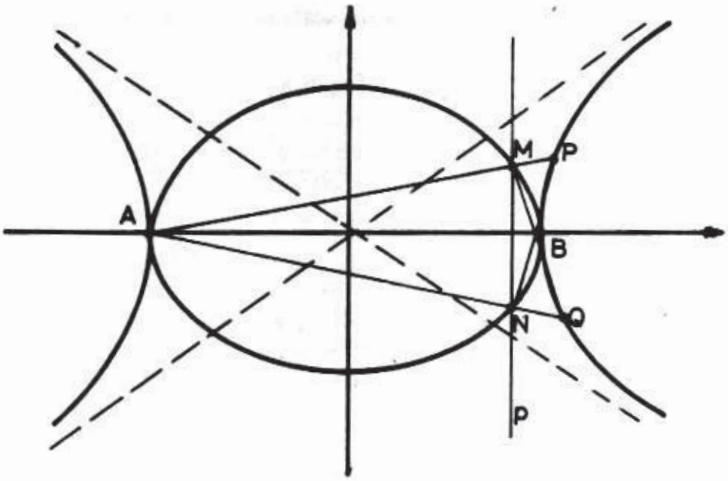
Dokažimo sada da je $AP_1 : P_1B = DP_4 : P_4A$.

Iz sličnosti trouglova AP_1D i BP_1P_2 sledi da je $AP_1 : P_1B = DA : BP_2 = CB : BP_2$, a iz paralelnosti pravih AD i P_2C da je $CB : BP_2 = DP_4 : P_4A$. Dakle, $AP_1 : P_1B = DP_4 : P_4A$.

Nastavljajući ovaj postupak dobijamo da je tačka P_7 između tačaka D i C i da je $CP_7 : P_7D = AP_1 : P_1B$; zatim da je tačka P_{10} između tačaka C i B i da je $BP_{10} : P_{10}C = AP_1 : P_1B$; najzad, da je tačka P_{13} između tačaka A i B i da je $AP_{13} : P_{13}B = AP_1 : P_1B$. No, to je jedino moguće ako je $P_{13} \equiv P_1$.

70.2.4. a) Zbog $a(a^{2n}-1) = a(a-1)(a+1)(a^{2n-2}+\cdots+1)$, dati broj je deljiv proizvodom tri uzastopna cela broja, pa i sa 6.

b) Važi: $S' - S = a_1(a_1^{2n}-1)+\cdots+a_m(a_m^{2n}-1)$; kako je, na osnovu a), svaki sabirak na desnoj strani deljiv sa 6, to važi i za razliku $S' - S$.



Sl. 71.

70.3.1. Neka prava p ima jednačinu $x = t$, $-a < t < a$. Tada tačke M i N imaju koordinate $\left(t, \frac{b}{a}\sqrt{a^2-t^2}\right)$ i $\left(t, -\frac{b}{a}\sqrt{a^2-t^2}\right)$. Prave AM i BN imaju jednačine:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-t^2}\,\frac{x+a}{t+a} \quad \text{i} \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-t^2}\,\frac{x+a}{a-t}.$$

U njihovoj presečnoj tački P je $\frac{x+a}{t+a} = \frac{x-a}{a-t}$, odakle je $x = a^2/t$ (isključuje se slučaj $t = 0$ kada su prave AM i BN paralelne). Dakle, tačka P ima koordinate

$$x = \frac{a^2}{t}, \quad y = \frac{b}{t}\sqrt{a^2-t^2} \qquad (-a < t < a,\ t \neq 0).$$

Eliminacijom parametra t se dobija

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (xy > 0),$$

tj. tačka P pripada jednom od lukova te hiperbole u prvom ili trećem kvadrantu. Obrnutim postupkom lako se dokazuje da se svaka tačka tih lukova može dobiti na opisani način.

Slično se dokazuje da je geometrijsko mesto tačaka Q unija lukova te hiperbole u drugom i četvrtom kvadrantu.

70.3.2. Na osnovu kosinusne teoreme je

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \quad \cos\beta = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}, \quad \cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

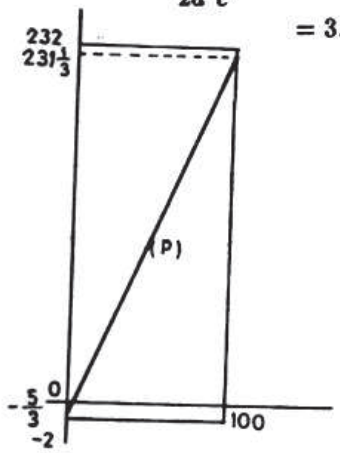
Zamenjujući te izraze u levu stranu jednakosti koju dokazujemo dobijamo

$$\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\cos\alpha + \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\cos\gamma + \left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\cos\beta$$
$$= \frac{(b^2+c^2)(b^2+c^2-a^2)}{2b^2c^2} + \frac{(a^2+b^2)(a^2+b^2-c^2)}{2a^2b^2} + \frac{(a^2+c^2)(a^2+c^2-b^2)}{2a^2c^2} = 3.$$

70.3.3. Odredimo najpre broj čvorova mreže kroz koje prolazi dati odsečak. Treba naći celobrojna rešenja jednačine $7x - 3y - 5 = 0$ uz uslov $0 \le x \le 100$. Sva rešenja te jednačine data su sa

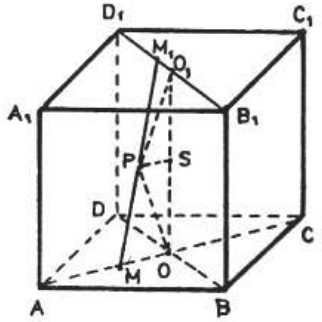
$$x = 5 + 3t, \; y = 10 + 7t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Da bi bilo $0 \le x \le 100$ mora biti $-1 \le t \le 31$. Dakle, odsečak (p) prolazi kroz 33 čvora koordinatne mreže.



Sl. 72.

Posmatrano „sleva udesno", prilikom svakog presecanja neke od linija koordinatne mreže, odsečak (p) „ulazi" u novi kvadrat. Jedino prilikom „prolaza" kroz čvor mreže on preseca dve linije, a „ulazi" u jedan novi kvadrat. Zato je broj traženih kvadrata jednak broju preseka odsečka (p) sa linijama mreže, umanjenom za broj čvorova kroz koje on prolazi, tj. $100 + 234 - 33 = 301$.



Sl. 73.

70.3.4. Označimo datu kocku sa $ABCDA_1B_1C_1D_1$, prave određene dijagonalama AC i B_1D_1 sa p i p_1, središta osnova sa O i O_1, a krajnje tačke date duži sa M i M_1, pri čemu $M \in p$, $M_1 \in p_1$. Dalje, neka su S i P središta duži OO_1 i MM_1, sl. 73. Prava p je normalna na ravan dijagonalnog preseka kocke BB_1D_1D, pa je normalna i na pravoj OM_1 u toj ravni. Dakle, trougao MOM_1 je pravougli, a P je središte njegove hipotenuze MM_1, pa je $OP = MM_1/2 = c/2$. Slično se dokazuje da je $O_1P = c/2$. Znači, trougao OO_1P je jednakokrak, a S je središte njegove osnovice, pa je PS njegova visina. Zaključujemo

da središte duži MM_1 pripada krugu koji je u ravni paralelnoj osnovama kocke, čiji je centar tačka S, a poluprečnik jednak $\sqrt{c^2-a^2}/2$.

Dokažimo da je pomenuti krug traženo geometrijsko mesto, tj. da je svaka njegova tačka središte neke duži dužine c sa krajevima na pravim p i p_1. Neka je P proizvoljna tačka tog kruga. Neka ravan određena pravom p i tačkom P seče pravu p_1 u tački M_1, a ravan određena pravom p_1 i tačkom P seče pravu p u tački M (ti preseci uvek postoje). Prva od tih ravni sadrži normalu p dijagonalnog preseka BDD_1B_1 date kocke, pa je normalna na taj presek. Zato je trougao MOM_1 pravougli, a tačka P je središte njegove hipotenuze, jer se nalazi u ravni u odnosu na koju su ravni osnova kocke simetrične. Iz pravouglog trougla PSO u kome su katete $PS=\sqrt{c^2-a^2}/2$ i $SO=a/2$ se dobija da je $OP=c/2$, pa je i $PM=PM_1=c/2$, što i znači da je P središte duži MM_1 dužine c sa krajevima na pravim p i p_1.

70.4.1. Na osnovu nejednakosti između sredina je

$$\log_4 5\cdot\log_4 3\le\left(\frac{\log_4 5+\log_4 3}{2}\right)^2=\left(\frac{\log_4 15}{2}\right)^2<1,$$

pa je $\log_4 5<1/\log_4 3=\log_3 4$.

70.4.2. Grupa koja je k-ta po redu ima $1+(k-1)n$ članova. Prvih k grupa ima ukupno

$$\sum_{i=1}^{k}[1+(i-1)n]=k+\frac{(k-1)k}{2}n$$

članova. Zato je prvi član $(k+1)$-ve grupe

$$a=1+\left[k+\frac{(k-1)k}{2}n\right]\cdot 2n=1+2kn+(k-1)kn^2,$$

a njen poslednji član je

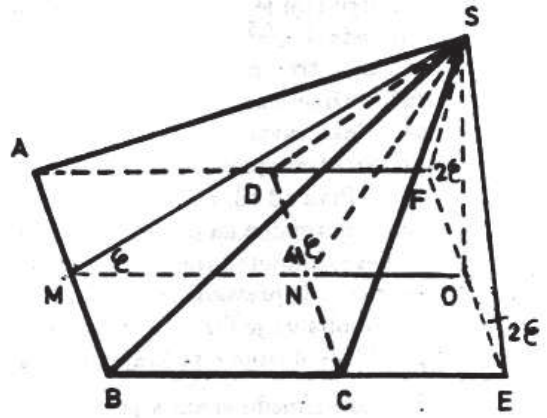
$$b=a+kn\cdot 2n=1+2kn+k(k+1)n^2.$$

Dakle, zbir svih članova te grupe jednak je

$$(1+kn)\frac{a+b}{2}=(1+kn)(1+2kn+k^2n^2)=(1+kn)^3,$$

što je i trebalo dokazati.

70.4.3. Neka je $ABCD$ osnova, a S vrh piramide. Nagibni uglovi bočnih strana SAB, SBC, SCD i SDA neka su, redom, φ, 2φ, 4φ i 2φ. Označimo sa a stranicu osnove, a sa H visinu piramide, sl. 74. Pretpostavimo najpre da je $\pi/2\le 4\varphi<\pi$ (kasnije ćemo pokazati da ne može da bude $4\varphi\le\pi/2$). Ravan koja sadrži vrh piramide i normalna je na prave BC i DA tada seče te prave van duži BC i DA; označimo te preseke sa E i F. Preseke ravni kroz S, normalnih na



Sl. 74.

pravim AB i CD, sa tim pravama označimo redom sa M i N (te tačke pripadaju dužima AB, odnosno CD). Te ravni sadrže visinu piramide — označimo podnožje te visine sa O. Po pretpostavci je

$$\angle SMN = \varphi, \quad \angle SEF = \angle SFE = 2\varphi, \quad \angle SNM = 4\varphi.$$

Iz odgovarajućih pravouglih trouglova dobijamo

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{OM}{H}, \quad \operatorname{ctg}2\varphi = \frac{OE}{H} = \frac{a}{2H}, \quad \operatorname{ctg}4\varphi = -\frac{ON}{H},$$

odnosno

$$\operatorname{ctg}\varphi + \operatorname{ctg}4\varphi = \frac{OM - ON}{H} = \frac{MN}{H} = \frac{a}{H} = 2\operatorname{ctg}2\varphi.$$

Ova jednačina se za $\pi/8 < \varphi < \pi/4$ transformiše redom u sledeće, njoj ekvivalentne:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg}4\varphi - \operatorname{ctg}2\varphi &= \operatorname{ctg}2\varphi - \operatorname{ctg}\varphi, \\ \frac{\sin(4\varphi - 2\varphi)}{\sin 4\varphi \sin 2\varphi} &= \frac{\sin(2\varphi - \varphi)}{\sin 2\varphi \sin\varphi}, \\ \sin 2\varphi &= 2\sin 2\varphi \cos 2\varphi, \end{aligned}$$

pa je $\varphi = \pi/6$. Traženi uglovi su $\pi/6$, $\pi/3$, $2\pi/3$ i $\pi/3$.

Dokažimo još da ne može biti $4\varphi \leq \pi/2$. Ako bi to bio slučaj, sličnim postupkom kao malopre dobili bismo da φ treba da zadovoljava jednačinu $\operatorname{ctg}\varphi + \operatorname{ctg}4\varphi = 2\operatorname{ctg}2\varphi$. Međutim, ta jednačina nema rešenja za koje je $0 < \varphi \leq \pi/8$.

70.4.4. Za svako realno x važi

$$(1+x)^p(1+x)^p = (1+x)^{2p}.$$

Ako razvijemo ove izraze po binomnoj formuli i izjednačimo koeficijente uz x^p dobijamo

$$1+\binom{p}{1}\binom{p}{p-1}+\binom{p}{2}\binom{p}{p-2}+\cdots+\binom{p}{p-1}\binom{p}{1}+1=\binom{2p}{p},$$

odnosno

$$N=\frac{(2p)!}{(p!)^2}-2=\binom{2p}{p}-2=\sum_{i=1}^{p-1}\binom{p}{i}^2.$$

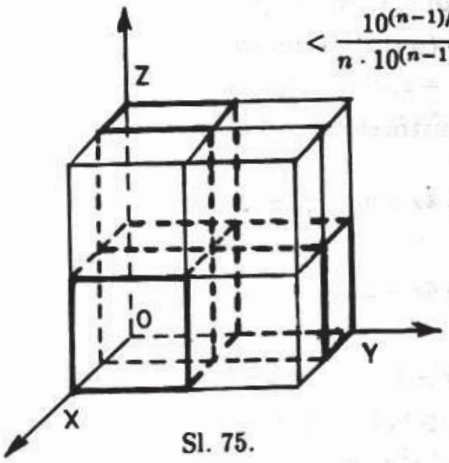
Kako je p prost broj, to je svaki od brojeva $\binom{p}{i}=\frac{p(p-1)\cdots(p-i+1)}{i!}$ deljiv sa p, pa je poslednji zbir, a sa njim i broj N, deljiv sa p^2.

70.MO.1. Možemo pretpostaviti da je $n \geq 2$ i $a > b$ (ostali slučajevi su trivijalni). Iz uslova zadatka neposredno sledi da je

$$a-b<10^{(n-1)/2}$$

(za n parno ta se procena može poboljšati, ali to nam neće biti potrebno). S druge strane, važi $a > b \geq 10^{n-1}$, pa je $a^{1/n} > b^{1/n} \geq 10^{(n-1)/n}$. Zato je

$$\begin{aligned} a^{1/n}-b^{1/n} &= \frac{a-b}{a^{(n-1)/n}+a^{(n-2)/n}b^{1/n}+\cdots+b^{(n-1)/n}} \\ &< \frac{10^{(n-1)/2}}{n\cdot 10^{(n-1)^2/n}} = \frac{10^{-(n-1)(n-2)/2n}}{n} \leq \frac{1}{n}. \end{aligned}$$



Sl. 75.

70.MO.2. Neka je dužina ivice kocke K jednaka 2 (tačnije, dve jedinice dužine). Uvedimo pravougli koordinatni sistem tako da su tačke

$$O(0,0,0),\ X(2,0,0),\ Y(0,2,0),\ Z(0,0,2)$$

temena kocke. Trougao XYZ je sadržan u kocki i važi

$$XY=YZ=ZX=2\sqrt{2}.$$

Pretpostavimo sada da je trougao ABC sadržan u datoj kocki K. Ravni $x=1$, $y=1$, $z=1$ dele kocku K na osam kocki ivice 1. Tih osam kocki imaju zajedničko teme $(1,1,1)$, neke od tih kocki imaju zajedničku ivicu, a neke zajedničku stranu, sl. 75. Razmotrimo dve od tih kocki čija je jedina zajednička tačka teme $(1,1,1)$. Svaka od ostalih šest kocki ima zajedničku stranu sa jednom od tih dveju kocki. Na osnovu toga zaključujemo sledeće: Ako postoje dve jedinične kocke čija je jedina zajednička tačka teme $(1,1,1)$, tako da svaka od njih sadrži bar jedno teme trougla

ABC, onda neke dve od jediničnih kocki imaju zajedničku stranu i sadrže bar dva od temena trougla ABC, na primer, A i B. Tada je

$$\min\{AB, BC, CA\} \leq AB \leq \sqrt{1^2+1^2+2^2} = \sqrt{6} < 2\sqrt{2}.$$

Preostaje da razmotrimo slučaj kada svaki kvadar koji čine dve jedinične kocke sa zajedničkom stranom sadrži najviše jedno teme trougla ABC. Ne umanjujući opštost razmatranja možemo pretpostaviti sledeće:

$$\begin{aligned} A &\in \{(1+x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1\}, \\ B &\in \{(a, 1+b, c) \mid 0 \leq a \leq 1,\ 0 \leq b \leq 1,\ 0 \leq c \leq 1\}, \\ C &\in \{(\alpha, \beta, 1+\gamma) \mid 0 \leq \alpha \leq 1,\ 0 \leq \beta \leq 1,\ 0 \leq \gamma \leq 1\}. \end{aligned}$$

Tada je

$$\begin{aligned} AB^2 + BC^2 + CA^2 &= (1+x-a)^2 + (y-1-b)^2 + (z-c)^2 \\ &\quad + (a-\alpha)^2 + (1+b-\beta)^2 + (c-1-\gamma)^2 \\ &\quad + (\alpha-1-x)^2 + (\beta-y)^2 + (1+\gamma-z)^2 \\ &= S_1 + S_2 + S_3, \end{aligned}$$

gde je

$$\begin{aligned} S_1 &= (1+x-a)^2 + (1+x-\alpha)^2 + (a-\alpha)^2, \\ S_2 &= (1+b-y)^2 + (1+b-\beta)^2 + (y-\beta)^2, \\ S_3 &= (1+\gamma-z)^2 + (1+\gamma-c)^2 + (z-c)^2. \end{aligned}$$

Kako x, a, $\alpha \in [0,1]$, to je $|x-a| \leq 1$, $|a-\alpha| \leq 1$, $|\alpha - x| \leq 1$, pa sledi

$$\begin{aligned} S_1 &= 2 + (x-a)^2 + (a-\alpha)^2 + (\alpha-x)^2 + 4x - 2a - 2\alpha \\ &\leq 2 + |x-a| + |a-\alpha| + |\alpha-x| + 4x - 2a - 2\alpha. \end{aligned}$$

Pretpostavimo da je $a \leq \alpha$ (analogno se razmatra slučaj $\alpha \leq a$). Ako je $x \leq a \leq \alpha$, onda je

$$S_1 \leq 2 + (a-x) + (\alpha-a) + (\alpha-x) + 4x - 2a - 2\alpha = 2 + 2x - 2a \leq 4.$$

Ako je $a < x \leq \alpha$, onda je

$$S_1 \leq 2 + (x-a) + (\alpha-a) + (\alpha-x) + 4x - 2a - 2\alpha = 2 + 4x - 4a \leq 6.$$

Ako je $a \leq \alpha < x$, onda je

$$S_1 \leq 2 + (x-a) + (\alpha-a) + (x-\alpha) + 4x - 2a - 2\alpha = 2 + 6x - 4a - 2\alpha \leq 8.$$

U svakom slučaju važi $S_1 \leq 8$ i analogno $S_2 \leq 8$, $S_3 \leq 8$. Prema tome,

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 \leq 24.$$

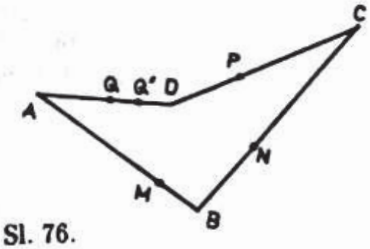
Zato je bar jedan od brojeva AB^2, BC^2, CA^2 manji ili jednak 8, pa sledi

$$\min\{AB, BC, CA\} \leq 2\sqrt{2}.$$

Jednakost se dostiže ako je $x = 1$, $a = \alpha = 0$, $b = 1$, $y = \beta = 0$, $\gamma = 1$, $z = c = 0$, tj. ako je $A = X$, $B = Y$, $C = Z$. Prema tome, maksimum M skupa koji sadrži sve brojeve oblika $\min\{AB, BC, CA\}$, gde je ABC trougao sadržan u kocki K, jednak je $2\sqrt{2}$ (jedinica dužine).

70.MO.3. Ako je dati četvorougao ravan, tvrđenje zadatka je trivijalno. Pretpostavimo da to nije slučaj.

Neka je α ravan određena tačkama M, N i P. Jasno je da ona ne sadrži nijedno teme datog četvorougla (ako bi, na primer, sadržala teme A, onda bi sadržala pravu AM, pa i tačku B, zatim, slično, tačke C i D, pa bi dati četvorougao bio ravan). Tačke A i B su sa raznih strana te ravni; isto važi za tačke B i C, kao i za tačke C i D. Zato su i tačke D i A sa raznih strana ravni α, te duž DA seče tu ravan u nekoj tački Q', sl. 76. Ako sa h_A, h_B, h_C i h_D označimo rastojanja tačaka A, B, C i D od ravni α, imaćemo



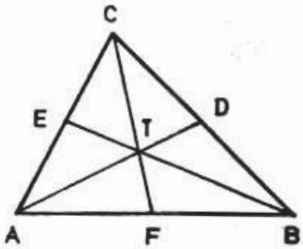
Sl. 76.

$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CP}{PD}\cdot\frac{DQ'}{Q'A}=\frac{h_A}{h_B}\cdot\frac{h_B}{h_C}\cdot\frac{h_C}{h_D}\cdot\frac{h_D}{h_A}=1.$$

S druge strane, duži AM i AQ su međusobno jednake, kao tangentne duži date sfere. Takođe je $BM = BN$, $CN = CP$ i $DP = DQ$. Zato je

$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CP}{PD}\cdot\frac{DQ}{QA}=1.$$

Iz dobijenih relacija sledi da su Q i Q' unutrašnje tačke duži DA za koje važi $DQ/QA = DQ'/Q'A$, što je moguće jedino ako je $Q \equiv Q'$. Time je dokazano da tačke M, N, P i Q pripadaju jednoj ravni α.



Sl. 77.

71.2.1. Koristićemo sledeće tvrđenje: Ako su a, b i c stranice trougla, a P, r i ρ redom njegova površina i poluprečnici opisanog i upisanog kruga, onda je

$$P=\frac{a+b+c}{2}\rho=\frac{abc}{4r}.$$

Neka je površina trougla ABC jednaka $6x$. Tada svaki od trouglova BDT, DCT, CET, EAT, AFT, FBT ima površinu jednaku x, sl. 77. Koristeći navedene formule dobijamo

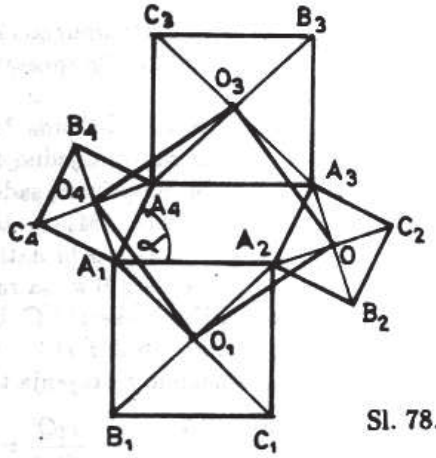
$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_3}+\frac{1}{\rho_5}&=\frac{BT+TD+DB}{2x}+\frac{CT+TE+EC}{2x}+\frac{AT+TF+FA}{2x}\\&=\frac{CT+TD+DC}{2x}+\frac{AT+TE+EA}{2x}+\frac{BT+TF+FB}{2x}\\&=\frac{1}{\rho_2}+\frac{1}{\rho_4}+\frac{1}{\rho_6}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r_1r_3r_5&=\frac{BT\cdot TD\cdot DB}{4x}\cdot\frac{CT\cdot TE\cdot EC}{4x}\cdot\frac{AT\cdot TF\cdot FA}{4x}\\&=\frac{CT\cdot TD\cdot DC}{4x}\cdot\frac{AT\cdot TE\cdot EA}{4x}\cdot\frac{BT\cdot TF\cdot FB}{4x}=r_2r_4r_6.\end{aligned}$$

71.2.2. Neka je, na primer, $\alpha = \angle A_2A_1A_4 \leq \pi/2$, sl. 78. Trouglovi $O_1O_2A_2$, $O_1O_4A_1$, $O_3O_2A_3$ i $O_3O_4A_4$ su podudarni jer je

$$O_1A_2 = O_1A_1 = O_3A_3 = O_3A_4,$$
$$O_2A_2 = O_4A_1 = O_2A_3 = O_4A_4,$$
$$\angle O_1A_2O_2 = \angle O_1A_1O_4$$
$$= \angle O_3A_3O_2 = \angle O_3A_4O_4 = \frac{\pi}{2} + \alpha.$$

Zato je $O_1O_2 = O_2O_3 = O_3O_4 = O_4O_1$ i $\angle O_1O_2A_2 = \angle O_3O_2A_3$, pa dalje sledi



Sl. 78.

$$\angle O_1O_2O_3 = \angle O_1O_2A_2 + \angle A_2O_2O_3 = \angle O_3O_2A_3 + \angle A_2O_2O_3 = \angle A_2O_2A_3 = \pi/2.$$

Slično se dokazuje da su i ostali uglovi četvorougla $O_1O_2O_3O_4$ pravi, pa kako su mu i sve stranice jednake, taj četvorougao je kvadrat. Dalje je

$$P_{A_1A_2A_3A_4} + \frac{1}{4}(P_{A_1B_1C_1A_2} + P_{A_2B_2C_2A_3} + P_{A_3B_3C_3A_4} + P_{A_4B_4C_4A_1})$$
$$= P_{A_1A_2A_3A_4} + P_{A_1O_1A_2} + P_{A_2O_2A_3} + P_{A_3O_3A_4} + P_{A_4O_4A_1}$$
$$= P_{O_1O_2O_3O_4} - P_{O_1O_2A_2} + P_{O_3O_2A_3} - P_{O_3O_4A_4} + P_{O_1O_4A_1} = P_{O_1O_2O_3O_4}.$$

71.2.3. Neka su x_1 i x_2 rešenja jednačine $x^2 - px + q = 0$, a y_1 i y_2 rešenja jednačine $x^2 - qx + p = 0$, pri čemu $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{N}$. Tada je

$$x_1 + x_2 = p, \quad x_1x_2 = q, \qquad y_1 + y_2 = q, \quad y_1y_2 = p.$$

a) Neka je jedan od brojeva x_1, x_2, y_1, y_2 jednak 1, na primer $x_1 = 1$. Tada je $1 + x_2 = p$, $x_2 = q$, pa sledi

$$y_1 + y_2 - y_1y_2 = q - p = -1, \qquad \text{tj.} \qquad (y_1 - 1)(y_2 - 1) = 2.$$

Dalje lako sledi $\{y_1, y_2\} = \{2, 3\}$, $q = 5$, $p = 6$, $x_2 = 5$.

Lako se proverava da su za $p = 6$, $q = 5$ parovi $(1, 5)$ i $(5, 1)$ rešenja jednačine $x^2 - 6x + 5 = 0$, a parovi $(2, 3)$ i $(3, 2)$ rešenja jednačine $x^2 - 5x + 6 = 0$. Sličan rezultat dobijamo za $p = 5$, $q = 6$ (tada je jedan od brojeva y_1 i y_2 jednak 1).

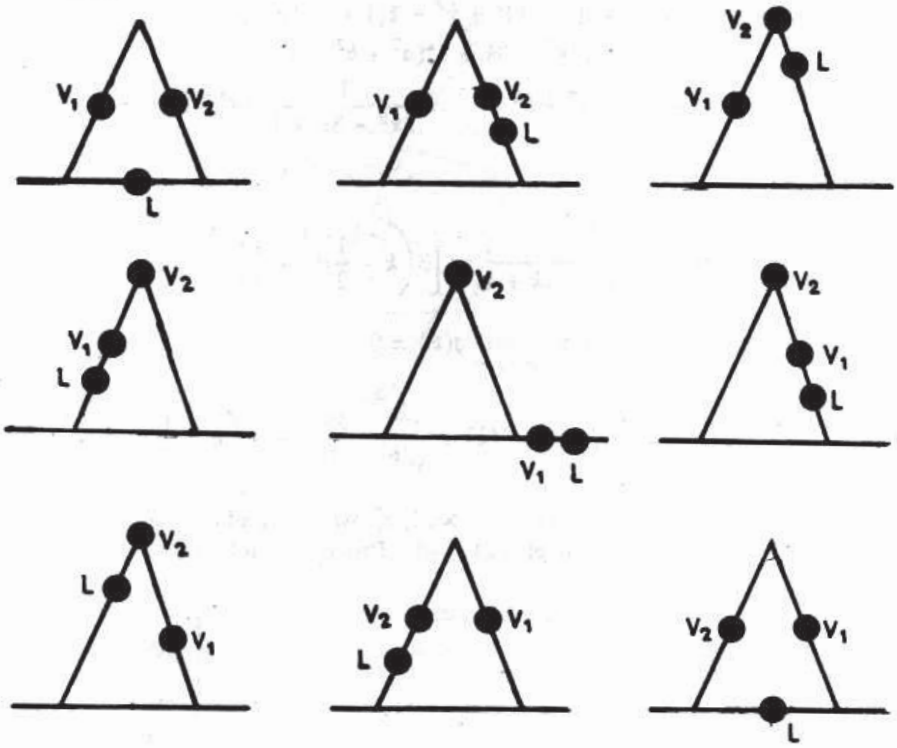
b) Neka je $x_1 \geq 2$, $x_2 \geq 2$, $y_1 \geq 2$, $y_2 \geq 2$. Tada je

$$p = x_1 + x_2 \leq x_1x_2 = q = y_1 + y_2 \leq y_1y_2 = p,$$

odakle sledi $p = q = x_1 + x_2 = x_1x_2 = y_1 + y_2 = y_1y_2$. Neka je, na primer, $x_1 \leq x_2$. Tada zbog $x_1 + x_2 = x_1x_2 \geq 2x_2$ dobijamo $x_1 \geq x_2$. Prema tome, $x_1 = x_2$, pa dalje sledi $2x_1 = x_1^2$, tj. $x_1 = x_2 = 2$ i konačno $p = q = 4$. Par $(2, 2)$ je zaista rešenje jednačine $x^2 - 4x + 4 = 0$.

Traženi parovi (p, q) su: $(6, 5)$, $(5, 6)$ i $(4, 4)$.

71.2.4. Jedan način premeštanja vagona i povratka lokomotive na svoje mesto prikazan je na sl. 79.



Sl. 79.

71.3.1. Iz uslova $\frac{p}{q} < \frac{a}{b} < \frac{r}{s}$ sledi $aq - bp > 0$, $br - as > 0$ i $qr - ps > 0$, a kako su $aq - bp$, $br - as$, $qr - ps$ celi brojevi, to je

$$aq - bp \geq 1, \qquad br - as \geq 1.$$

Dalje je $b(qr - ps) = q(br - as) + s(aq - bp) \geq q + s$, pa kako je $qr - ps = 1$, to je $b \geq q + s$.

71.3.2. Neka je $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Tada je (sl. 80):

$$\begin{aligned} PQ^2 &= (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ})(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ}) = (1-k)^2c^2 + k^2a^2 - 2k(1-k)ac\cos B \\ &= (1-k)^2c^2 + k^2a^2 - 2k(1-k)ac\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}. \end{aligned}$$

Analogno dobijamo

$$\begin{aligned} QR^2 &= (1-k)^2a^2 + k^2b^2 - k(1-k)(a^2+b^2-c^2), \\ RP^2 &= (1-k)^2b^2 + k^2c^2 - k(1-k)(b^2+c^2-a^2), \end{aligned}$$

pa dalje lako sledi

$$\begin{aligned} PQ^2 + QR^2 + RP^2 &= [(1-k)^2 + k^2 - k(1-k)](a^2+b^2+c^2) \\ &= (3k^2 - 3k + 1)(a^2+b^2+c^2), \\ AB^2 + BC^2 + CA^2 = a^2+b^2+c^2 &= \frac{1}{3k^2-3k+1}(PQ^2+QR^2+RP^2). \end{aligned}$$

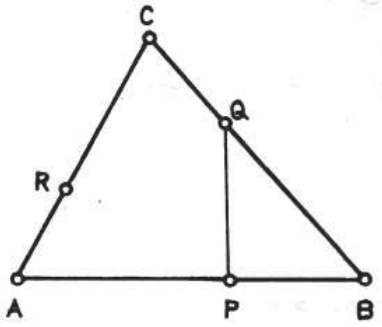
Prema tome,

$$g(k) = \frac{1}{3k^2-3k+1} = \left[3\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right]^{-1} > 0,$$

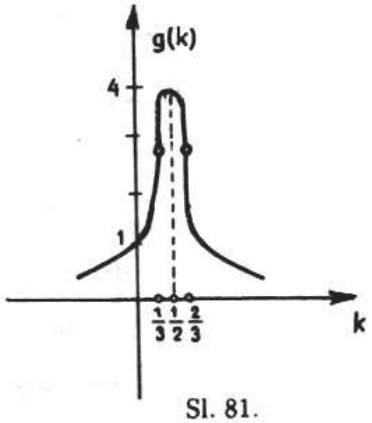
za svaki realan broj k. Dalje je $\lim\limits_{k\to\pm\infty} g(k) = 0$,

$$g'(k) = \frac{1/2-k}{(3k^2-3k+1)^2}, \quad g''(k) = \frac{36}{(3k^2-3k+1)^3}\left(k-\frac{1}{3}\right)\left(k-\frac{2}{3}\right).$$

Funkcija g strogo raste na intervalu $(-\infty, 1/2]$, strogo opada na intervalu $[1/2, \infty)$, a za $k = 1/2$ ima maksimum $g(1/2) = 4$. Prevojne tačke su $(1/3, 3)$ i $(2/3, 3)$, sl. 81.



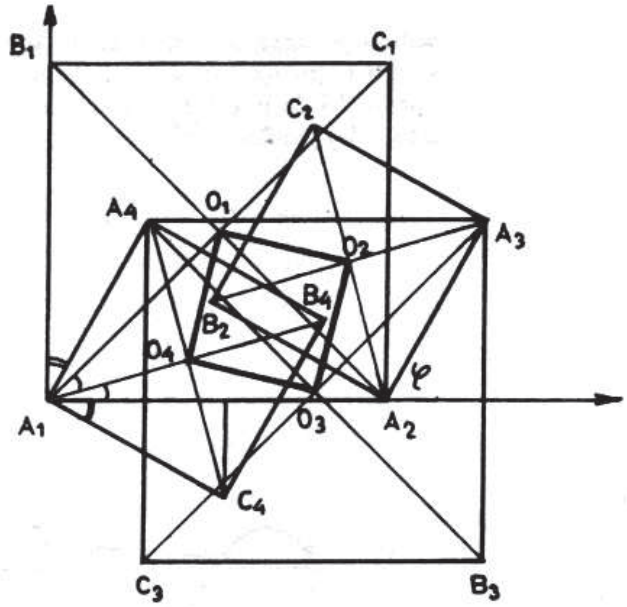
Sl. 80.



Sl. 81.

71.3.3. Neka je $\angle A_2A_1A_4 = \varphi$, $A_1A_2 = a$, $A_1A_4 = b$. Uvedimo pravougli koordinatni sistem tako da važi:

1) Tačka A_1 je koordinatni početak;
2) Tačka A_2 pripada pozitivnom delu x-ose;
3) Tačke A_3 i A_4 imaju pozitivne y-koordinate, sl. 82.



Tada dobijamo: Sl. 82.

$$A_1(0,0),\quad A_2(a,0),\quad A_3(a+b\cos\varphi, b\sin\varphi),\quad A_4(b\cos\varphi, b\sin\varphi),$$
$$C_4(b\sin\varphi, -b\cos\varphi),\quad B_3(a+b\cos\varphi, b\sin\varphi - a),\quad O_1(a/2, a/2),$$
$$O_3\left(\frac{a}{2}+b\cos\varphi, b\sin\varphi-\frac{a}{2}\right),\quad O_4\left(\frac{b}{2}(\sin\varphi+\cos\varphi), \frac{b}{2}(\sin\varphi-\cos\varphi)\right),$$
$$\begin{aligned}O_3O_4^2 &= (a/2+b(\cos\varphi-\sin\varphi)/2)^2+(a/2-b(\cos\varphi+\sin\varphi)/2)^2\\ &= a^2/2-ab\sin\varphi+b^2/2,\\ O_1O_4^2 &= (b(\sin\varphi+\cos\varphi)/2-a/2)^2+(b(\sin\varphi-\cos\varphi)/2-a/2)^2\\ &= a^2/2-ab\sin\varphi+b^2/2,\\ O_1O_3^2 &= (b\cos\varphi)^2+(b\sin\varphi-a)^2 = a^2-2ab\sin\varphi+b^2 = O_1O_4^2+O_3O_4^2.\end{aligned}$$

Prema tome, ugao $O_1O_4O_3$ je prav. Analogno se dokazuje da su i ostali uglovi četvorougla $O_1O_2O_3O_4$ pravi, a kako je i $O_3O_4 = O_1O_4$, taj četvorougao je kvadrat. Njegova površina jednaka je

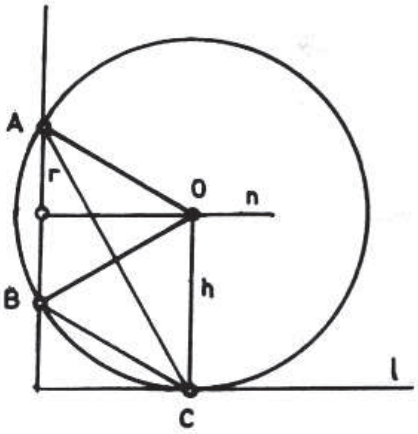
$$\frac{1}{2}a^2 - ab\sin\varphi + \frac{1}{2}b^2 = \frac{1}{4}(2a^2+2b^2) - ab\sin\varphi.$$

Time je dokaz završen.

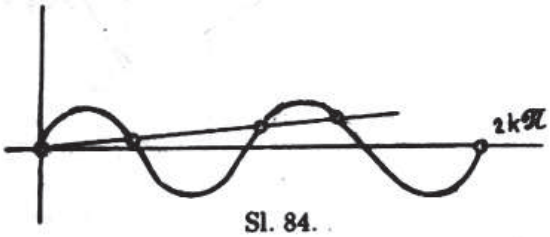
71.3.4. Neka je k krug koji sadrži tačke A i B i tačku $C \in l$ i neka je O centar tog kruga, sl. 83. Iz tačke C posmatrač vidi duž AB pod uglom

$$\angle BCA = \frac{1}{2}\angle BOA.$$

Taj ugao je najveći ako je rastojanje tačke O (centra kruga koji ima zajedničkih tačaka sa pravom l) od prave AB najmanje moguće. Lako se dokazuje da se to postiže ako krug k dodiruje pravu l i da je u tom slučaju rastojanje tačke C od prave AB (a to je traženo rastojanje) jednako $\sqrt{h^2 - r^2}$.



Sl. 83.



Sl. 84.

71.4.1. Neka je $x_j = \log_{a_j}(a_1a_2\cdots a_{j-1}a_{j+1}\cdots a_n)$, gde je $j \in \{1,2,\ldots,n\}$. Tada su brojevi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitivni, pa koristeći nejednakost između sredine reda m i aritmetičke sredine i osobine logaritma dobijamo

$$\sum_{j=1}^{n}(\log_{a_1a_2\cdots a_{j-1}a_{j+1}\cdots a_n} a_j)^{-m} = n\,\frac{x_1^m + x_2^m + \cdots + x_n^m}{n}$$

$$\geq n\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)^m = n\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i\neq j}\log_{a_j} a_i\right)^m$$

$$= n\left(\frac{1}{n}\sum_{i\neq j}(\log_{a_j} a_i + \log_{a_i} a_j)\right)^m \geq \frac{1}{n^{m-1}}\left(\binom{n}{2}\cdot 2\right)^m = n(n-1)^m.$$

(Koristili smo nejednakost $\log_{a_j} a_i + \log_{a_i} a_j = \log_{a_j} a_i + \dfrac{1}{\log_{a_j} a_i} \geq 2$.) Jednakost važi ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

71.4.2. Neka je b_n broj presečnih tačaka prave $f(x) = 2x/n\pi$ i sinusoide $g(x) = \sin x$ kod kojih je $x > 0$. Primetimo da ako je $f(a) = g(a)$, onda je $a = \dfrac{n\pi}{2}\sin a \leq \dfrac{n\pi}{2}$, tj. pozitivne nule funkcije $f(x) - g(x)$ pripadaju intervalu

$$I_n = \left(0, \frac{n\pi}{2}\right].$$

a) Neka je $n = 4k$. Tada je $I_n = (0, 2k\pi]$. Dokažimo da interval $(0, 2\pi]$ sadrži jednu nulu funkcije $f(x) - g(x)$, a svaki od intervala $\big(2(j-1)\pi, 2j\pi\big]$, gde je

$j \in \{2,3,\dots,k\}$, sadrži dve nule te funkcije, sl. 84. Za $j = 1$ to se lako proverava za interval $(0, 2\pi]$. Za $k > 1$ i $j \in \{2,3,\dots,k\}$ dobijamo

$$\varphi(x) = f(x) - g(x) = \sin x - \frac{x}{2k\pi}, \quad \varphi(2(j-1)\pi) = -\frac{j-1}{k} < 0,$$
$$\varphi(2(j-1)\pi + \pi/2) = \frac{4k-4j+3}{4k} > 0, \quad \varphi(2(j-1)\pi + \pi) = -\frac{2j-1}{2k} < 0.$$

Iz neprekidnosti funkcije φ, konveksnosti sinusa na intervalima

$$\big(2(j-1)\pi, 2(j-1)\pi + \pi\big], \qquad j \in \{2,3,\dots,k\}$$

i negativnosti sinusa na intervalima

$$(\pi, 2\pi), \quad (3\pi, 4\pi), \quad \dots, \quad \big((2k-1)\pi, 2k\pi\big)$$

sledi navedeno tvrđenje. Prema tome, $b_{4k} = 2(k-1) + 1 = 2k - 1$.

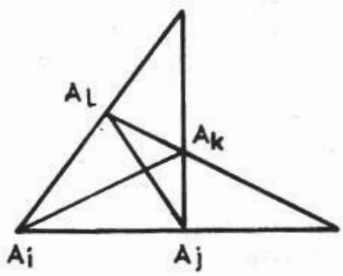
b) Neka je $n = 4k + 1$. Tada je $I_n = \big(0, (2k + 1/2)\pi\big]$. Interval $(0, 2k\pi]$ sadrži tačno $2k-1$ nula funkcije $\varphi(x)$, a interval $\big(2k\pi, (2k+1/2)\pi\big]$ još dve nule te funkcije, pri čemu je desni kraj intervala, tj. broj $(2k + 1/2)\pi$ jedna od tih nula. Zato je $b_{4k+1} = 2k + 1$.

c) Neka je $n = 4k+2$. Tada je $I_n = \big(0, (2k+1)\pi\big]$ i $b_{4k+2} = b_{4k+1} = 2k+1$, jer interval $(0, 2k\pi]$ sadrži $2k - 1$ nula funkcije $\varphi(x)$, a interval $\big(2k\pi, (2k+1)\pi\big]$ sadrži dve nule te funkcije, pri čemu prva i druga polovina tog intervala sadrže po jednu nulu.

d) Neka je $n = 4k+3$. Tada je $I_n = \big(0, (2k+3/2)\pi\big]$ i $b_{4k+3} = b_{4k+1} = 2k+1$, jer interval $\big(2k\pi, (2k+3/2)\pi\big]$ sadrži tačno dve nule funkcije $\varphi(x)$.

Primetimo da za svako n važi $b_n = 2[(n-1)/4] + 1$. Prema tome traženi broj je jednak

$$4\left[\frac{n-1}{4}\right] + 2.$$



Sl. 85.

71.4.3. Odredimo broj presečnih tačaka koje se razlikuju od tačaka $A_1, A_2, \dots, A_n$. Svaka 4-kombinacija $\{A_i, A_j, A_k, A_l\}$ elemenata skupa $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ određuje najviše tri nove presečne tačke, sl. 85. Kako je broj 4-kombinacija elemenata tog skupa jednak $\binom{n}{4}$, to je broj presečnih tačaka koje se razlikuju od tačaka $A_1, A_2, \dots, A_n$ jednak najviše $3\binom{n}{4}$.

71.4.4. a) Primetimo da je $f_1(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin x/2}{x/2}\right)^2$ i da za $n > 1$ važi

$$f_n(x) = \frac{1 - \cos x \cos 2x \cdots \cos nx}{x^2} = \frac{1 - \cos nx}{x^2} + f_{n-1}(x)\cos nx$$
$$= \frac{n^2}{2}\left(\frac{\sin(nx/2)}{nx/2}\right)^2 + f_{n-1}(x)\cos nx.$$

Na osnovu toga dobijamo

$$f_1 = \lim_{x\to 0} f_1(x) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to 0} f_n(x) = \frac{n^2}{2} + \lim_{x\to 0} f_{n-1}(x), \quad \text{ako je } n > 1.$$

Sada indukcijom lako dobijamo da za svaki prirodan broj n postoji $\lim_{x\to 0} f_n(x)$.

b) Iz prethodnog razmatranja sledi $f_n = \frac{n^2}{2} + f_{n-1}$, ako je $n > 1$.

c) Sabirajući jednakosti $f_k - f_{k-1} = \frac{k^2}{2}$, $k = 2, 3, \ldots, n$, dobijamo

$$f_n = f_1 + \frac{1}{2}(2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) = \frac{1}{2}(1 + 2^2 + \cdots + n^2) = \frac{1}{12}n(n+1)(2n+1).$$

72.2.1. Ako je $\beta_1\beta_3 < 0$, onda je $\beta_1\beta_3 - \beta_2^2 < 0$. Ako je $\beta_1\beta_3 > 0$, onda uvodeći oznake $a = -\alpha_2\beta_2$, $d = a - \alpha_1\beta_1$ dobijamo $\alpha_1\beta_1 = a - d$, $\alpha_3\beta_3 = a + d$,

$$\alpha_1 = \frac{a-d}{\beta_1}, \quad \alpha_2 = -\frac{a}{\beta_2}, \quad \alpha_3 = \frac{a+d}{\beta_3},$$
$$0 < \alpha_1\alpha_3 - \alpha_2^2 = \frac{a^2 - d^2}{\beta_1\beta_3} - \frac{a^2}{\beta_2} = \frac{a^2(\beta_2^2 - \beta_1\beta_3) - d^2\beta_2^2}{\beta_1\beta_2^2\beta_3},$$

pa dalje sledi $\beta_2^2 - \beta_1\beta_3 > 0$, tj. $\beta_1\beta_3 - \beta_2^2 < 0$.

72.2.2. Leva strana date nejednačine može se transformisati na sledeći način:

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}$$
$$= \sqrt{x-1} + 1 + \left|\sqrt{x-1} - 1\right| = \begin{cases} 2\sqrt{x-1}, & \text{za } x \geq 2, \\ 2, & \text{za } 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

Odatle zaključujemo sledeće:

1° ako je $a > 2$, jednačina ima jedinstveno rešenje $x = 1 + a^2/4$;

2° ako je $a = 2$, rešenja jednačine su svi realni brojevi x za koje je $1 \leq x \leq 2$;

3° ako je $a < 2$, jednačina nema rešenja.

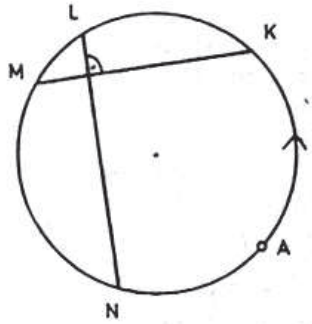
72.2.3. a) Pretpostavimo, određenosti radi, da je krug pozitivno orijentisan. Dokazaćemo da su u tom slučaju tetive KM i NL međusobno normalne ako i samo ako važi

$$\widehat{AK} + \widehat{AM} = \widehat{AL} + \widehat{AN} - \pi. \tag{1}$$

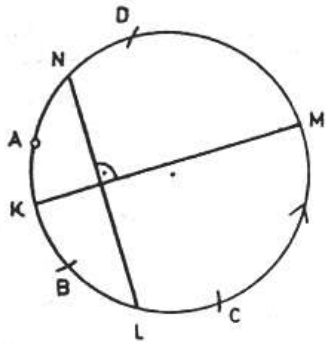
Slučaj negativno orijentisanog kruga razmatra se analogno.

Pretpostavimo najpre da je $KM \perp LN$. Kako je ugao između dve tetive u orijentisanom krugu jednak poluzbiru radijanskih mera lukova koje odsecaju te tetive, to je $\pi/2 = (\widehat{KL} + \widehat{MN})/2$, odnosno $\widehat{KL} + \widehat{MN} = \pi$. Međutim, važi $\widehat{KL} = \widehat{AL} - \widehat{AK}$ i $\widehat{MN} = \widehat{AN} - \widehat{AM}$, sl. 86, pa dobijamo $\widehat{AL} - \widehat{AK} + \widehat{AN} - \widehat{AM} = \pi$, što je na drugi način zapisana relacija (1).

Pretpostavimo sada da važi (1). Zamenom $\widehat{AL}-\widehat{AK}=\widehat{KL}$ i $\widehat{AN}-\widehat{AM}=\widehat{MN}$ odatle dobijamo $\widehat{KL}+\widehat{MN}=\pi$, pa dalje sledi $\pi/2=(\widehat{KL}+\widehat{MN})/2$, što znači da su tetive KM i LN međusobno normalne.



Sl. 86.

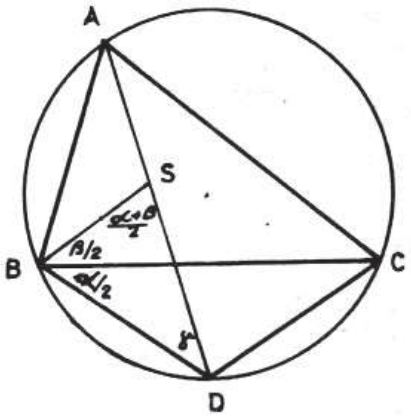


Sl. 87.

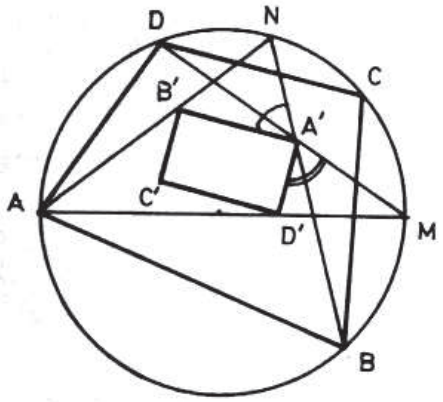
b) Orijentišimo dati krug pozitivno. Tada je (sl. 87):

$$\begin{aligned}&\widehat{AK}+\widehat{AM}-\widehat{AL}-\widehat{AN}\\&=\frac{1}{2}\widehat{AB}+\left(\widehat{AB}+\widehat{BC}+\frac{1}{2}\widehat{CD}\right)-\left(\widehat{AB}+\frac{1}{2}\widehat{BC}\right)-\left(\widehat{AB}+\widehat{BC}+\widehat{CD}+\frac{1}{2}\widehat{DA}\right)\\&=-\frac{1}{2}(\widehat{AB}+\widehat{BC}+\widehat{CD}+\widehat{DA})=-\pi,\end{aligned}$$

pa na osnovu a) sledi da je $KM\perp LN$.



Sl. 88.



Sl. 89.

72.2.4. a) Označimo uglove trougla ABC sa α, β i γ na uobičajeni način. Tačka D je središte luka BC opisanog kruga, pa je $DB=DC$, sl. 88. Dalje je

$\angle DBC = \angle DAC = \alpha/2$ i

$$\begin{aligned}\angle DSB &= 180^\circ - (\angle SBD + \angle BDS)\\ &= 180^\circ - (\angle SBC + \angle CBD + \angle BCA)\\ &= 180^\circ - (\alpha/2 + \beta/2 + \gamma) = (\alpha+\beta)/2 = \angle SBD.\end{aligned}$$

Znači, trougao SBD je jednakokrak i $DB = DS$.

b) Označimo veličine centralnih uglova koji odgovaraju lucima AB, BC, CD i DA, redom, sa 2α, 2β, 2γ i 2δ, a središta lukova BC i CD sa M i N, sl. 89. Tada tačke B' i D' pripadaju dužima AN, odnosno AM, a A' je presek duži BN i DM. Na osnovu a) imamo $NB' = ND = NC = NA'$, pa je trougao $B'A'N$ jednakokrak i $\angle B'A'N = (180^\circ - \angle ANB)/2 = 90^\circ - \alpha/2$. Analogno se dobija da je $\angle D'A'M = 90^\circ - \delta/2$. Kako je $\angle BA'M = \angle DA'N = (\beta+\gamma)/2$, to je

$$\begin{aligned}\angle B'A'D' &= 180^\circ - \angle B'A'N - (\angle D'A'M - \angle BA'M)\\ &= 180^\circ - (90^\circ - \alpha/2) - (90^\circ - \delta/2) + (\gamma+\delta)/2 = 90^\circ.\end{aligned}$$

Analogno se dokazuje i da su ostali uglovi četvorougla $A'B'C'D'$ pravi, pa je on pravougaonik.

72.3.1. Uvedimo smenu $\sin x + \cos x = t$, $|t| \le \sqrt{2}$. Tada je $2\sin x\cos x = t^2 - 1$, pa se data jednačina svodi na

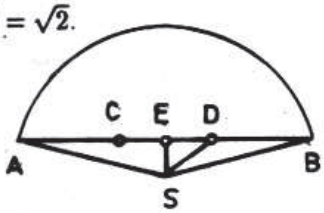
$$(a-1)(t+1) = t^2 - 1, \qquad t^2 \ne 1.$$

To je moguće jedino za $t = a$. Rešenja jednačine $\sin x + \cos x = a$ postoje ako je $|a| \le \sqrt{2}$ i ona zadovoljavaju polaznu jednačinu ako je $|a| \ne 1$. Pod navedenim uslovima data jednačina ima rešenja

$$x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^n \arcsin\frac{a}{\sqrt{2}} + n\pi,$$

gde $n \in \mathbf{Z}$ ako je $|a| < \sqrt{2}$ i $|a| \ne 1$, a $n/2 \in \mathbf{Z}$ ako je $|a| = \sqrt{2}$.

72.3.2. a) Slučaj $\alpha = \pi$ je trivijalan (tada je i $x = \pi$). U slučaju da je $0 < \alpha < \pi$ označimo sa E podnožje normale iz tačke S na AB, sl. 90. Iz pravouglih trouglova SED i SEB dobijamo $\operatorname{tg} x/2 = ED/SE$ i $\operatorname{tg}\alpha/2 = EB/SE$, odakle je $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Zato je



Sl. 90.

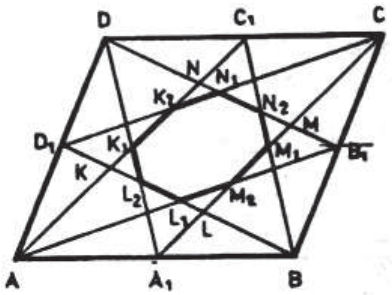
$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\frac{1}{9}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\frac{1}{9}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{9-\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}{9+\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{4+5\cos\alpha}{5+4\cos\alpha},$$

jer je, po pretpostavci, $1+\cos\alpha \ne 0$.

b) Označimo $\cos\alpha/3 = t$. Na osnovu a) je

$$\cos x - \cos\frac{\alpha}{3} = \frac{4+5\cos\alpha}{5+4\cos\alpha} - t = \frac{4+5(4t^3-3t)}{5+4(4t^3-3t)} - t = \frac{-4(t-1)^2(t+1)(4t-1)}{16t^3-12t+5}.$$

c) Kako je, prema uslovima zadatka, $0 < \alpha \le \pi$, tj. $1/2 \le t < 1$, jedina mogućnost da bude $\cos x - \cos\alpha/3 = 0$ jeste $\alpha = 3\arccos 1/4$.



Sl. 91.

72.3.3. Označimo sa A_1, B_1, C_1 i D_1 središta stranica AB, BC, CD i DA paralelograma $ABCD$ površine S, sa K, K_1 i K_2 presečne tačke prave AC_1 s pravama, redom, BD_1, DA_1 i CD_1. Analogno definišimo tačke L, L_1 i L_2, M, M_1 i M_2, kao i N, N_1 i N_2, sl. 91. Zbog $AA_1 \parallel CC_1$ i $AA_1 = CC_1 = AB/2$, četvorougao AA_1CC_1 je paralelogram koji ima istu visinu i upola manju osnovicu od datog, pa je njegova površina jednaka $S/2$. Zbog $LM \parallel KN$ i $KL \parallel MN$, četvorougao $KLMN$ je takođe paralelogram. Njegova visina jednaka je visini paralelograma AA_1CC_1; izračunajmo njegovu osnovicu KN. Duži D_1K, MB_1 i C_1N su srednje duži, redom, trouglova AND, CLB i DMC, pa je

$$AK = KN = LM = MC = 2NC_1,$$

odakle sledi $KN = \frac{2}{5}AC_1$. Zato je površina paralelograma $KLMN$ jednaka $S/5$.

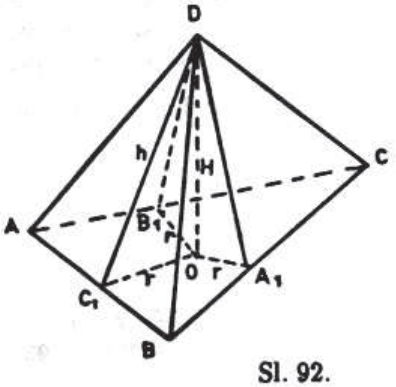
Tačka K_1 je presek dijagonala paralelograma AA_1C_1D, pa je $AK_1 = K_1C_1$. Tačka K_2 je težište trougla ACD (kao presek njegovih težišnih duži AC_1 i CD_1), pa je $AK_2 = 2K_2C_1$. Iz ovih činjenica lako se izvodi da je $KK_1 = KN/4$ i $K_2N = KN/3$. Na sličan način dobijamo da je $KL_2 = KL/3$. Zato je

$$\begin{aligned} P_{KK_1L_2} &= \frac{1}{2}KK_1 \cdot KL_2 \sin\angle K_1KL_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}KN\cdot\frac{1}{3}\sin\angle NKL \\ &= \frac{1}{12}P_{NKL} = \frac{1}{24}P_{KLMN} = \frac{1}{120}S. \end{aligned}$$

Analogno se izvodi da je $P_{LL_1M_2} = P_{MM_1N_2} = P_{NK_1K_2} = S/120$ i, najzad,

$$P_{K_1L_2L_1M_2M_1N_2N_1K_2} = \frac{1}{5}S - 4\cdot\frac{1}{120}S = \frac{S}{6}.$$

72.3.4. Neka je strana površine S_0 osnova ABC piramide $ABCD$. Označimo sa O podnožje visine piramide i sa A_1, B_1, C_1 podnožja visina bočnih strana BCD, CAD i ABD iz temena D, sl. 92. Tada su uglovi DA_1O, DB_1O i DC_1O, prema pretpostavci, jednaki, pa su trouglovi DA_1O, DB_1O i DC_1O podudarni. Dakle, tačka O je centar upisanog kruga trougla ABC; označimo sa r poluprečnik tog kruga. Označimo još:



Sl. 92.

$DO = H$, $DA_1 = DB_1 = DC_1 = h$, $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ i $S_1 + S_2 + S_3 = S$.

Iz trouglova BCD, CAD i ABD dobijamo $a = 2S_1/h$, $b = 2S_2/h$ i $c = 2S_3/h$. Poluobim s trougla ABC jednak je $(a+b+c)/2 = S/h$, pa za njegovu površinu S_0 važi

$$S_0^2 = s(s-a)(s-b)(s-c) = \frac{S(S-2S_1)(S-2S_2)(S-2S_3)}{h^4},$$

odakle je

$$h = \sqrt[4]{\frac{S(S-2S_1)(S-2S_2)(S-2S_3)}{S_0^2}}.$$

Dalje je

$$r = \frac{S_0}{s} = \frac{S_0 h}{S} \quad \text{i} \quad H = \sqrt{h^2 - r^2} = \frac{h}{S}\sqrt{S^2 - S_0^2},$$

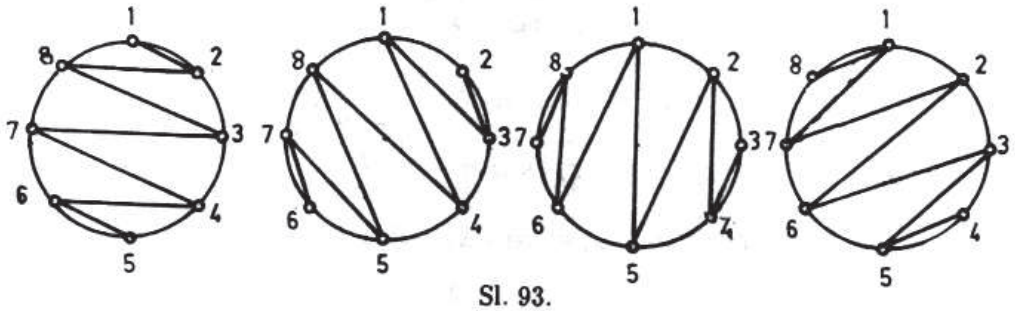
pa je tražena zapremina piramide

$$V = \frac{1}{3}S_0 H = \frac{1}{3}\sqrt{S_0(S^2 - S_0^2)}\sqrt[4]{\frac{(S-2S_1)(S-2S_2)(S-2S_3)}{S^3}}.$$

72.4.1. Dati broj napišimo u obliku

$$\begin{aligned} n + 3n^3 + 7n^7 + 9n^9 &= 10n^9 + (n - n^9) + 10n^7 + 3(n^3 - n^7) \\ &= 10(n^9 + n^7) + n(1-n)(1+n)(1+n^2)(1+3n^2+n^4). \end{aligned}$$

Lako se proverava da su za svaki prirodan broj n oba sabirka u poslednjem zbiru deljiva sa 10.



Sl. 93.

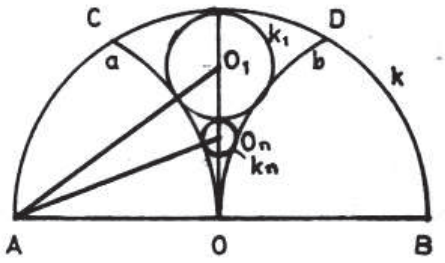
72.4.2. Neka je S skup od n elemenata. Pretpostavimo da skup P koji se sastoji od m permutacija skupa S ima to svojstvo da su proizvoljna dva elementa skupa S susedna najviše u jednoj permutaciji iz P. Svaka permutacija skupa S sadrži $n-1$ par susednih elemenata, a skup S sadrži $\frac{n(n-1)}{2}$ dvočlanih podskupova. Stoga mora biti

$$m(n-1) \le \frac{n(n-1)}{2}.$$

Sledi da je

$$m \le \left[\frac{n}{2}\right].$$

Jednakost se dostiže. Za $n = 8$ to se vidi iz sledećeg primera: 12837465, 23148576, 34251687, 81726354 (sl. 93). Sličan primer postoji za proizvoljno n.



Sl. 94.

72.4.3. Označimo centre krugova $k_1, k_2, \ldots$ redom sa $O_1, O_2, \ldots$, sl. 94. Iz pravouglog trougla AOO_1 imamo

$$(r - r_1)^2 + r^2 = (r + r_1)^2,$$

odakle je

$$r_1 = \frac{r}{4} = \frac{r}{2 \cdot 1(1+1)},$$

pa tvrđenje zadatka važi za $i = 1$.

Pretpostavimo sada da tvrđenje $r_i = \dfrac{r}{2i(i+1)}$ važi za sve prirodne brojeve i manje od nekog prirodnog broja n. Tada je

$$\sum_{i=1}^{n-1} r_i = \frac{r}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i(i+1)} = \frac{r}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) = \frac{r}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right). \tag{1}$$

Dokažimo da je i $r_n = \dfrac{r}{2n(n+1)}$. Iz pravouglog trougla AOO_n dobijamo

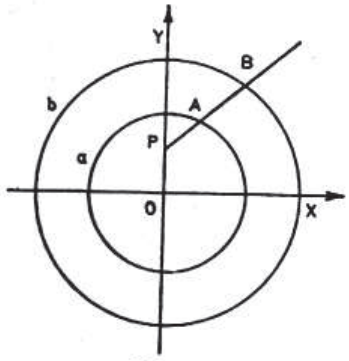
$$\left(r - 2\sum_{i=1}^{n-1} r_i - r_n\right)^2 + r^2 = (r + r_n)^2,$$

odakle, korišćenjem (1), sledi

$$r_n = \frac{\left(r - 2\sum\limits_{i=1}^{n-1} r_i\right)^2}{4\left(r - \sum\limits_{i=1}^{n-1} r_i\right)} = \frac{r}{2n(n+1)}.$$

Time je indukcijom dokazano tvrđenje zadatka

72.4.4. Uvedimo koordinatni sistem tako da je tačka O koordinatni početak, a tačka P na y-osi. Neka je d ordinata tačke P, r i R poluprečnici krugova a i b i neka je $r < R$, sl. 95. Jednačina poluprave l je $y = kx + d$, s tim da je x stalnog znaka — nije ograničenje opštosti ako pretpostavimo da je $x > 0$. Što se koeficijenta k tiče, dozvoljavamo da on (formalno) uzima i vrednost ∞, u kom slučaju se poluprava l poklapa sa delom y-ose.



Sl. 95.

Ako su A i B presečne tačke poluprave l i krugova a i b, njihove koordinate su:

$$x_A = \frac{-kd + \sqrt{(1+k^2)r^2 - d^2}}{1+k^2}, \quad y_A = kx_A + d,$$
$$x_B = \frac{-kd + \sqrt{(1+k^2)R^2 - d^2}}{1+k^2}, \quad y_B = kx_B + d,$$

pa im je rastojanje jednako:

$$D(k) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = (x_B - x_A)\sqrt{1+k^2}$$
$$= \sqrt{R^2 - \frac{d^2}{1+k^2}} - \sqrt{r^2 - \frac{d^2}{1+k^2}} = \frac{R^2 - r^2}{\sqrt{R^2 - \frac{d^2}{1+k^2}} + \sqrt{r^2 - \frac{d^2}{1+k^2}}}.$$

Poslednji izraz ima najveću vrednost $\sqrt{R^2 - d^2} - \sqrt{r^2 - d^2}$ za $k = 0$, tj. kada je poluprava l normalna na OP.

72.MO.1. Predstavimo date kompleksne brojeve u trigonometrijskom obliku:

$$u + iz = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),$$
$$v + iy = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$
$$w + iz = r_3(\cos\varphi_3 + i\sin\varphi_3).$$

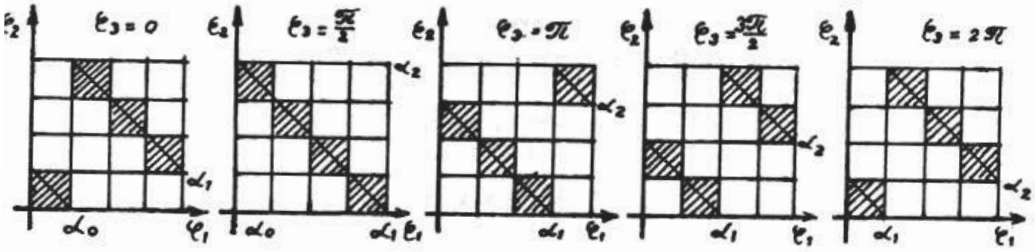
Pri tom je, prema pretpostavci, $0 < \varphi_i < 2\pi$ i $\varphi_i \neq k\pi/2$ $(k \in \mathbf{Z})$ za $i = 1, 2, 3$. Data relacija onda glasi

$$r_1r_2r_3(\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)) = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

i, pri pogodnom izboru brojeva r_1, r_2 i r_3, važi ako i samo ako je $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \{0, 1, 2\}$. Zadatak zato možemo preformulisati na sledeći način:

• U prostornom koordinatnom sistemu, čije su ose označene sa φ_1, φ_2 i φ_3, data je kocka $0 < \varphi_1 < 2\pi$, $0 < \varphi_2 < 2\pi$, $0 < \varphi_3 < 2\pi$, koja je ravnima $\varphi_i = l\frac{\pi}{2}$ $(i = 1, 2, 3;\ l = 1, 2, 3)$ podeljena na 64 manje kocke. Treba odrediti broj tih manjih kocki čija unutrašnjost ima neprazan presek sa nekom od ravni α_k sa jednačinom $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k = 0, 1, 2)$.

Lako je videti da ravan α_0 čija je jednačina $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \frac{\pi}{2}$ seče unutrašnjost samo jedne kocke — one koja je u „donjem levom" uglu velike kocke (sl. 96). Ravan α_1 čija je jednačina $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \frac{\pi}{2} + 2\pi$ seče unutrašnjost 7 kocki kod kojih je $0 < \varphi_3 < \frac{\pi}{2}$, zatim 7 kocki kod kojih je $\frac{\pi}{2} < \varphi_3 < \pi$, 5 kocki kod kojih je $\pi < \varphi_3 < \frac{3\pi}{2}$ i, najzad, 3 kocke kod kojih je $\frac{3\pi}{2} < \varphi_3 < 2\pi$ — dakle ukupno 22

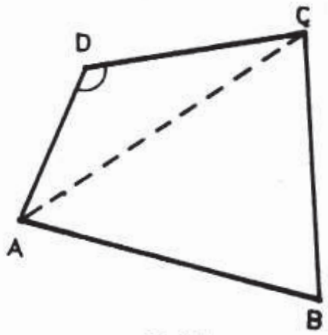


Sl. 96.

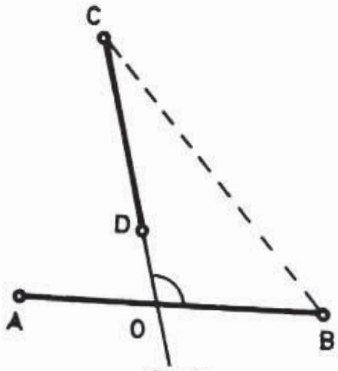
kocke. Ravan α_2 čija je jednačina $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \frac{\pi}{2} + 4\pi$ ne seče unutrašnjost nijedne od kocki kod kojih je $0 < \varphi_3 < \frac{\pi}{2}$; ona seče unutrašnjost jedne kocke kod koje je $\frac{\pi}{2} < \varphi_3 < \pi$, zatim 3 kocke kod kojih je $\pi < \varphi_3 < \frac{3\pi}{2}$ i 5 kocki kod kojih je $\frac{3\pi}{2} < \varphi_3 < 2\pi$ — dakle ukupno 9 kocki.

Znači, traženi broj kocki, a samim tim i broj traženih mogućnosti izbora predznaka, jeste $1 + 22 + 9 = 32$.

72.MO.2. Pretpostavimo, suprotno tvrđenju, da su AB i CD disjunktni dijametri datog konveksnog skupa. Razmotrimo dve mogućnosti: (a) nijedan od odsečaka AB i CD ne seče pravu određenu drugim odsečkom; (b) jedan od tih odsečaka seče pravu određenu drugim odsečkom.



Sl. 97.



Sl. 98.

U slučaju (a) četvorougao $ABCD$ (ili $ABDC$) je konveksan, sl. 97. Jedan od uglova tog četvorougla — npr. ugao kod D — nije manji od $90°$. No, onda je $AC > CD$, pa CD nije dijametar, suprotno pretpostavci.

U slučaju (b) neka recimo duž AB seče pravu određenu odsečkom CD u tački O i neka je tačka D između C i O, sl. 98. Jedan od uglova AOC i BOC — npr. ugao BOC — nije manji od $90°$. Tada je $BC > OC > CD$, pa opet CD nije dijametar.

Dakle, u oba slučaja dobija se kontradikcija, pa je time dokazano da se duži AB i CD seku.

72.MO.3. Označimo sa X skup svih n-varijacija $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ skupa $\{-1, 1\}$. Prema pretpostavci je za svako $x \in X$ ispunjeno

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n| \leq M,$$

pa je, s obzirom da skup X ima 2^n elemenata,

$$\sum_{x \in X} \sum_{j=1}^{n} |a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n| \leq 2^n M.$$

Tu nejednakost možemo napisati i u obliku:

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{2^n} \sum_{x \in X} |a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n| \right) \leq M.$$

Za svako fiksirano $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sabirke sume

$$S_j = \sum_{x \in X} |a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n|,$$

kojih ima 2^n, razbijmo na 2^{n-1} parova, tako da se varijacije x i x' koje odgovaraju sabircima jednog para razlikuju samo u elementu x_j (u jednoj je $x_j = 1$, a u drugoj $x'_j = -1$). Tada je zbir ta dva sabirka oblika $|A + a_{jj}| + |A - a_{jj}|$, gde je

$$A = a_{j1}x_1 + \cdots + a_{j,j-1}x_{j-1} + a_{j,j+1}x_{j+1} + \cdots + a_{jn}x_n.$$

No,

$$|A + a_{jj}| + |A - a_{jj}| \geq |(A + a_{jj}) - (A - a_{jj})| = 2|a_{jj}|,$$

pa je $S_j \geq 2^{n-1} \cdot 2|a_{jj}| = 2^n|a_{jj}|$. Zato je

$$|a_{11}| + \cdots + |a_{nn}| = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{2^n} 2^n |a_{jj}| \right) \leq \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{2^n} S_j \right) \leq M,$$

što je i trebalo dokazati.

72.MO.4. Fiksirajmo element a_1 skupa $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ i posmatrajmo podskupove skupa X koji sadrže a_1. Takvih podskupova ima onoliko koliko ima podskupova skupa $\{a_2, \ldots, a_n\}$, dakle 2^{n-1}. Oni očigledno imaju osobinu da svaka dva od njih imaju neprazan presek, što znači da je $k(n) \geq 2^{n-1}$.

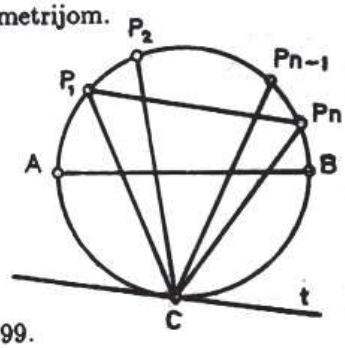
Da bismo dokazali da je $k(n) \leq 2^{n-1}$, pretpostavimo da je izabrano više od 2^{n-1} podskupova skupa X. Podelimo svih 2^n podskupova tog skupa na 2^{n-1} parova, tako da jednom paru pripadaju skup i njegov komplement. Prema Dirihleovom principu, bar dva od izabranih podskupova obrazuju jedan takav par, pa je njihov presek prazan. Znači, ne može biti $k(n) > 2^{n-1}$.

Na taj način je dokazano da je traženi broj $k(n) = 2^{n-1}$.

73.1.1. Neka su S_1, S_2, S_3 i S_4 redom skupovi matematičara koji se bave algebrom, analizom, geometrijom i logikom. Iz uslova zadatka sledi

$$S_1 \cup S_4 \subset S_2, \quad S_3 \subset S_4, \quad S_2 \cap S_3 \subset S_1.$$

Iz prvog i drugog uslova dobijamo $S_3 \subset S_2$ i $S_1 \cup S_3 \cup S_4 \subset S_2$, tj. najviše matematičara bavi se analizom. Dalje je $S_2 \cap S_3 = S_3$, pa iz trećeg uslova sledi $S_3 \subset S_1$. Konačno dobijamo $S_3 \subset S_1 \cap S_2 \cap S_4$, tj. najmanje matematičara bavi se geometrijom.



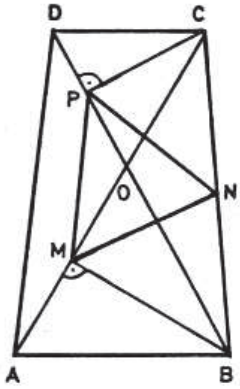
Sl. 99.

73.1.2. Zbir površina trouglova CP_1P_2, $CP_2P_3, \ldots, CP_{n-1}P_n$ jednak je površini mnogougla $CP_1 \ldots P_n$, tj. zbiru površina n-tougla $P_1P_2 \ldots P_n$ i trougla CP_1P_n, pa ima maksimalnu vrednost ako je površina trougla CP_1P_n maksimalna. Neka je t tangenta datog kruga koja je paralelna pravoj P_1P_n i koja se nalazi s one strane te prave sa koje nije tačka P_2, sl. 99. Dodirna tačka te tangente i datog kruga je tražena tačka C, jer od svih trouglova sa osnovicom AB i temenom na luku AB koji ne sadrži tačku P_2 najveću visinu ima trougao ABC.

73.1.3. Važi:

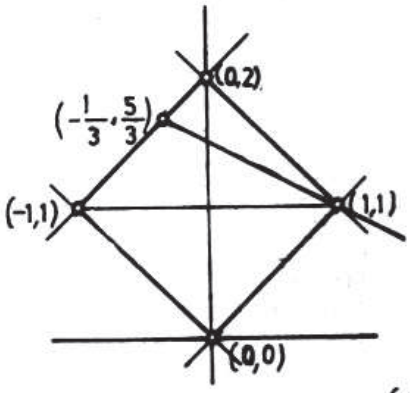
$$\sqrt{\underbrace{44\ldots4}_{2n}+\underbrace{11\ldots1}_{n+1}-\underbrace{66\ldots6}_{n}} = \sqrt{4\frac{10^{2n}-1}{9}+\frac{10^{n+1}-1}{9}-6\frac{10^n-1}{9}}$$
$$= \frac{1}{3}\sqrt{4\cdot10^{2n}+4\cdot10^n+1} = \frac{1}{3}\sqrt{(2\cdot10^n+1)^2} = \frac{1}{3}(2\cdot10^n+1)$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\underbrace{200\ldots01}_{n+1} = \underbrace{66\ldots67}_{n}.$$

73.1.4. Kako su trouglovi ABO i CDO jednakokraki i kako im je ugao kod temena O jednak $60°$, to su ti trouglovi jednakostranični, sl. 100. Na osnovu toga i uslova da su M i P redom središta duži AO i DO dobijamo $BM \perp AO$ i $CP \perp DO$. Prema tome, trouglovi BMC i BPC su pravougli sa pravim uglovima kod temena M i P. Centar opisanog kruga oko svakog od tih trouglova je središte hipotenuze BC, tj. tačka N. Na osnovu toga, uslova $AD = BC$ i činjenice da je MP srednja linija trougla ADO dobijamo



Sl. 100.

$$MP = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC = NC = NP = NM, \quad \text{tj.} \quad MN = NP = PM.$$



Sl. 101.

73.1.5. Razmotrimo sledeća četiri sistema:

1) $x \geq 0,\ y \geq 1,\ x+y=2,\ x+2y=3,$
2) $x \geq 0,\ y < 1,\ x-y=0,\ x+2y=3,$
3) $x < 0,\ y \geq 1,\ y-x=2,\ x+2y=3,$
4) $x < 0,\ y < 0,\ x+y=0,\ x+2y=3.$

Prvi od ta četiri sistema ima rešenje $(1,1)$, drugi i treći nemaju rešenja, a rešenje četvrtog sistema je $(-1/3, 5/3)$. Skup rešenja datog sistema je

$$S = \left\{ \left(1,1\right), \left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right) \right\}.$$

Na kraju primetimo da skup tačaka (x,y) za koje važi $|x| + |y-1| = 1$ predstavlja granicu kvadrata čija su temena tačke $(0,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$, $(-1,1)$. Prava $x+2y=3$ seče tu granicu u tačkama $(1,1)$ i $(-1/3, 5/3)$, sl. 101.

73.2.1. Data jednačina ekvivalentna je sa sistemom

$$2x - a = (x-b)^2, \quad x \geq b, \quad x \geq \frac{a}{2}.$$

Jednačina $2x - a = (x-b)^2$ se može zapisati u obliku

$$x^2 - 2(b+1)x + a + b^2 = 0$$

i ima rešenja $x_1 = b + 1 - \sqrt{2b-a+1}$, $x_2 = b + 1 + \sqrt{2b-a+1}$.

a) Ako je $\frac{a}{2} < b$, onda je $\frac{a}{2} < x_1 < b < x_2$, pa je samo broj x_2 rešenje date jednačine.

b) Ako je $2b \leq a < 2b+1$, onda je $b \leq \frac{a}{2} \leq x_1 < x_2$, pa su i x_1 i x_2 rešenja date jednačine.

c) Ako je $a = 2b+1$, onda je $b < \frac{a}{2} < x_1 = x_2$, pa sledi da je broj $b+1$ jedino rešenje date jednačine.

d) Ako je $a > 2b+1$, onda x_1 i x_2 nisu realni brojevi, tj. data jednačina nema realnih rešenja.

73.2.2. Neka su M, N, P, Q redom središta stranica AB, BC, CD, DA četvorougla $ABCD$, E i F redom središta dijagonala AC i BD i O presek duži MP i NQ, sl. 102. Dovoljno je dokazati da se tačke E i F poklapaju.

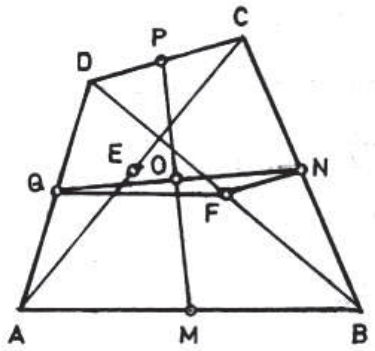
Kako su MF, NF, PF i QF srednje linije trouglova ABD i BCD, to je

$$MF = \frac{AD}{2}, \quad NF = \frac{DC}{2}, \quad PF = \frac{BC}{2}, \quad QF = \frac{AB}{2},$$

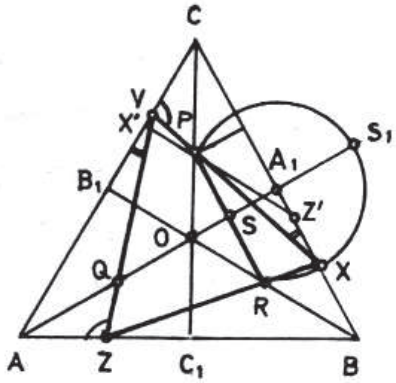
pa je $MP + QN = \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DA)$. Kako je prema uslovu zadatka i $MP + QN = \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DA)$, to je

$$MF + PF + NF + QF = MP + NQ. \tag{1}$$

Ako tačka F ne pripada bar jednoj od duži MP i NQ, na primer $F \notin MP$, onda je $MF + PF > MP$ i $NF + QF \geq NQ$, pa sledi $MF + PF + NF + QF > MP + NQ$, što je u kontradikciji sa (1). Prema tome, tačka F pripada svakoj od duži MP i NQ, tj. $F \equiv O$. Analogno dokazujemo $E \equiv O$. Zato konačno dobijamo $E \equiv F$.



Sl. 102.



Sl. 103.

73.2.3. Neka je XYZ traženi trougao, sl. 103. Tada je $XY = YZ$,

$$\begin{aligned}\angle YXC &= 180^\circ - \angle YCX - \angle XYC = 180^\circ - 60^\circ - \angle XYC \\ &= 180^\circ - \angle ZYX - \angle XYC = \angle ZYA, \\ \angle XYC &= 180^\circ - 60^\circ - \angle YXC = 180^\circ - 60^\circ - \angle ZYA = \angle YZA,\end{aligned}$$

pa su zbog toga podudarni trouglovi CXY i AYZ. Analogno dokazujemo da je svaki od tih trouglova podudaran i sa trouglom BZX. Dalje lako dobijamo $XA_1 = YB_1 = ZC_1$, $OA_1 = OB_1 = OC_1$, pa sledi da su pravougli trouglovi OA_1X, OB_1Y i OC_1Z podudarni. Zato je $OX = OY = OZ$, tj. tačka O je centar jednakostraničnog trougla XYZ. Neka je $Q = YZ \cap AO$, $R = ZX \cap BO$. Rotacija oko tačke O za ugao 120° (odnosno -120°) prevodi tačku P u tačku R (odnosno tačku Q). Zato je $OP = OQ = OR$.

Konstrukcija. Na duži OB konstruiše se tačka R tako da važi $OR = OP$. Zatim se sa one strane prave PR sa koje je stranica BC konstruiše geometrijsko mesto l tačaka iz kojih se duž PR vidi pod uglom 60°. To je luk kruga. Neka je X presečna tačka luka l i duži BC. Na kraju se konstruišu tačke Y i Z redom kao preseci pravih XP i AC, odnosno XR i AB. Trougao XYZ je traženi.

Dokaz. Prema konstrukciji je $P \in XY$ i $\angle ZXY = 60°$. Da bismo dokazali da je XYZ jednakostraničan trougao dovoljno je još dokazati da je $XZ = XY$. Analogno kao na početku dobijamo

$$\angle YXC = \angle XZB, \quad \angle XYC = \angle ZXB.$$

Rotacija za 120° oko tačke O prevodi tačke R, B, Z i X redom u tačke P, C, $Z' \in BC$ i $X' \in CA$. Tada je $\Delta Z'CX' \cong \Delta ZBX$ i $\Delta Z'CX' \cong \Delta XCY$, pa sledi $\Delta XCY \cong \Delta Z'CX'$ i odatle $CX = CZ'$ i $CY = CX'$. Kako $X', Y \in CA$ i Z', $X \in BC$, to je $X = Z'$ i $Y = X'$. Konačno dobijamo $XZ = X'Z' = YX$.

Diskusija. S obzirom da luk l i prava BC mogu imati dve, jednu ili nijednu presečnu tačku, to zadatak ima dva, jedno ili nijedno rešenje. Neka je $OP = x$, $AB = a$, $S = PR \cap AA_1$ i $S_1 = l \cap AA_1$. Tada je

$$PS = \frac{x\sqrt{3}}{2}, \quad OS = \frac{x}{2}, \quad SA_1 = \frac{a\sqrt{3}}{6} - \frac{x}{2}, \quad SS_1 = PS\sqrt{3} = \frac{3x}{2}.$$

Zadatak ima rešenja ako i samo ako je $SS_1 \geq SA_1$, tj. ako i samo ako je

$$OP = x \geq \frac{a\sqrt{3}}{12} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4}OC.$$

73.2.4. Neka je $x = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{120}{121}$ i $y = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{119}{120}$. Kako je

$$\frac{2}{3} > \frac{1}{2}, \quad \frac{4}{5} > \frac{3}{4}, \quad \frac{6}{7} > \frac{5}{6}, \quad \ldots, \quad \frac{120}{121} > \frac{119}{120},$$

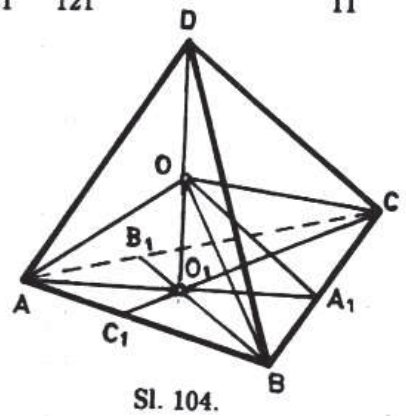
to je $x > y$ i $x^2 > xy = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{119}{120} \cdot \frac{120}{121} = \frac{1}{121}$, a odatle sledi $x > \frac{1}{11}$.

73.3.1. Uvedimo sledeće oznake:

$O_1 = DO \cap ABC$, $A_1 = AO_1 \cap BC$,
$B_1 = BO_1 \cap CA$, $C_1 = CO_1 \cap AB$,
$\alpha = \angle AOD$, $\beta = \angle BOD$, $\gamma = \angle COD$,
$\alpha_1 = \angle BOC$, $\beta_1 = \angle COA$, $\gamma_1 = \angle AOB$,
$\alpha_2 = \angle AOO_1$, $\beta_2 = \angle BOO_1$, $\gamma_2 = \angle COO_1$,

sl. 104. Tada je $\alpha + \alpha_2 = \pi$, $\beta + \beta_2 = \pi$, $\gamma + \gamma_2 = \pi$, pa sledi

$$\alpha + \beta + \gamma + \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 3\pi. \quad (1)$$



Sl. 104.

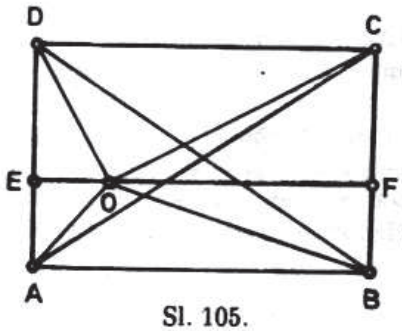
Dalje je

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \beta_1 &= \angle BOC + \angle COA = \angle BOA_1 + \angle A_1OC + \angle COA \\ &> \angle BOA_1 + \angle AOA_1 = \angle BOA + \angle A_1OO_1 + \angle AOO_1 \\ &> \angle BOO_1 + \angle AOO_1 = \alpha_2 + \beta_2\end{aligned}$$

i analogno $\beta_1 + \gamma_1 > \beta_2 + \gamma_2$, $\gamma_1 + \alpha_1 > \gamma_2 + \alpha_2$, pa sabiranjem ovih nejednakosti dobijamo

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 > \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2. \quad (2)$$

Iz (1) i (2) sledi $\alpha + \beta + \gamma + \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 > 3\pi$, što je i trebalo dokazati.



Sl. 105.

73.3.2. Koristeći formulu za površinu trougla i kosinusnu teoremu dobijamo

$$P_{BOD} = \frac{1}{2} OB \cdot OD \sin \angle BOD$$
$$= \frac{1}{4}(OB^2 + OD^2 - BD^2) \operatorname{tg} \angle BOD$$

i analogno

$$P_{AOC} = \frac{1}{4}(OA^2 + OC^2 - AC^2) \operatorname{tg} \angle AOB,$$

sl. 105. Kako je $AC = BD$, dovoljno je još dokazati da je $OB^2 + OD^2 = OA^2 + OC^2$. Neka su E i F podnožja normala iz tačke O redom na prave AD i BC. Tada je $EF \parallel AB$ i $AE = BF$, pa dalje dobijamo

$$OB^2 + OD^2 = OF^2 + BF^2 + OE^2 + DE^2 = OF^2 + AE^2 + OE^2 + CF^2$$
$$= (OE^2 + AE^2) + (OF^2 + CF^2) = OA^2 + OC^2.$$

73.3.3. Zadatak je odrediti (međusobno različite) kompleksne brojeve x, y i z za koje važi $\frac{x}{y-z} = \frac{y}{z-x} = \frac{z}{x-y}$. Ako je $\frac{x}{y-z} = \frac{y}{z-x} = \frac{z}{x-y} = k$, onda lako dobijamo $k \neq 0$, $xyz \neq 0$, $x = k(y-z)$, $y = k(z-x)$, $z = k(x-y)$. Iz jednačina $y = k(z-x)$, $z = k(x-y)$ sledi

$$y = \frac{k^2 - k}{k^2 + 1} x, \quad z = \frac{k^2 + k}{k^2 + 1} x,$$

pa zamenom u jednačini $x = k(y-z)$ dobijamo $(3k^2 + 1)x = 0$. Kako je $x \neq 0$, to je $3k^2 + 1 = 0$, tj. $k = \pm i/\sqrt{3}$. Za $k = -i/\sqrt{3}$ dobijamo $y = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} x$, $z = -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} x$, a za $k = i/\sqrt{3}$ dobijamo $y = -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} x$, $z = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} x$. Lako se proverava da su trojke

$$\left(x, -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} x, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} x\right), \quad \left(x, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} x, -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} x\right),$$

gde je x proizvoljan kompleksan broj različit od nule, rešenja datog sistema.

73.3.4. Primetimo najpre sledeće: Ako je $n = \overline{c_n c_{n-1} \ldots c_1 c_0} = \sum_{k=0}^{n} c_k 10^k$, onda je

$$n - S(n) = \sum_{k=0}^{n} c_k (10^k - 1) = 9 \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot \underbrace{11 \ldots 1}_{k},$$

tj. za svaki prirodan broj n važi $9 \mid n - S(n)$. Koristeći ovu činjenicu i jednakosti

$$S(a^m) - S^m(a) = \big(S(a^m) - a^m\big) + a^m - S^m(a)$$
$$= \big(S(a^m) - a^m\big) + \big(a - S(a)\big)\big(a^{m-1} + a^{m-2} S(a) + \cdots\big)$$

dobijamo da za svaki prirodan broj a važi $9 \mid S(a^m) - S^m(a)$.

73.4.1. Neka je $A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$. Dokazaćemo indukcijom po n sledeće tvrđenje: Svaki prirodan broj M koji nije veći od A_n može se predstaviti u obliku zbira nekoliko različitih elemenata skupa $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$.

Kako je $a_0 = 1$, to tvrđenje važi za $n = 1$. Pretpostavimo da tvrđenje važi za neki prirodan broj n. Neka je $A_n < M \leq A_{n+1}$ i $d = A_{n+1} - M$. Ako je $d = 0$, onda je $M = A_{n+1} = a_0 + \cdots + a_{n+1}$. Ako je $d > 0$, onda zbog $M > A_n$ i uslova (b) važi $d < a_{n+1} \leq 1 + A_n$, tj. $d \leq A_n$. Na osnovu indukcijske pretpostavke dobijamo da postoje brojevi $j_1, j_2, \ldots, j_k$, takvi da važi

$$0 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n, \quad d = a_{j_1} + a_{j_2} + \cdots + a_{j_k},$$

odakle sledi $M = A_{n+1} - d = (a_0 + a_1 + \cdots + a_{n+1}) - (a_{j_1} + a_{j_2} + \cdots + a_{j_k})$. Prema tome, i broj M se može predstaviti u obliku zbira nekoliko elemenata skupa $\{a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}\}$, tj. tvrđenje važi i za $n + 1$.

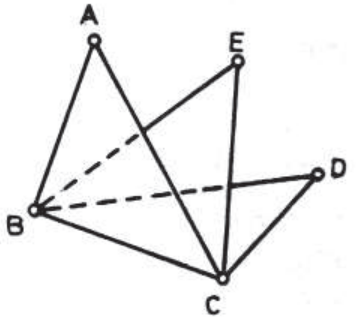
Primetimo da ako za neko n važi $1 + A_{n-1} > a_n$, onda se broj a_n može prikazati kao zbir nekih od brojeva $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, a takođe i kao $a_n = a_n$. Prema tome, uslov

$$(b_1) \qquad a_0 = 1; \quad 1 + A_{n-1} = a_n \quad \text{za svako } n \in \{1, 2, \ldots\},$$

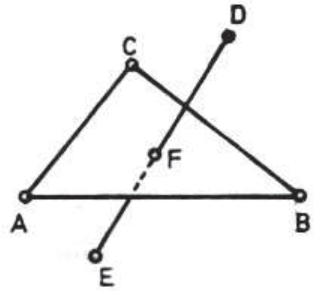
je potreban da se svaki prirodan broj na jednoznačan način može prikazati kao zbir nekoliko različitih članova niza (a_n).

Ako važi uslov (b_1), onda za svako $n \in \mathbf{N}$ važi $a_n = 1 + A_{n-1} = 1 + A_{n-2} + a_{n-1} = 2a_{n-1}$, pa zbog $a_0 = 1$ lako sledi $a_n = 2^n$. Pri tome, svaki prirodan broj se može na jednoznačan način prikazati kao zbir nekoliko članova niza $1, 2, 4, 8, \ldots$.

73.4.2. Neka su A, B, C, D, E tačke prostora, takve da nikoje četiri od njih nisu komplanarne. Dokažimo da među tim tačkama postoje dve, takve da se one nalaze sa raznih strana ravni koju određuju ostale tri tačke. Ako se tačke A i E nalaze sa iste strane ravni BCD, a tačke D i E sa iste strane ravni ABC (ako bar jedan od tih uslova ne važi, onda je dokaz završen), onda se tačka E nalazi u diedru čije su strane poluravni sa graničnom pravom BC koje sadrže tačke A i D. Tada su tačke A i D sa raznih strana ravni BCE, sl. 106.



Sl. 106.

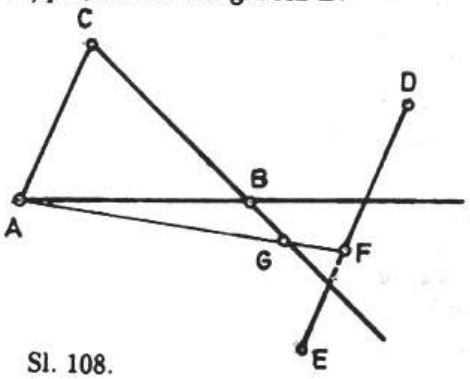


Sl. 107.

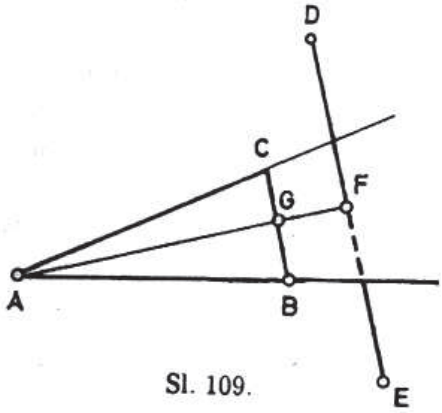
Pretpostavimo da su tačke D i E sa raznih strana ravni α koja je određena tačkama A, B i C. Neka je F presek prave DE i ravni α. Razmotrimo sledeće slučajeve:

a) Tačka F pripada trouglu ABC, sl. 107. U ovom slučaju dokaz je završen.

b) Tačka F pripada uglu koji je unakrsan sa nekim od uglova trougla ABC, na primer sa uglom ABC, sl. 108. Neka je G presek pravih AF i BC. Tada se tačka G (presek prave BC i ravni određene tačkama A, D, E) nalazi između tačaka A i F, pa pripada trouglu ADE.



Sl. 108.



Sl. 109.

c) Tačka F pripada nekom od uglova trougla ABC (recimo uglu BAC), ali je van trougla. Neka je G presek pravih BC i AF, sl. 109. Tada se tačka G (presek prave BC i ravni određene tačkama A, D, E) nalazi između tačaka A i F, pa pripada trouglu ADE.

73.4.3. Neposrednim proveravanjem (24 mogućnosti) dobija se jedino rešenje: $x = 12$, $y = 37$, $z = 65$, $t = 14$. Čitaocu prepuštamo da sam uprosti postupak, na primer, razmatrajući ostatke koje pri deljenju sa 2 i 3 daju broj 182 i proizvodi po dva od brojeva 12, 14, 37 i 65.

73.4.4. Neka je $z = x + iy$. Datu vezu između c i z možemo zapisati u obliku

$$\begin{aligned} c &= \frac{zi - i}{2z - 1} = \frac{-y + (x-1)i}{2x - 1 + 2yi} \cdot \frac{2x - 1 - 2yi}{2x - 1 - 2yi} \\ &= \frac{(1-2x)y + (x-1)2y + [(x-1)(2x-1) + 2y^2]i}{(2x-1)^2 + 4y^2}. \end{aligned}$$

Traženi skup je

$$\begin{aligned} S &= \{\, z = x + iy \mid (x-1)(2x-1) + 2y^2 = 0,\ (x,y) \neq (1/2, 0) \,\} \\ &= \left\{ z = x + iy \;\middle|\; \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{16},\ (x,y) \neq \left(\frac{1}{2}, 0\right) \right\}. \end{aligned}$$

73.MO.1. Neka su neparni brojevi a i b dužine stranica datog pravougaonika. Pretpostavimo da unutar tog pravougaonika postoji tačka T čije je rastojanje od

svakog temena pravougaonika jednako celom broju. Neka su x_1 i x_2 rastojanja tačke T od stranica dužine b, a y_1 i y_2 rastojanja te tačke od stranica dužine a. Tada je $a = x_1 + x_2$, $b = y_1 + y_2$, a brojevi

$$d_{ij} = \sqrt{x_i^2 + y_j^2}, \qquad i, j \in \{1, 2\}$$

su celi. Uvedimo sledeće oznake: $a_i = abx_i$, $b_j = aby_j$, gde $i, j \in \{1, 2\}$ i

$$A_1 = a_1 - a_2, \quad A_2 = a_1 + a_2, \quad B_1 = b_1 - b_2, \quad B_2 = b_1 + b_2.$$

Tada je

$$\begin{aligned} A_1 &= ab(x_1 - x_2) = b(x_1^2 - x_2^2) = b[(x_1^2 + y_1^2) - (x_2^2 + y_1^2)], \\ A_2 &= ab(x_1 + x_2) = a^2 b, \\ B_1 &= ab(y_1 - y_2) = a(y_1^2 - y_2^2) = a[(x_1^2 + y_1^2) - (x_1^2 + y_2^2)], \\ B_2 &= ab(y_1 + y_2) = ab^2, \end{aligned}$$

pa sledi da su A_1 i B_1 celi, a A_2 i B_2 neparni brojevi.

Pretpostavimo da je svaki od brojeva a_1, a_2, b_1, b_2 ceo. Kako su A_2 i B_2 neparni brojevi, to su tačno jedan od brojeva a_1, a_2 i tačno jedan od brojeva b_1, b_2 neparni. Neka su, na primer, a_1 i b_1 neparni brojevi. Tada je

$$a_1^2 \equiv 1 \pmod 4, \quad b_1^2 \equiv 1 \pmod 4,$$
$$a_1^2 + b_1^2 = a^2 b^2 (x_1^2 + y_1^2) = (d_{ij} ab)^2 \equiv 2 \pmod 4,$$

što nije mogućno. Prema tome, bar jedan od brojeva a_1, a_2, b_1, b_2 nije ceo. Kako je

$$2a_1 = A_1 + A_2, \quad 2a_2 = A_2 - A_1, \quad 2b_1 = B_1 + B_2, \quad 2b_2 = B_2 - B_1,$$

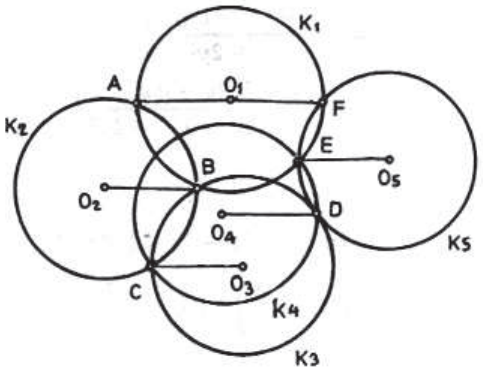
to je bar jedan od brojeva $2a_1$, $2a_2$, $2b_1$, $2b_2$ neparan. Neka je, na primer, $2a_1$ neparan broj. Tada je

$$(2a_1)^2 + (2b_1)^2 = 4(a_1^2 + b_1^2) = 4a^2 b^2 (x_1^2 + y_1^2) = 4a^2 b^2 d_{11}^2,$$

tj.

$$(2b_1)^2 = 4a^2 b^2 d_{11}^2 - (2a_1)^2 \equiv -1 \pmod 4,$$

što je kontradikcija. Ovo je kraj dokaza.



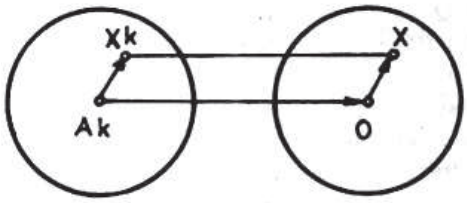
Sl. 110.

73.MO.2. Neka je k_1 dati krug sa centrom O_1 i poluprečnikom r i A proiz-

voljna tačka kruga k_1, sl. 110. Konstruišimo krug k_2 koji sadrži tačku A i seče krug k_1 u još jednoj tački B. Označimo sa O_2 centar kruga k_2. Tada je AO_2BO_1 romb stranice r, pa sledi $\overrightarrow{BO_2} = -\overrightarrow{AO_1}$. Konstruišimo krug k_3 koji sadrži tačku B i seče krug k_2 u još jednoj tački C. Zatim konstruišimo krug k_4 koji sadrži tačku C i seče krugove k_3 i k_1 u tačkama koje redom označimo sa D i E. Na kraju konstruišimo krug k_5 koji sadrži tačke D i E i različit je od k_4. Krug k_5 ima zajedničku tačku E sa krugom k_1. Neka je F druga presečna tačka ta dva kruga (ne isključuje se mogućnost $F \equiv E$). Označimo sa O_3, O_4 i O_5 redom centre krugova k_3, k_4 i k_5. Analogno kao prilikom razmatranja centara krugova k_1 i k_2 i tačaka A i B njihovog preseka dobijamo

$$\overrightarrow{FO_1} = -\overrightarrow{EO_5} = \overrightarrow{DO_4} = -\overrightarrow{CO_3} = \overrightarrow{BO_2} = -\overrightarrow{AO_1}.$$

Prema tome, tačka F kruga k_1 je dijametralno suprotna tački A.



Sl. 111.

73.MO.3. Neka su A_1, A_2, ..., A_n označene tačke i O proizvoljna tačka ravni. Označimo sa $D_1, D_2, \ldots, D_n$, D redom kružne površi sa centrima A_1, A_2, ..., A_n, O i poluprečnika 1. Translirajmo figure D_1, D_2, ..., D_n redom za vektore $\overrightarrow{A_1O}$, $\overrightarrow{A_2O}$, ..., $\overrightarrow{A_nO}$. Kako je obojena površina manja od π, to postoji unutrašnja tačka X kruga D koju posle izvršenih translacija nije pokrila obojena površina. Dokažimo da je $\overrightarrow{OX}$ vektor za koji važe postavljeni uslovi. Za proizvoljno $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ označimo sa X_k tačku određenu uslovom $\overrightarrow{A_kX_k} = \overrightarrow{OX}$. Tada je X_k unutrašnja tačka kruga D_k i važi $\overrightarrow{A_kO} = \overrightarrow{X_kX}$. Tačka X_k ne pripada obojenoj površini jer translacijom kruga D_k za vektor $\overrightarrow{A_kO}$ upravo ona prelazi u tačku X, sl. 111.

74.1.1. Označimo

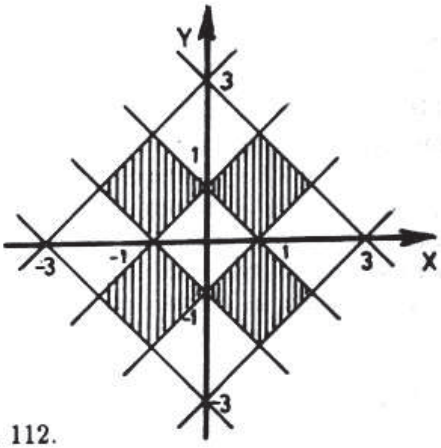
$$A = \{\, (x, y) \mid \big||x| - 1\big| + \big||y| - 1\big| \le 1 \,\}.$$

Kako za svaka dva realna broja x, y važi:

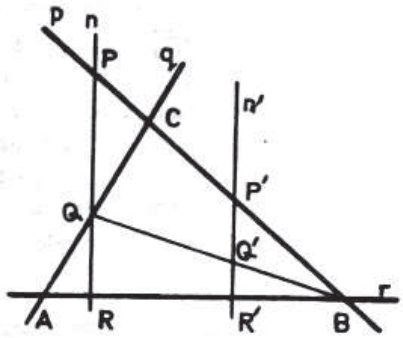
$$(x, y) \in A \;\Rightarrow\; (-x, y) \in A, \qquad (x, y) \in A \;\Rightarrow\; (x, -y) \in A,$$

to je skup A simetričan u odnosu na obe koordinatne ose. Posmatrajmo zato njegov deo u prvom kvadrantu. Tu se dati uslov svodi na $|x-1|+|y-1| \le 1$, pa on određuje kvadrat ograničen pravama $x + y = 1$, $x + y = 3$, $y = x + 1$ i $y = x - 1$. Skup A je šrafiran na sl. 112.

74.1.2. Pretpostavimo da je prava n koja zadovoljava uslove zadatka konstruisana. Označimo sa P, Q i R, redom, njene presečne tačke sa pravama p, q i r.



Sl. 112.



Sl. 113.

Označimo, dalje, sa A, B, C presečne tačke, redom, pravih q i r, r i p, p i q. Neka je R' proizvoljna tačka prave r, različita od B, a n' prava normalna na r koja sadrži R'. Označimo sa P' presek pravih p i n' i sa Q' presek pravih n' i BQ (ti preseci postoje), sl. 113. Iz paralelnosti pravih n i n' i $PQ = QR$ sledi $P'Q' = Q'R'$.

Uzimajući u obzir zaključke iz prethodne analize, konstrukciju vršimo na sledeći način: Izaberimo proizvoljnu tačku R' prave r, različitu od B i konstruišimo normalu n' na r u tački R'. Prave n' i p se ne poklapaju (jer n' ne sadrži B). Ako se one seku, označimo njihov presek sa P' i odredimo središte Q' duži $P'R'$. Prave BQ' i q se ne poklapaju (jer q ne sadrži B). Ako se one seku, označimo njihov presek sa Q, a pravu normalnu na r koja sadrži Q sa n.

Dokažimo da je n tražena prava. Po konstrukciji, ona je normalna na r. Kako prava n' seče pravu p, to i njoj paralelna prava n seče p — označimo taj presek sa P. Iz paralelnosti pravih n i n' i $P'Q' = Q'R'$ sledi da je $PQ = QR$.

Iz opisa konstrukcije sledi da zadatak ima jedno ili nijedno rešenje (poslednje ako je $p \perp r$ ili $q \parallel BQ'$).

74.1.3. Označimo traženi broj sa N. Kako je $6N$ takođe šestocifren broj, to je prva cifra broja N jedinica. Ta jedinica je onda poslednja cifra nekog od brojeva $2N$, $3N$, $4N$, $5N$ ili $6N$. Kako je 7 jedina cifra koja pomnožena jednim od brojeva 2, 3, 4, 5, 6 daje broj koji se završava sa 1 ($3 \cdot 7 = 21$), to je 7 poslednja cifra broja N, a, zbog uslova zadatka, pretposlednja cifra broja $3N$:

$$\begin{array}{rcccccc} N = & 1 & \square & \square & \square & \square & 7 \\ 3N = & \square & \square & \square & \square & 7 & 1 \end{array}$$

Nastavimo dalje ovo množenje: množenjem pretposlednje cifre broja N sa 3 treba da dobijemo broj koji se završava sa 5 (da bismo dodavanjem „prenete“ dvojke dobili pretposlednju cifru 7 broja $3N$) — to je moguće jedino ako je ta cifra 5; znači da je 5 ujedno treća cifra zdesna broja $3N$. Nastavljajući ovaj postupak, zaključujemo da mora da bude $N = 142857$ i $3N = 428571$. Ostaje još da se proveri da se zaista brojevi $2N$, $4N$, $5N$ i $6N$ u tom slučaju dobijaju iz broja N cikličnom zamenom cifara, što prepuštamo čitaocu.

74.1.4. U prvom „krugu" ispadaju deca sa parnim rednim brojevima — ostaju ona sa brojevima oblika $2k+1$, pri čemu je najmanji od tih brojeva 1, a najveći 1973. U drugom „krugu" ostaju deca sa brojevima, takvim da je razlika susednih jednaka 4; najmanji od tih brojeva je 1, a najveći 1973. Nastavak ovakvog zaključivanja prikazan je u sledećoj tablici:

KRUG	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
NAJMANJI BROJ	1	1	5	13	13	45	109	109	365	877
RAZLIKA	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
NAJVEĆI BROJ	1973	1973	1973	1965	1965	1965	1901	1901	1901	1901

U poslednjem, jedanaestom krugu ispada 877. dete, a ostaje 1901.

74.2.1. Neka je $(x_1, x_2, \ldots, x_{100})$ proizvoljno rešenje datog sistema kod koga su svi brojevi x_1, x_2, $\ldots$, x_{100} pozitivni. Dokažimo da je $x_1 = m$.

Pretpostavimo da je $x_1 > m$. Tada iz $nx_1 = mx_{100}$ sledi $x_{100} > n$, a iz $x_1+x_2 = m+n$ da je $x_2 < n$. Dalje, iz $x_2x_3 = nx_1$ sledi $x_3 > m$, a iz $x_3+x_4 = m+n$ da je $x_4 < n$. Nastavljajući ovakvo zaključivanje dobijamo na kraju da je $x_{99} > m$ i $x_{100} < n$, suprotno već dobijenom uslovu $x_{100} > n$. Dakle, ne može biti $x_1 > m$.

Na sličan način se dokazuje da ne može biti $0 < x_1 < m$. Dakle je $x_1 = m$. Sada se lako iz datog sistema dobija da mora biti $x_2 = n$, zatim $x_3 = m$, $x_4 = n$, $\ldots$, $x_{99} = m$ i $x_{100} = n$. Da je $(m, n, m, n, \ldots, m, n)$ rešenje datog sistema proverava se neposredno.

74.2.2. Data jednačina ekvivalentna je jednačini

$$(x+y)^2 = xy(xy+1).$$

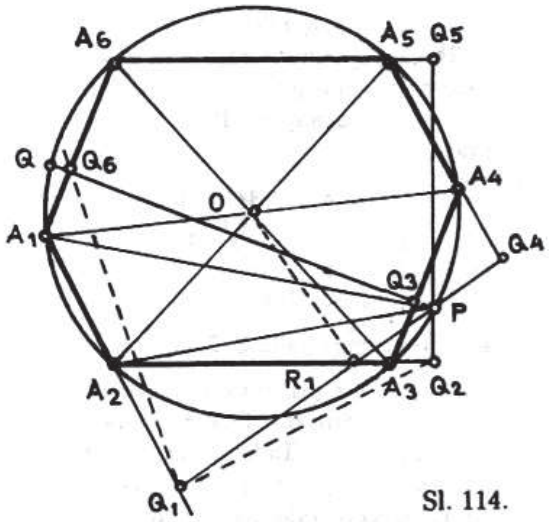
Proizvod dva uzastopna cela broja može biti kvadrat celog broja samo u slučaju da su ti brojevi -1, 0 ili 0, 1. Dakle, mora biti $xy = -1$ ili $xy = 0$ i, u oba slučaja, $x + y = 0$. Rešavajući odgovarajuće sisteme lako dobijamo da su jedina moguća celobrojna rešenja date jednačine $(0,0)$, $(1,-1)$ i $(-1,1)$. Da ona zaista zadovoljavaju tu jednačinu proverava se neposredno.

74.2.3. a) Četvorougao $A_1Q_1PQ_6$ ima dva naspramna prava ugla (kod Q_1 i Q_6), pa je tetivan. Zato je $\angle A_1Q_1Q_6 = \angle A_1PQ_6$. Prava PQ_6 ima zajedničku tačku P sa krugom k i nije normalna na poluprečnik OP, pa seče krug k još u jednoj tački, recimo Q. Pretpostavimo da je tačka Q_6 između tačaka P i Q, kao na sl. 114; ostali slučajevi razmatraju se analogno. Tada je i $\angle A_1PQ = \angle A_1Q_1Q_6$. Tačke Q i A_1 su simetrične tačkama P i A_3 u odnosu na simetralu tetive PQ kruga k, pa je luk A_3P tog kruga podudaran luku A_1Q. Znači da je i periferijski ugao PA_2A_3 nad tim lukom jednak $\angle A_1PQ$, pa i $\angle A_1Q_1Q_6$. Najzad, četvorougao $A_2Q_1Q_2P$ je tetivni (jer su uglovi A_2Q_1P i A_2Q_2P pravi), pa je

$$\angle PQ_1Q_2 = \angle PA_2Q_2 = \angle PA_2A_3 = \angle A_1Q_1Q_6.$$

Iz poslednje jednakosti i rasporeda polupravih Q_1A_1, Q_1Q_6, Q_1P i Q_1Q_2, koji sledi iz pretpostavljenog rasporeda tačaka Q, Q_6 i P, dobijamo da je

$$\angle Q_6Q_1Q_2 = \angle A_1Q_1P = 90^\circ.$$

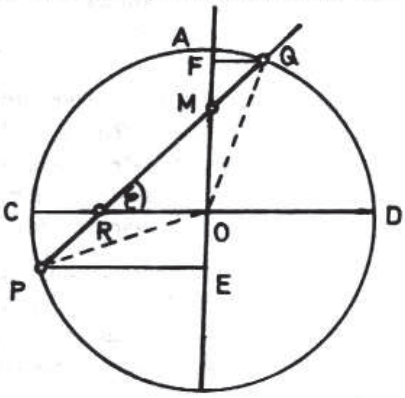


Sl. 114.

Na sličan način se dokazuje normalnost i ostalih parova pravih određenih uzastopnim stranicama šestougla $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6$.

b) Središte R_1 duži Q_1Q_4 je podnožje normale iz tačke O na pravu Q_1Q_4, jer su prave A_1A_2 i A_5A_4, a sa njima i tačke Q_1 i Q_4, simetrične u odnosu na tu normalu. Zato je ugao OR_1P prav, pa tačka R_1 pripada krugu čiji je prečnik duž OP. Slično važi za tačke R_2 i R_3.

74.2.4. Ako je data prava normalna na pravu CD, relacija $\frac{1}{MQ} = \frac{1}{MP} + \frac{1}{MR}$ se proverava neposrednim računom. Pretpostavimo da to nije slučaj i označimo sa φ oštar ugao između tih pravih, a sa E i F normalne projekcije, redom, tačaka P i Q na pravu AB, sl. 115. Tada je $MR = \frac{r}{\sqrt{3}\sin\varphi}$, $ME = MP\sin\varphi$ i $MF = MQ\sin\varphi$. Primenjujući Pitagorinu teoremu na pravougle trouglove MPE i OPE dobijamo



Sl. 115.

$$MP^2 = ME^2 + PE^2 = ME^2 + OP^2 - OE^2$$
$$= ME^2 + r^2 - \left(ME - \frac{r}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{2}{3}r^2 + \frac{2r}{\sqrt{3}}MP\sin\varphi.$$

Jedno rešenje ove kvadratne jednačine je negativno, pa je

$$MP = r\left(\frac{\sin\varphi}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{2+\sin^2\varphi}{3}}\right).$$

Na sličan način se računa:

$$MQ = r\left(-\frac{\sin\varphi}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{2+\sin^2\varphi}{3}}\right).$$

Sada se lako proverava da je $\dfrac{1}{MQ} = \dfrac{1}{MP} + \dfrac{1}{MR}$.

74.3.1. Kvadriranjem date jednačine dobija se njena posledica

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2\sqrt{(x^2+x)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = 0.$$

Odatle sledi $x - 1/x = 0$, odnosno $x = 1$ ili $x = -1$. Provera pokazuje da $x = 1$ nije rešenje date jednačine, a da $x = -1$ to jeste.

74.3.2. Iz datih pretpostavki sledi

$$2 + \sqrt{a} = \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{(2+\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2 - 1}{2(2+\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})},$$

odakle posle sređivanja dobijamo

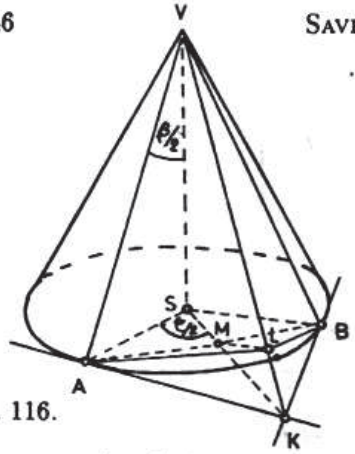
$$4\sqrt{a} - 2\sqrt{bc} = b + c - a - 5.$$

Desna strana ove relacije je ceo broj — označimo ga sa d. Iz $4\sqrt{a} - 2\sqrt{bc} = d$ sledi $4d\sqrt{bc} = 4bc + d^2 - 16a$, što je, zbog pretpostavljene iracionalnosti broja $\sqrt{bc}$, moguće jedino za $d = 0$. Dalje dobijamo $4a = bc$ i $a + 5 = b + c$. Iz prve od ove dve relacije, kako b i c nisu deljivi sa 4, sledi da su oni oblika $b = 2b'$, $c = 2c'$, gde su b' i c' neparni celi brojevi. Te relacije se onda svode na $a = b'c'$, $a + 5 = 2(b' + c')$, odakle, eliminacijom a, dobijamo $c'(b' - 2) = 2b' - 5$. Kako je b' neparan, dakle različit od 2, odatle sledi $c' = 2 - \dfrac{1}{b'-2}$. Da bi c' bio ceo neophodno je i dovoljno da bude $b' = 3$ ili $b' = 1$. Lako se proverava da tim slučajevima odgovaraju trojke $a = 3$, $b = 6$, $c = 2$, odnosno $a = 3$, $b = 2$, $c = 6$, koje zadovoljavaju sve uslove zadatka.

U oba slučaja dobijamo $\operatorname{ctg} 2\alpha = 2 + \sqrt{3}$, odakle sledi $\alpha = \dfrac{\pi}{24} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

74.3.3. Date tangentne ravni kupe seku ravan osnove po pravama koje su tangente kruga osnove u tačkama A i B. Označimo presek tih tangenti sa K. Trouglovi AKV i BKV imaju prave uglove kod A, odnosno B, zajedničku hipotenuzu KV i jednake katete AK i BK, pa su podudarni. Neka je L zajedničko podnožje visina koje odgovaraju hipotenuzi tih trouglova. Tada je $\angle ALB = \alpha$ i $\angle AVS = \beta/2$. Označimo traženi ugao ASB sa φ, poluprečnik osnove sa r i središte duži AB sa M, sl. 116. Koristeći pravougle trouglove ASM, AML, ASV i AKS dobijamo:

$$AM = r\sin\frac{\varphi}{2}, \quad AL = \frac{r\sin\varphi/2}{\sin\alpha/2}, \quad AV = \frac{r}{\sin\beta/2}, \quad AK = r\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}.$$



Sl. 116.

U pravouglom trouglu AKV je

$$AV \cdot AK = AL\sqrt{AK^2 + AV^2},$$

pa zamenom prethodnih izraza dobijamo jednačinu za određivanje nepoznatog ugla φ, čijim sređivanjem se dobija

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\cos\alpha/2}{\cos\beta/2}.$$

74.3.4. Označimo traženi maksimalni proizvod sa P. Za $n = 1$ je očigledno $P = 1$. Pretpostavimo da je $n > 1$. Jasno je da tada nijedan od činilaca proizvoda P nije jednak 1. Dokažimo da su svi njegovi činioci manji ili jednaki 4. Zaista, ako bi neki njegov činilac bio veći ili jednak od 5, onda bi proizvod koji umesto a ima činioce 2 i $a-2$ bio veći od P (zbog $2(a-2) > a$), a odgovarajući zbir bi takođe bio jednak n. Takođe, svaku četvorku možemo zameniti sa dve dvojke i u zbiru i u proizvodu, pa zaključujemo da je proizvod P oblika $2^\alpha 3^\beta$. Najzad, s obzirom da je $2^3 < 3^2$, a $2+2+2 = 3+3$, jasno je da dvojki ne može biti više od dve.

Na osnovu svega zaključujemo da je

$$P = \begin{cases} 3^k, & \text{za } n = 3k,\ k \in \mathbb{N}, \\ 2^2 3^{k-1}, & \text{za } n = 3k+1,\ k \in \mathbb{N}, \\ 2 \cdot 3^k, & \text{za } n = 3k+2,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases}$$

74.4.1. Označimo sa n broj cifara periode toga broja x. Iz $1/4 < x < 1/3$ sledi da je prva cifra periode jednaka 2 ili 3. Ako bi ona bila 3, tada sledeća cifra ne bi mogla da bude veća od 3. No, onda bi, prema uslovima zadatka, moralo da važi

$$3 + 3 + 9(n-2) \geq n^2 + 12,$$

što se lako proverava da je nemoguće.

Dakle, prva cifra periode broja x jednaka je 2. Sada, slično kao malopre, mora da važi sledeća nejednakost:

$$2 + 9(n-1) \geq n^2 + 12.$$

Jedini prirodni brojevi koji tu nejednakost zadovoljavaju jesu $n = 4$ i $n = 5$.

U slučaju $n = 4$ treba odrediti tri dekadne cifre čiji je zbir jednak $4^2 + 12 - 2 = 26$. To mogu biti samo cifre 9, 9 i 8 (uzete u nekom poretku). U slučaju $n = 5$ treba odrediti četiri cifre sa zbirom $5^2 + 12 - 2 = 35$. To su (u nekom poretku) 9, 9, 9 i 8. Brojevi

$$0,\dot{2}99\dot{8};\quad 0,\dot{2}98\dot{9};\quad 0,\dot{2}89\dot{9};$$
$$0,\dot{2}999\dot{8};\quad 0,\dot{2}998\dot{9};\quad 0,\dot{2}989\dot{9}\quad \text{i}\quad 0,\dot{2}899\dot{9}$$

zadovoljavaju uslove zadatka.

74.4.2. Neka za cele brojeve n i k, $0 < k < n$, važi jednakost $2\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k+1}$. Kako je

$$\binom{n}{k-1} = \frac{k}{n-k+1}\binom{n}{k}, \quad \binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k},$$

ta jednakost je ekvivalentna sa

$$2 = \frac{k}{n-k+1} + \frac{n-k}{k+1},$$

odnosno $(n-2k)^2 = n+2$. Dakle, broj n mora biti oblika m^2-2 za neki prirodan broj $m \geq 2$. Za $m = 2$, međutim, dobija se $n = 2$, što nije rešenje zadatka, jer ne važi $2\binom{2}{1} = \binom{2}{0} + \binom{2}{2}$. Za $m > 2$ i $n = m^2-2$ dobija se $k = \frac{m(m-1)}{2} - 1$. Taj broj je prirodan i, lako je proveriti, manji od n, a zadovoljava i uslov $(n-2k)^2 = n+2$.

Dakle, traženi brojevi su $n = m^2-2$, $m = 3, 4, \ldots$.

74.4.3. S obzirom na simetriju elipse u odnosu na koordinatne ose, dovoljno je odrediti tangentu koja dodiruje elipsu u tački (x_0, y_0) koja pripada prvom kvadrantu. Jednačina te tangente je

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1,$$

pa su segmenti koje ona odseca na koordinatnim osama jednaki a^2/x_0 i b^2/y_0, a kvadrat dužine dela tangente između osa iznosi

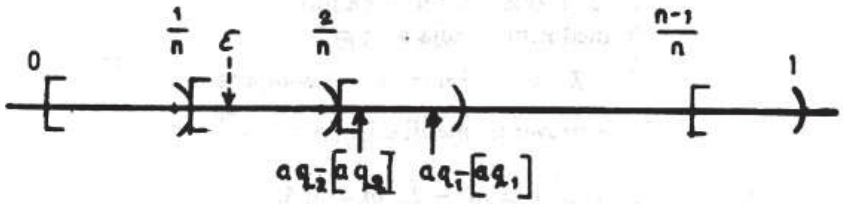
$$\begin{aligned} d^2 &= \frac{a^4}{x_0^2} + \frac{b^4}{y_0^2} = \frac{a^4}{x_0^2} + \frac{a^2b^2}{a^2-x_0^2} \\ &= a^2 + b^2 + \frac{a^2(a^2-x_0^2)}{x_0^2} + \frac{b^2x_0^2}{a^2-x_0^2} \\ &\geq a^2 + b^2 + 2\sqrt{\frac{a^2(a^2-x_0^2)}{x_0^2} \cdot \frac{b^2x_0^2}{a^2-x_0^2}} = (a+b)^2, \end{aligned}$$

pri čemu se jednakost postiže ako i samo ako je $y_0/x_0 = (b/a)^{3/2}$. Dakle, tražena tangenta (u prvom kvadrantu) je ona čija dodirna tačka (x_0, y_0) zadovoljava navedeni uslov. Njena jednačina je $y = -\sqrt{\frac{b}{a}}\,x + \sqrt{ab+b^2}$.

74.4.4. Podelimo tablu na četiri dela sa po dva stupca u svakom. Pokazaćemo da crni, na potez belog u jednom delu, uvek može da odgovori potezom u istom delu. To znači da ako crni može da liši belog mogućnosti poteza u bilo kom delu, on to može da učini i na celoj tabli, tj. on pobeđuje u igri. Dakle, dovoljno je

opisati pobedničku strategiju crnog pod pretpostavkom da se igra odvija u okviru dva fiksirana stupca.

Ta strategija je sledeća: ako beli pomeri svoj žeton za k polja napred, crni će pomeriti svoj žeton u drugom stupcu toga dela takođe za k polja napred; ako beli pomeri (u nekom potezu) svoj žeton za k polja nazad, crni će pomeriti svoj žeton u istom stupcu za k polja napred. Tada će, posle svakog poteza obojice, rastojanja žetona u stupcima toga dela biti međusobno jednaka. To znači da na svaki potez belog crni ima odgovor, pa on ne može izgubiti. Međutim, crni stalno igra napred, pa se igra mora završiti posle konačno mnogo poteza. To i znači da crni, pri opisanoj strategiji, pobeđuje.



Sl. 117.

74.MO.1. 1° Za dati pozitivan broj ε izaberimo prirodan broj n, takav da je $1/n \leq \varepsilon$. Podelimo interval $[0,1)$ na n intervala:

$$\left[0,\frac{1}{n}\right),\quad \left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right),\quad \ldots,\quad \left[\frac{n-1}{n},1\right),$$

sl. 117. Posmatrajmo $n+1$ brojeva oblika $aq-[aq]$ za $q = 0, 1, \ldots, n$, koji svi pripadaju intervalu $[0,1)$. Na osnovu Dirihleovog principa zaključujemo da postoje dva od tih brojeva koji pripadaju istom od navedenih manjih intervala; neka su to brojevi $aq_1-[aq_1]$ i $aq_2-[aq_2]$ i neka je, na primer, prvi od njih veći ili jednak od drugog. Tada važi

$$\varepsilon \geq \frac{1}{n} > (aq_1-[aq_1]) - (aq_2-[aq_2]) = a(q_1-q_2) - ([aq_1]-[aq_2]) \geq 0.$$

Jasno je da je tada $[aq_1]-[aq_2] = [a(q_1-q_2)]$, pa ako stavimo $q_1-q_2 = q$ biće q ceo broj različit od nule za koji važi $aq-[aq] < \varepsilon$.

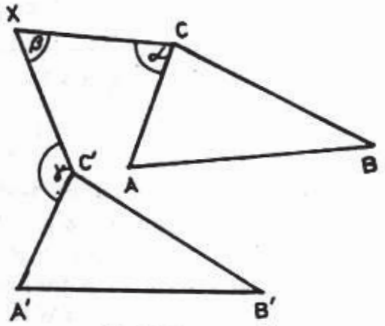
2° Kako je a iracionalan broj, to je za svako celobrojno $q \neq 0$ broj $aq-[aq]$ različit od nule. Konstruišimo niz brojeva oblika $aq_n-[aq_n]$ $(n = 1, 2, \ldots)$ na sledeći način: za dato $\varepsilon > 0$, na osnovu 1°, postoji ceo broj $q_1 \neq 0$, takav da je $0 < aq_1-[aq_1] < \varepsilon$; ako su brojevi $q_1, q_2, \ldots, q_n$ već izabrani, uzmimo pozitivan broj ε_n koji je strogo manji od svih brojeva $aq_i-[aq_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, a zatim, ponovo koristeći 1°, ceo broj $q_{n+1} \neq 0$, takav da je $aq_{n+1}-[aq_{n+1}] < \varepsilon_n$. Dobijeni brojevi

$aq_n - [aq_n]$ su, po konstrukciji, svi različiti među sobom i važi $0 < aq_n - [aq_n] < \varepsilon$. Ako označimo $p_n = [aq_n]$, iz prethodne nejednakosti dobijamo

$$\left|a - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{\varepsilon}{|q_n|}$$

za sve $n = 1, 2, \ldots$. Zamenjujući, u slučaju potrebe, p_n i q_n sa $-p_n$ i $-q_n$, dobijamo željeni rezultat.

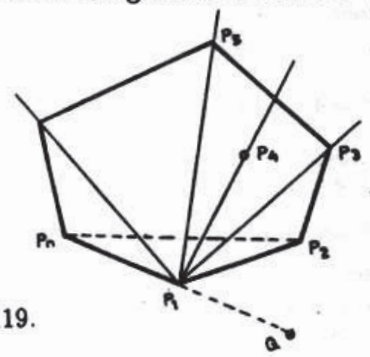
74.MO.2. Neka je X zajednička tačka kruga sa centrom C i poluprečnikom CA i kruga sa centrom C' i poluprečnikom $C'A'$, sl. 118. Označimo sa $\mathcal{R}_\alpha$ rotaciju oko tačke C koja tačku A prevodi u X, sa $\mathcal{R}_\beta$ rotaciju oko tačke X koja tačku C prevodi u tačku C' i sa $\mathcal{R}_\gamma$ rotaciju oko tačke C' koja tačku X prevodi u A'. (Takve rotacije postoje jer je $CA = CX = XC' = C'A$.) Za preslikavanje $\mathcal{R} = \mathcal{R}_\gamma \circ \mathcal{R}_\beta \circ \mathcal{R}_\alpha$ važi



Sl. 118.

$$\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}_\gamma(\mathcal{R}_\beta(\mathcal{R}_\alpha(A))) = \mathcal{R}_\gamma(\mathcal{R}_\beta(X)) = \mathcal{R}_\gamma(X) = A',$$
$$\mathcal{R}(C) = \mathcal{R}_\gamma(\mathcal{R}_\beta(\mathcal{R}_\alpha(C))) = \mathcal{R}_\gamma(\mathcal{R}_\beta(C)) = \mathcal{R}_\gamma(C') = C',$$

a, kako su trouglovi ABC i $A'B'C'$ direktno podudarni, to je i $\mathcal{R}(B) = B'$.



Sl. 119.

74.MO.3. Označimo sa T konveksni omotač datih tačaka $P_1, P_2, \ldots, P_n$, tj. najmanji konveksan poligon, takav da se sve te tačke nalaze u njemu ili na njegovom rubu. Možemo pretpostaviti da su date tačke numerisane tako da je $\angle P_nP_1P_2$ ugao poligona T i da su poluprave P_1P_2, P_1P_3, $\ldots$, P_1P_n raspoređene u navedenom poretku, sl. 119. Neka je Q proizvoljna tačka prave P_1P_n, takva da je P_1 između P_n i Q. Tada je

$$\begin{aligned} 180^\circ &= \angle QP_1P_2 + \angle P_2P_1P_n \\ &= \angle P_1P_2P_n + \angle P_2P_nP_1 + \angle P_2P_1P_3 + \angle P_3P_1P_4 + \cdots + \angle P_{n-1}P_1P_n. \end{aligned}$$

U poslednjem zbiru ima tačno n uglova, pa kako nijedan od njih nije manji od α, dobijamo da je $n\alpha \le 180^\circ$, tj. $\alpha \le 180^\circ/n$. Zato je i $\max\limits_S \alpha \le 180^\circ/n$.

Dokažimo da je $\max\limits_S \alpha = 180^\circ/n$ i da se ta vrednost ugla α postiže ako i samo ako su tačke $P_1, P_2, \ldots, P_n$ skupa S temena pravilnog n-tougla. Zaista, ako važi jednakost $n\alpha = 180^\circ$, onda su ispunjeni sledeći uslovi (i to u svakom temenu poligona T):

1° $\angle P_1P_2P_n = \angle P_2P_nP_1$ ($= \alpha$), tj. $P_1P_2 = P_1P_n$; znači, poligon T ima sve stranice jednake;

2° $\angle P_2P_1P_n = \angle P_2P_1P_3 + \angle P_3P_1P_4 + \cdots + \angle P_{n-1}P_1P_n = (n-2)\alpha$; znači, taj poligon ima i sve uglove jednake.

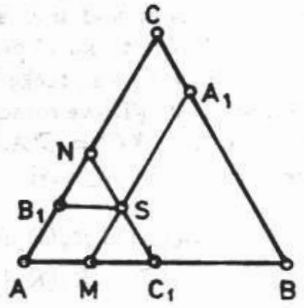
Dakle, jednakost $n\alpha = 180°$ je moguća jedino ako su $P_1, P_2, \ldots, P_n$ temena pravilnog mnogougla. Obrnuto je očigledno.

75.1.1. Ako je $5 \le a \le 10$, onda je $2 \le \sqrt{a-1} \le 3$ i

$$\sqrt{a+3-4\sqrt{a-1}} + \sqrt{a+8-6\sqrt{a-1}} = \sqrt{(\sqrt{a-1}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{a-1}-3)^2}$$
$$= |\sqrt{a-1}-2| + |\sqrt{a-1}-3| = \sqrt{a-1}-2+3-\sqrt{a-1} = 1.$$

75.1.2. Neka je S unutrašnja tačka trougla ABC, sl. 120. Neka je dalje M presek pravih AB i SA_1, a N presek pravih AC i SC_1. Trouglovi NB_1S i SMC_1 su jednakostranični, a četvorouglovi SA_1CN i SB_1AM su paralelogrami. Zato je

$$SA_1 + SB_1 + SC_1 = NC + B_1N + MS$$
$$= NC + B_1N + AB_1 = AC.$$



Sl. 120.

Ako tačka S pripada nakoj stranici (na primer AC) trougla ABC, onda je $B_1 = S$, $A_1 = C$, a trougao SAC_1 je jednakostraničan, pa opet dobijamo

$$SA_1 + SB_1 + SC_1 = SC + AS = AC.$$

75.1.3. Neka je T vreme za koje će u mesto B doći automobil koji prvu polovinu puta prelazi brzinom u, a drugu polovinu brzinom v. Taj automobil je prvu polovinu puta prešao za vreme $\frac{AB}{2u}$, a drugu polovinu puta za vreme $\frac{AB}{2v}$. Zato je

$$T = \frac{AB}{2}\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v}\right).$$

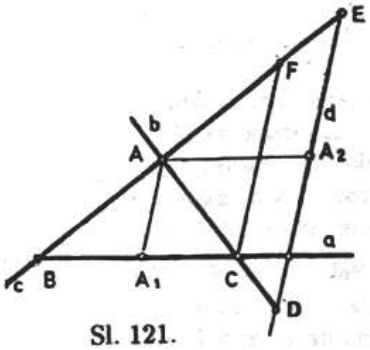
Neka je t vreme za koje će u mesto B stići automobil koji prvu polovinu vremena ide brzinom u, a drugu polovinu vremena brzinom v. Tada je $AB = \frac{t}{2}u + \frac{t}{2}v = \frac{t}{2}(u+v)$, tj. $t = \frac{2AB}{u+v}$. Dalje dobijamo

$$\frac{T}{t} = \frac{AB}{2}\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v}\right)\frac{u+v}{2AB} = \frac{(u+v)^2}{4uv} - 1 + 1 = 1 + \frac{(u-v)^2}{4uv} \ge 1.$$

Ako je $u = v$, onda je $T = t$, a ako je $u \ne v$, onda je $T > t$.

75.1.4. Pretpostavimo suprotno i neka se posle n-tog ponavljanja opisanog postupka prvi put dobije 9 nula. To znači da su posle $(n-1)$-og koraka svake dve susedne (prema tome i sve) cifre bile jednake i pri tome jednake 1, jer se sve nule prvi put pojavljuju posle n-tog koraka. Dalje dobijamo da su posle $(n-2)$-og koraka svake dve susedne cifre bile različite. Ako mesta na kojima stoje cifre numerišemo brojevima 1, 2, ..., 9, onda su posle $(n-2)$-og koraka na neparnim mestima bile jednake cifre, a na parnim takođe jednake, ali različite od onih na neparnim mestima. Na mestima 1 i 9 koja su susedna stoje jednake cifre. To je kontradikcija, pa sledi da je tvrđenje zadatka tačno.

75.2.1. Pretpostavimo suprotno. Tada je $b^2 - 4ac = k^2$, gde je k ceo broj. Kako je b neparan broj, to sledi da su k^2 i k takođe neparni brojevi. Dalje je $4ac = b^2 - k^2$. Broj $4ac$ je deljiv sa 4, a nije sa 8, jer su a i c neparni brojevi. Međutim, kako kvadrati neparnih brojeva pri deljenju sa 8 uvek daju ostatak 1, to je broj $b^2 - k^2$ deljiv sa 8. To je kontradikcija. Dakle, tvrđenje zadatka je tačno.



Sl. 121.

75.2.2. Neka je ABC trougao koji obrazuju prave a, b, c i neka je prava d paralelna težišnoj duži AA_1 tog trougla, sl. 121. Neka su D i E redom preseci pravih b i c sa pravom d, F presek prave c sa pravom koja sadrži tačku C i paralelna je sa AA_1, a A_2 presek prave d sa pravom koja sadrži tačku A i paralelna je sa pravom a. Kako je AA_1 srednja linija trougla BCF, to tačka A polovi duž BF. Zato prava AA_2 polovi CF, pa lako sledi da ta prava polovi i DE. Prema tome, AA_2 je težišna duž trougla ADE. Analogno se razmatraju ostali slučajevi.

75.2.3. Označimo sa n traženi broj. Zbir cifara broja n^6 jednak je 45, što je deljivo sa 9, pa sledi da je broj n deljiv sa 3. Kako je 21^6 osmocifren, a 33^6 desetocifren broj, to je $n \in \{24, 27, 30\}$. Nije $n = 30$ jer u zapisu broja 30^6 ima 6 nula. Takođe nije $n = 24$ jer je poslednja cifra broja 24^6 jednaka 6, a cifre 6 nema u zapisu broja n^6. Kako je $27^6 = 387420489$, to je $n = 27$.

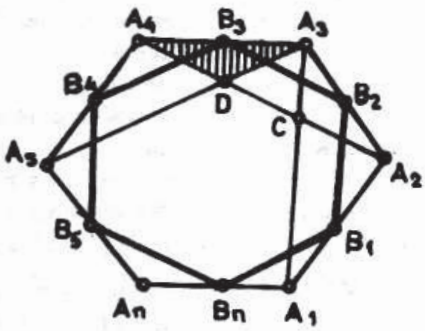
75.2.4. Spajanjem tačaka na opisani način kvadrat biva razbijen na trouglove. Neka je k broj tih trouglova. Zbir uglova svih tih trouglova jednak je $k \cdot 180°$. Taj zbir je jednak $n \cdot 360° + 4 \cdot 90°$, jer je zbir uglova čije je zajedničko teme neka od datih tačaka jednak 360°, dok je zbir uglova čije je zajedničko teme neko od temena kvadrata jednak 90°. Zato je $k \cdot 180° = n \cdot 360° + 360°$, tj. $k = 2n + 2$. Kako je svaka od konstruisanih duži zajednička stranica za dva trougla, to je broj tih duži jednak

$$\frac{3(2n+2)-4}{2} = 3n + 1.$$

75.3.1. Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ temena poligona M, a $B_1, B_2, \ldots, B_n$ redom središta duži $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$, sl. 122. Primetimo da (zbog konveksnosti poligona M) nikoja tri od trouglova

$$A_1A_2A_3,\ A_2A_3A_4,\ \ldots,\ A_{n-1}A_nA_1 \quad (1)$$

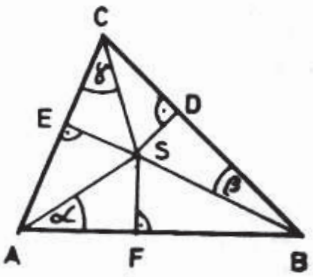
nemaju zajedničku unutrašnju tačku. Zato je zbir površina tih trouglova najviše dva puta veći od površine P poligona M. Ako površinu poligona $B_1B_2\ldots B_n$ označimo sa P_1, onda je



Sl. 122.

$$\begin{aligned} P - P_1 &= P_{B_nA_1B_1} + P_{B_1A_2B_2} + \cdots + P_{B_{n-1}A_nB_n} \\ &= \frac{1}{4}(P_{A_nA_1A_2} + P_{A_1A_2A_3} + \cdots + P_{A_{n-1}A_nA_1}) \le \frac{2P}{4} = \frac{P}{2}, \end{aligned}$$

odakle sledi $P_1 \ge P/2$. Jednakost važi ako i samo ako svaku tačku poligona M sadrže bar dva od trouglova (1). Ako je $n \ge 5$, označimo sa C i D redom preseke duži A_2A_4 sa dužima A_1A_3 i A_3A_5. Tada svaku unutrašnju tačku trougla A_3CD sadrži tačno jedan od trouglova (1). Lako se proverava da za $n = 4$ važi $P_1 = P/2$. Prema tome, jednakost $P_1 = P/2$ važi ako i samo ako je M četvorougao.



Sl. 123.

75.3.2. Neka su D, E i F redom podnožja normala iz tačke S na stranice BC, CA i AB, sl. 123. Primetimo da za $\varphi > 0$, $\psi > 0$ i $\varphi + \psi < \pi$ važi

$$\begin{aligned} \cos\varphi + \cos\psi &= 2\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2} \\ &\le 2\cos\frac{\varphi+\psi}{2}, \end{aligned}$$

pri čemu jednakost važi ako i samo ako je $\varphi = \psi$. Koristeći tu činjenicu i oznake $\alpha = \angle SAF$, $\beta = \angle SBD$, $\gamma = \angle SCE$ dobijamo

$$\begin{aligned} a + b + c &= (AE + AF) + (BD + BF) + (CD + CE) \\ &= SA\left(\cos\alpha + \cos\left(\frac{A}{2} - \alpha\right)\right) + SB\left(\cos\beta + \cos\left(\frac{B}{2} - \beta\right)\right) \\ &+ SC\left(\cos\gamma + \cos\left(\frac{C}{2} - \gamma\right)\right) \le 2\left(SA\cos\frac{A}{2} + SB\cos\frac{B}{2} + SC\cos\frac{C}{2}\right). \end{aligned}$$

Jednakost važi ako i samo ako je $\alpha = \frac{1}{2}\angle BAC$, $\beta = \frac{1}{2}\angle CBA$ i $\gamma = \frac{1}{2}\angle ACB$, tj. ako i samo ako je S centar upisanog kruga trougla ABC.

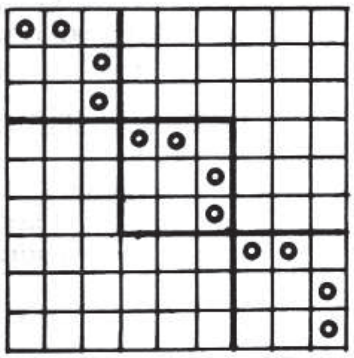
75.3.3. Označimo

$$A = \left(\sqrt{x^2-5x+8}+\sqrt{x^2-5x+6}\right)^{x/2},$$

$$B = \left(\sqrt{x^2-5x+8}-\sqrt{x^2-5x+6}\right)^{x/2}.$$

Tada je $\frac{A+B}{2} = 2^{x/4}$, $AB = 2^{x/2}$. Kako je $A > 0$, $B > 0$ i $\frac{A+B}{2} = \sqrt{AB}$, to je $A = B$. Jednakost $A = B$ je ekvivalentna sa $x = 0$ ili $\sqrt{x^2-5x+6} = 0$. Rešenja su 0, 2 i 3.

75.3.4. Pretpostavimo da je na šahovskoj tabli $3n \times 3n$ postavljeno nekoliko topova, tako da je svaki od njih napadnut najviše jednim od ostalih topova. Neka je pri tome postavljeno $2x$ topova koji se u parovima tuku i y topova od kojih se nijedan ne tuče ni sa jednim od svih ostalih topova. Svaka dva topa koji se međusobno napadaju tuku svako polje sa ukupno 3 linije (dve horizontalne i jedne vertikalne ili jedne horizontalne i dve vertikalne). Svaki top koji ne napada ostale topove tuče svako polje sa jedne horizontalne i jedne vertikalne linije.



Sl. 124.

Prema tome, svi postavljeni topovi tuku svako polje sa ukupno $3x + 2y$ linija, od kojih su neke horizontalne, a neke vertikalne. Kako je ukupan broj linija jednak $6n$, to je $3x + 2y \le 6n$. Broj postavljenih topova jednak je $2x + y$ i važi

$$2x + y \le \frac{2}{3}(3x + 2y) \le 4n.$$

$4n$ topova mogu se postaviti na tabli $3n \times 3n$ tako da važe uslovi zadatka. Na sl. 124 dat je jedan takav raspored za $n = 3$, a sličan primer postoji za proizvoljno n.

75.4.1. Neka je $M(m, m^2)$ proizvoljna tačka parabole različita od tačke A. Jednačina tangente na parabolu u tački M je $y - m^2 = 2m(x - m)$, a jednačina normale u toj tački je $y - m^2 = -\frac{1}{2m}(x - m)$. Ako ta normala sadrži tačku $A(x_0, x_0^2)$, onda je $x_0^2 - m^2 = -\frac{1}{2m}(x_0 - m)$, pa koristeći uslov $x_0 \ne m$ $(M \ne A)$, dobijamo $2m^2 + 2x_0m + 1 = 0$. Ova kvadratna jednačina po m ima dva realna rešenja jer je $D = 4(x_0^2 - 2) > 0$. Označimo sa x_1 i x_2 ta rešenja. Normale na parabolu u tačkama $B(x_1, x_1^2)$ i $C(x_2, x_2^2)$ sadrže tačku A, a jednačina prave BC je

$$y - x_1^2 = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1}(x - x_1), \quad \text{tj.} \quad y = (x_1 + x_2)x - x_1x_2.$$

Presečna tačka prave BC sa y-osom je $P(0, -x_1x_2)$, a kako su x_1 i x_2 rešenja jednačine (po nepoznatoj m) $2m^2 + 2x_0m + 1 = 0$, to je $x_1x_2 = 1/2$. Konačno dobijamo $P(0, -1/2)$, tj. koordinate tačke P ne zavise od tačke A.

75.4.2. Primetimo da je svaka trojka $(1,1,z)$, gde $z \in \{2,3,\dots\}$, rešenje date jednačine. Razmotrimo dalje slučaj $x > 1$.

a) Neka je $z = 2$. Jednačina prima oblik $1 + 2! + \cdots + x! = y^2$. Primetimo da y^2 pri deljenju sa 5 daje ostatak -1, 0 ili 1 i da je

$$1 + 2! + 3! + 4! = 33 \equiv 3 \pmod 5,$$
$$1 + 2! + \cdots + x! \equiv 3 \pmod 5, \quad \text{za } x \geq 4.$$

Prema tome, ako je trojka $(x, y, 2)$ rešenje date jednačine, onda je $x \leq 3$. Proverom dobijamo da za $x = 2$ nema rešenja, a za $x = 3$ rešenje je trojka $(3,3,2)$.

b) Neka je $z = 3$. Jednačina prima oblik $1 + 2! + \cdots + x! = y^3$. Primetimo da kub prirodnog broja pri deljenju sa 7 daje ostatak -1, 0 ili 1 i da za $x \geq 7$ važi

$$1 + 2! + \cdots + x! \equiv 1 + 2! + \cdots + 6! \equiv 873 \equiv 5 \pmod 7.$$

Prema tome, ako je trojka $(x, y, 3)$ rešenje date jednačine, onda je $x \leq 5$. Proverom dobijamo da za $x \in \{2,3,4,5\}$ nema rešenja.

c) Neka je $z \geq 4$. Ako za prirodne brojeve $x > 1$, y i $z \geq 4$ važi

$$1 + 2! + \cdots + x! = y^z,$$

onda $3 \mid 1 + 2! + \cdots + x! = 3 + 3! + \cdots + x!$, pa sledi $3 \mid y^z$, $3 \mid y$ i $3^z \mid y^z$. Prema tome, broj $1 + 2! + \cdots + x!$ deljiv je sa $3^4 = 81$. Primetimo da je broj $1 + 2! + 3! + \cdots + 8! = 46233$ deljiv sa 9, ali da nije deljiv sa 81. Kako je broj $k!$ deljiv sa 81 za svako $k \geq 9$, to sledi $x \leq 7$. Proverom dobijamo da ni za jedno $x \in \{2,3,4,5,6,7\}$ broj $1+2!+\cdots+x!$ nije deljiv sa 81. Prema tome, data jednačina nema rešenja kod kojih je $x > 1$ i $z \geq 4$.

Sva rešenja date jednačine su $(3,3,2)$ i $(1,1,z)$, gde je $z \geq 2$.

75.4.3. Neka je $S = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n$. Tada je

$$S = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (a_2 + a_3 + \cdots + a_n) + (a_3 + a_4 + \cdots + a_n) + \cdots + a_n.$$

Dalje je $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$, a za $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ dobijamo

$$\sum_{j=k+1}^{n} a_j \leq \left| \sum_{j=k+1}^{n} a_j \right| \leq \sum_{j=k+1}^{n} |a_j| \leq (n-k)M,$$
$$\sum_{j=k+1}^{n} a_j \leq \left| \sum_{j=k+1}^{n} a_j \right| = \left| \sum_{j=1}^{k} a_j \right| \leq \sum_{j=1}^{k} |a_j| \leq kM,$$

pa dalje sledi

$$a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_n \leq \min\{(n-k)M, kM\} = \begin{cases} kM, & \text{za } k \leq n/2, \\ (n-k)M, & \text{za } k > n/2. \end{cases}$$

Razmotrimo posebno slučajeve kada je n paran, odnosno neparan broj. Ako je $n = 2l$, onda je

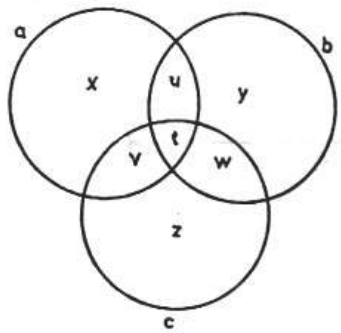
$$S \le M + 2M + \cdots + (l-1)M + lM + (l-1)M + \cdots + 2M + M$$
$$= 2\frac{(l-1)l}{2}M + lM = l^2 M = \frac{n^2}{4}M.$$

Ako je $n = 2l + 1$, onda je

$$S \le 2(M + 2M + \cdots + lM) = l(l+1)M = \frac{n^2-1}{4}M < \frac{n^2}{4}M.$$

75.4.4. a) Pretpostavimo da se A i B poznaju. Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$, B svi poznanici osobe A. Tada se nikoja dvojica od $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$ ne poznaju međusobno. Kako se A_1 i B ne poznaju, to oni imaju dvojicu zajedničkih poznanika: A i B_1. Međutim, B_1 i A se ne poznaju, pa su A_1 i B njihovi jedini zajednički poznanici. Prema tome, nijedan od $A_2, A_3, \ldots, A_n$ nije poznanik sa B_1. Analogno dokazujemo da postoji B_2 ($\neq B_1$) koji je zajednički poznanik A_2 i B itd. Prema tome, osobama $A_1, A_2, \ldots, A_n$ možemo pridružiti različite poznanike lica B, pri čemu niko od njih nije A. Odatle sledi da B ima ne manje poznanika od A. Analogno, A ima ne manje poznanika od B. Zato A i B imaju jednak broj poznanika.

b) Ako se X i Y ne poznaju, oni imaju zajedničkog poznanika Z. Na osnovu a) sledi da X i Y imaju jednak broj poznanika kao i Z.



Sl. 125.

76.1.1. Označimo sa x, y i z redom brojeve objekata koji imaju isključivo svojstvo a, b, odnosno c; označimo, dalje, sa u, v i w redom brojeve objekata koji imaju isključivo svojstva a i b, a i c, odnosno b i c; najzad, označimo sa t broj objekata koji imaju sva tri svojstva. Tada je (sl. 125)

$$N_a = x + u + v + t,$$
$$N_b = y + u + w + t,$$
$$N_c = z + v + w + t,$$

zatim

$$N_{a,b} = u + t, \quad N_{a,c} = v + t, \quad N_{b,c} = w + t, \quad N = x + y + z + u + v + w + t.$$

Odatle sledi

$$3N + N_{a,b} + N_{a,c} + N_{b,c} - 2N_a - 2N_b - 2N_c = x + y + z \ge 0,$$

pa je zaista $3N + N_{a,b} + N_{a,c} + N_{b,c} \ge 2N_a + 2N_b + 2N_c$. Jednakost važi ako i samo ako je $x = y = z = 0$, tj. ako i samo ako nijedan od datih elemenata nema samo jedno svojstvo.

76.1.2. Pretpostavimo, suprotno tvrđenju zadatka, da se u krug poluprečnika 9 može smestiti 400 tačaka tako da je rastojanje između svake dve tačke veće od 1. Opišimo krug poluprečnika 1/2 oko svake od tih tačaka. Ti krugovi su onda disjunktni i svi su sadržani u krugu poluprečnika 9,5. No, onda bi ukupna površina tih krugova, koja je jednaka $400\pi(1/2)^2 = 100\pi$, morala biti manja od površine kruga poluprečnika 9,5, tj. od $9,5^2\pi = 90,25\pi$, što nije tačno. Ova kontradikcija dokazuje tvrđenje zadatka.

76.1.3. Neka su a, b i c realni brojevi za koje važi

$$abc = 1 \quad \text{i} \quad a+b+c > \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Tada je

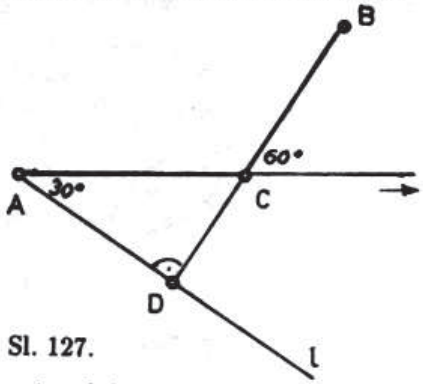
$$\begin{aligned}(a-1)(b-1)(c-1) &= abc - ab - ac - bc + a + b + c - 1\\ &= a+b+c-abc\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\\ &= a+b+c-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) > 0.\end{aligned}$$

Kako ne mogu sva tri broja $a-1$, $b-1$, $c-1$ biti pozitivna (jer bi inače iz $a>1$, $b>1$, $c>1$ sledilo $abc>1$, suprotno pretpostavci), to je tačno jedan od tih brojeva pozitivan, tj. tačno jedan od brojeva a, b, c je veći od 1, što je i trebalo dokazati.

76.1.4. Neka je C tražena tačka. Neka je l poluprava sa početkom A, s one strane prave AC (reke) sa koje nije tačka B, koja s pravom AC gradi ugao od 30° i neka je D podnožje normale iz tačke C na polupravu l, sl. 127. Tada je $AC = 2CD$. Cena transporta robe proporcionalna je sa

$$AC + 2CB = 2CD + 2CB = 2(CD + CB),$$

dakle i sa $CD + CB$, pa će ona biti najmanja kada tačke B, C i D pripadaju jednoj pravoj, odnosno kad poluprava CB gradi sa nizvodnim smerom toka reke ugao od 60°.



Sl. 127.

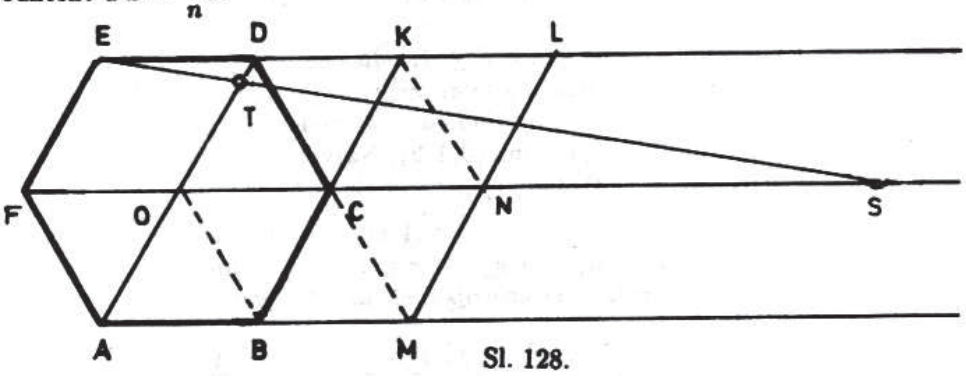
76.2.1. Kako je, za svako $n \in \mathbf{N}$,

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} = \frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2n-n^2(n+1)} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

to je dati zbir jednak

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{99}}-\frac{1}{\sqrt{100}}\right) = 1-\frac{1}{10} = \frac{9}{10}.$$

76.2.2. Neka je dat pravilan šestougao $ABCDEF$ stranice a. Konstruišimo najpre preseke K i L pravih BC i AC redom sa pravom DE, zatim presek M pravih AB i CD i najzad preseke N i O pravih ML i AD, redom, sa pravom CF, sl. 128. Lako se dokazuje da je $BMNKDO$ ponovo pravilan šestougao stranice a i da je $FN = 3FO = 3a$. Nastavljajući ovaj postupak možemo, za dati prirodan broj n, odrediti na pravoj FO tačku S, takvu da je $FS = nFO = na$. Ako je T presek pravih ES i OD, iz sličnosti trouglova FSE i OST dobijamo da je $OT = \frac{n-1}{n}a$, odnosno $TD = \frac{1}{n}a$.



Sl. 128.

76.2.3. Označimo sa S površinu datog trougla. Treba odrediti kada se postiže minimum izraza $I = ax^2 + by^2 + cz^2$, pri uslovu da je $ax + by + cz = 2S$, dakle fiksirana veličina. Dokazaćemo da važi nejednakost

$$\frac{ax^2 + by^2 + cz^2}{a+b+c} \geq \left(\frac{ax + by + cz}{a+b+c}\right)^2,$$

pri čemu jednakost važi ako i samo ako je $x = y = z$. Zaista, ta nejednakost ekvivalentna je sa

$$(a+b+c)(ax^2 + by^2 + cz^2) \geq (ax + by + cz)^2,$$

odnosno

$$ab(x-y)^2 + ac(x-z)^2 + bc(y-z)^2 \geq 0,$$

što je tačno, a jednakost važi ako i samo ako je $x = y = z$.

Dokazanu nejednakost možemo napisati u obliku $I \geq \frac{4S^2}{a+b+c}$. Dakle, dati izraz I ima vrednost koja nikad nije manja od $\frac{4S^2}{a+b+c}$, a jednaka je tom broju ako i samo ako je $x = y = z$. To znači da je I minimalno ako i samo ako je P centar upisanog kruga trougla ABC.

76.2.4. Pokažimo da postoje desetocifreni brojevi oblika $\overline{98765abcde}$, gde je (a,b,c,d,e) neka permutacija skupa $\{0,1,2,3,4\}$, koji su deljivi sa 11 i odredimo među njima najveći. Taj broj će očigledno biti i najveći desetocifren broj napisan različitim ciframa koji je deljiv sa 11.

Da bi broj navedenog oblika bio deljiv sa 11, neophodno je i dovoljno da sa 11 bude deljiv broj

$$\begin{aligned} A &= (9+7+5+b+d)-(8+6+a+c+e) \\ &= 7+b+d-[10-(b+d)] = 2(b+d)-3. \end{aligned}$$

Iz uslova za b i d sledi da je $1 \le b+d \le 7$, odnosno $-1 \le A \le 11$. Kako je broj A neparan, jedina mogućnost da bude deljiv sa 11 jeste $A = 11$, odnosno $b+d=7$. Dakle, neophodno je i dovoljno da (b,d) bude neka permutacija skupa $\{3,4\}$, a (a,c,e) neka permutacija skupa $\{0,1,2\}$. Najveći broj opisanog oblika koji zadovoljava te uslove je 9876524130.

76.3.1. Bilo da je $a>1$, $b>1$ i $c>1$ ili da je $0<a<1$, $0<b<1$ i $0<c<1$, brojevi $\log_b a$, $\log_c b$ i $\log_a c$ biće pozitivni. Primenjujući dva puta nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine dobijamo:

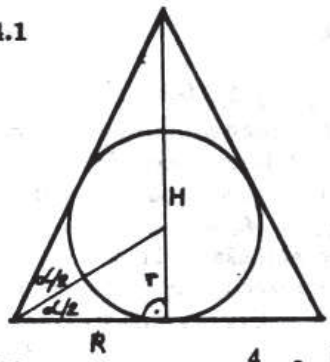
$$\begin{aligned} \frac{\log_b a^2}{a+b}+\frac{\log_c b^2}{b+c}+\frac{\log_a c^2}{c+a} &= 2\left(\frac{\log_b a}{a+b}+\frac{\log_c b}{b+c}+\frac{\log_a c}{c+a}\right) \\ &\ge 6\sqrt[3]{\frac{\log_b a\cdot\log_c b\cdot\log_a c}{(a+b)(b+c)(c+a)}} = \frac{6}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}} \\ &\ge \frac{18}{(a+b)+(b+c)+(c+a)} = \frac{9}{a+b+c}, \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati. Jednakost važi ako i samo ako je $a=b=c$.

76.3.2. Kako uglovi datog trougla nisu tupi, bar jedan od njih, neka je to γ, zadovoljava uslov $\frac{\pi}{4}<\gamma\le\frac{\pi}{2}$ i, samim tim, $\sin\gamma>\cos\gamma$. Tada je $\alpha+\beta\ge\frac{\pi}{2}$, $\left|\frac{\alpha-\beta}{2}\right|<\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$, $0\le\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}$, pa sledi:

$$\begin{aligned} &(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)-(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma) \\ &\quad= (\sin\alpha+\sin\beta)-(\cos\alpha+\cos\beta)+(\sin\gamma-\cos\gamma) \\ &\quad= 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+(\sin\gamma-\cos\gamma) \\ &\quad= 2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+(\sin\gamma-\cos\gamma)>0, \end{aligned}$$

jer je $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}>0$, $\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\ge 0$ i $\sin\gamma>\cos\gamma$. Dakle, važi $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma>\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma$.



Sl. 129.

76.3.3. Označimo sa r poluprečnik lopte, sa R i H, redom, poluprečnik osnove i visinu kupe, sa α ugao izvodnice kupe prema ravni osnove i $t = \operatorname{tg}\alpha/2$. Tada je (sl. 129)

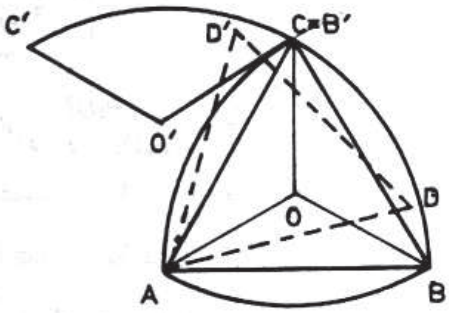
$$H = R\operatorname{tg}\alpha = \frac{2Rt}{1-t^2}, \quad r = R\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = Rt,$$

pa je odnos zapremine V_1 lopte i zapremine V_2 kupe

$$V_1 : V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3 : \frac{1}{3}\pi R^2 H = 2t^2(1-t^2) \le 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

pri čemu se jednakost postiže ako i samo ako je $t^2 = 1/2$. Dakle, tražena maksimalna vrednost odnosa zapremina je $1/2$ i postiže se kada je nagibni ugao $\alpha = 2\operatorname{arctg}(1/\sqrt{2})$.

76.3.4. Izaberimo tačke A, $B \in S$, takve da je rastojanje AB maksimalno moguće. Neka je tačka $C \in S$ takva da je trougao ABC jednakostraničan. Dokazaćemo da skup S ne može da sadrži više nijednu tačku, tj. da mora biti $n = 3$.



Sl. 130.

Konstruišimo krugove sa centrima A, B i C, poluprečnika jednakog duži AB, sl. 130 . Zbog načina izbora tačaka A i B eventualne tačke skupa S, različite od A, B i C, ne bi se mogle nalaziti izvan bilo kog od ovih krugova. Dokažimo da njih ne može biti ni u njihovoj zajedničkoj unutrašnjoj oblasti, niti na lukovima AB, BC i CA tih krugova. Dovoljno je dokazati da ih nema u „trećini" te oblasti, ograničenoj dužima OB i OC (O je centar trougla ABC) i lukom BC — označimo taj deo ravni sa $\mathcal{F}$. Pretpostavimo da u oblasti $\mathcal{F}$ postoji tačka $D \in S$, različita od B i C. Tada je za neko $D' \in S$ trougao ADD' jednakostraničan, tj. tačka D' se dobija rotacijom tačke D oko A za $60°$ (u nekom smeru). Pri toj rotaciji jedna od tačaka B i C prelazi u drugu; neka, na primer B prelazi u $C = B'$. Lako je pokazati da duž BO tada prelazi u duž $B'O'$ koja pripada tangenti kruga (B, AB) u tački C. Odatle sledi da se cela oblast $\mathcal{F}$ osim same tačke B preslikava u deo ravni za koji smo dokazali da u njemu nema tačaka skupa S. No, to znači da je $D' = B'$ i $D = B$, što je isključeno. Dobijena kontradikcija dokazuje da skup S ne sadrži nijednu tačku osim A, B i C.

76.4.1. Dokažimo najpre da ne postoji krug sa centrom u tački $C(\sqrt{2}, 1/3)$ čijem rubu pripadaju dve tačke (x_1, y_1) i (x_2, y_2) sa celobrojnim koordinatama. Zaista, ako bi za neke x_1, y_1, x_2, $y_2 \in \mathbb{Z}$ za koje je $x_1 \ne x_2$ ili $y_1 \ne y_2$ važilo

$$(x_1 - \sqrt{2})^2 + \left(y_1 - \frac{1}{3}\right)^2 = (x_2 - \sqrt{2})^2 + \left(y_2 - \frac{1}{3}\right)^2,$$

sledilo bi $(x_1-x_2)(x_1+x_2-2\sqrt{2}) = (y_2-y_1)(y_2+y_1-2/3)$. Međutim, u toj relaciji je, za $x_1 \neq x_2$, leva strana iracionalan, a desna racionalan broj. Ako je $x_1 = x_2$ i $y_1 \neq y_2$, iz te relacije bi sledilo $y_1 + y_2 = 2/3$, što je takođe nemoguće.

Poređajmo sada sve tačke skupa S u niz na sledeći način: označimo sa M_1 tačku skupa S koja je najbliža tački C; ako su tačke $M_1, \ldots, M_n$ već određene, označimo sa M_{n+1} tačku skupa $S \setminus \{M_1, \ldots, M_n\}$ koja je najbliža tački C. Prethodno dokazano tvrđenje obezbeđuje da je opisana konstrukcija moguća. Tada krug s centrom C i poluprečnika R, gde je $CM_n < R < CM_{n+1}$, sadrži u svojoj unutrašnjosti tačno n tačaka skupa S.

76.4.2. Ako sa k_1, odnosno k_2 označimo koeficijent sličnosti krivih C_1' i C_1, odnosno C_2' i C_2, onda je $x_1 = k_1O_1$ i $x_2 = k_2O_2$. Neka su P_1' i P_2' površine oblasti koje ograničavaju redom krive C_1' i C_2'. Tada je $P_1' = k_1^2P_1$ i $P_2' = k_2^2P_2$, pa je zbir

$$P_1' + P_2' = k_1^2P_1 + k_2^2P_2 = \frac{P_1}{O_1^2}x_1^2 + \frac{P_2}{O_2^2}x_2^2 = \left(\frac{P_1}{O_1^2} + \frac{P_2}{O_2^2}\right)x_1^2 - \frac{2dP_2}{O_2^2}x_1 + \frac{d^2P_2}{O_2^2}$$

minimalan za

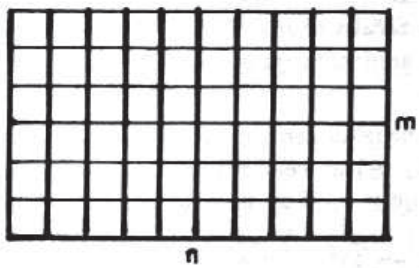
$$x_1 = \frac{P_2O_1^2}{P_2O_1^2 + P_1O_2^2}d, \quad x_2 = \frac{P_1O_2^2}{P_2O_1^2 + P_1O_2^2}d.$$

76.4.3. Ne postoje uvek. Za proizvoljno $n > 1$ uzmimo, na primer,

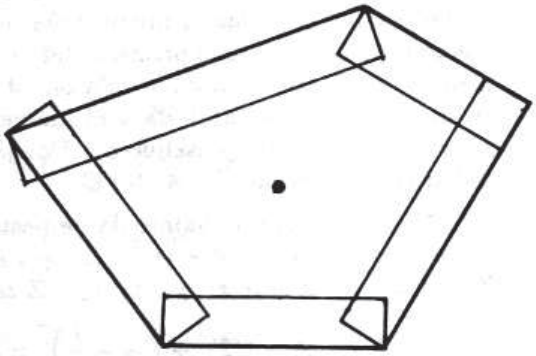
$$a_1 \equiv a_2 \equiv \cdots \equiv a_n \equiv b_1 \equiv b_2 \equiv \cdots \equiv b_{n-1} \equiv 1 \pmod{2n}, \quad b_n \equiv 0 \pmod{2n}.$$

Lako se proverava da za proizvoljne neprazne skupove $A' \subset A$ i $B' \subset B$ zbir elemenata iz A' i elemenata iz B' nije deljiv sa $2n$.

76.4.4. U gradu ima mn raskrsnica. Deo ulice između dveju susednih raskrsnica nazovimo sokakom. Da bismo, polazeći od jedne raskrsnice, prošli kroz svaku od preostalih $mn-1$ raskrsnica krećući se asfaltiranim delom mreže, mora biti asfaltirano bar $mn-1$ sokaka (do svake sledeće raskrsnice stižemo novim sokakom). Na sl. 131 je prikazana mreža u kojoj je asfaltirano $n(m-1)+n-1 = mn-1$ sokaka, pri čemu su svake dve raskrsnice povezane asfaltnim putem.



Sl. 131.



Sl. 132.

76.MO.1. Nad svakom stranicom datog poligona konstruišimo pravougaonik visine P/s koji sa poligonom ima zajedničkih unutrašnjih tačaka, sl. 132. Zbir površina tih pravougaonika jednak je P. Kako svaka dva pravougaonika konstruisana nad susednim stranicama takođe imaju zajedničkih unutrašnjih tačaka, to je ukupna površina koji oni pokrivaju manja od P, dakle od površine poligona. Zato postoji tačka unutar poligona koja nije pokrivena nijednim od pravougaonika. Krug sa centrom u toj tački, poluprečnika P/s, sadržan je u datom poligonu.

76.MO.2. Primetimo najpre da ako brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$ imaju navedeno svojstvo, onda za svaki realan broj k to svojstvo imaju brojevi $a_1 + k, a_2 + k, \ldots, a_{2n+1} + k$, kao i brojevi $a_1k, a_2k, \ldots, a_{2n+1}k$.

Koristeći prvu od navedenih činjenica zaključujemo da je dovoljno da tvrđenje zadatka dokažemo pod pretpostavkom da je jedan od datih brojeva, na primer broj a_1, jednak nuli. U tom slučaju lako izvodimo da su svi dati brojevi parni. Zaista, ako izdvojimo broj $a_1 = 0$ i ostale brojeve podelimo na dve grupe sa jednakim zbirovima, dobijamo da je zbir svih datih brojeva paran. S druge strane, ako izdvojimo bilo koji broj a_i i preostale brojve podelimo na dve grupe sa jednakim zbirovima, zaključujemo da je zbir svih brojeva osim a_i takođe paran. Zato i a_i mora biti paran broj.

Kako su svi dati brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$ parni, na osnovu druge od navedenih činjenica, zaključujemo da i celi brojevi $\frac{1}{2}a_1, \frac{1}{2}a_2, \ldots, \frac{1}{2}a_{2n+1}$ imaju navedeno svojstvo, pri čemu je jedan od njih jednak nuli. Nastavljajući dalje ovaj postupak dobijamo da je za svaki prirodan broj j svaki od datih brojeva deljiv sa 2^j, što znači da su svi oni jednaki nuli. Time je tvrđenje zadatka dokazano.

Napomena. Tvrđenje zadatka važi i ako su $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$ proizvoljni realni brojevi (ne moraju biti celi) sa navedenim svojstvom, no dokaz je u tom slučaju nešto teži.

76.MO.3. Iz $0 \le x \le 1$ i $0 \le y \le 1$ sledi $x^2 \le x$ i $y^2 \le y$, pa je $ax^2 + by^2 \le ax + by$. Slično se izvodi da je $az^2 + bt^2 \le az + bt$, pa je

$$f(x,y,z,t) = \frac{ax^2 + by^2}{ax + by} + \frac{az^2 + bt^2}{az + bt} \le 1 + 1 = 2.$$

Kako je $f(1,0,0,1) = 2$, to je 2 najveća vrednost funkcije f pri datim uslovima.

Dokažimo sada da, pri datim uslovima, važi

$$\frac{ax^2 + by^2}{ax + by} \ge \frac{ax + by}{a + b}.$$

Zaista, ta nejednakost ekvivalentna je sa $(a+b)(ax^2 + by^2) \ge (ax + by)^2$, odnosno sa $ab(x - y)^2 \ge 0$, što je očigledno ispunjeno. Zato je

$$f(x,y,z,t) \ge \frac{ax + by}{a + b} + \frac{az + bt}{a + b} = 1.$$

Kako je $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1$, to je 1 najmanja vrednost funkcije f pri datim uslovima.

77.1.1. Primetimo prvo da je par $(0,0)$ rešenje date jednačine, a da par (x,y), gde je tačno jedan od brojeva x i y jednak nuli, nije rešenje. Neka je $p(x+y) = xy \neq 0$. Tada $p \mid xy$, a kako je p prost broj, to $p \mid x$ ili $p \mid y$. Neka je, na primer, $x = mp$, gde je m ceo broj i $m \neq 0$. Lako se vidi da ne može biti $m = 1$. Dalje je $p(mp+y) = mpy$, pa sledi $y = \dfrac{mp}{m-1}$.

a) Ako je $m-1 = 1$, onda je $x = 2p$, $y = 2p$ rešenje date jednačine.

b) Ako je $m-1 = -1$, onda je (suprotno pretpostavci) $m = 0$.

c) Ako je $m-1 = p$, onda je $x = p(p+1)$, $y = p+1$ rešenje date jednačine.

d) Ako je $m-1 = -p$, onda je $x = p(1-p)$, $y = p-1$ rešenje date jednačine.

e) Ako $m-1 \notin \{-1, 1, -p, p\}$, onda $y = \dfrac{mp}{m-1}$ nije ceo broj.

Analogno razmatramo slučaj kada je broj y deljiv sa p i u tom slučaju dobijamo još jedno rešenje: $x = p+1$, $y = p(p+1)$. Dakle sva celobrojna rešenja (x,y) date jednačine su:

$$(0,0),\ (2p,2p),\ \big(p(p+1),p+1\big),\ \big(p+1,p(p+1)\big),\ \big(p(1-p),p-1\big),\ \big(p-1,p(1-p)\big).$$

77.1.2. Kako je $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, dovoljno je dokazati da je bar jedan od brojeva a, b, c deljiv sa 4 ili da su bar dva parna, da je bar jedan deljiv sa 3 i bar jedan deljiv sa 5.

a) Primetimo da a i b ne mogu oba biti neparni brojevi, jer bi u tom slučaju važilo $a^2 + b^2 \equiv 2 \pmod 4$, pa $a^2 + b^2$ ne bi mogao da bude jednak kvadratu celog broja c koji može davati ostatak 0 ili 1 pri deljenju sa 4. Ako su oba broja a i b parni, onda $4 \mid abc$. Razmotrimo slučaj kada je tačno jedan od brojeva a i b paran. U tom slučaju c je neparan broj. Neka je, na primer, $a = 2k$, $b = 2n+1$, $c = 2m+1$. Tada iz $a^2+b^2 = c^2$ sledi $k^2 = m(m+1) - n(n+1)$, pa kako $2 \mid m(m+1) - n(n+1)$, to sledi $2 \mid k^2$ i $2 \mid k$. Kako je $a = 2k$, to $4 \mid a$, pa prema tome $4 \mid abc$.

b) Primetimo da kvadrat celog broja pri deljenju sa 3 daje ostatak 0 ili 1. Ako nijedan od brojeva a, b nije deljiv sa 3, onda je

$$a^2 + b^2 \equiv 2 \pmod 3, \qquad c^2 \equiv 0 \text{ ili } 1 \pmod 3,$$

pa nije $a^2 + b^2 = c^2$, što je suprotno pretpostavci. Dakle, bar jedan od brojeva a, b je deljiv sa 3.

c) Ako je ceo broj deljiv sa 5, onda je i njegov kvadrat deljiv sa 5, a ako ceo broj nije deljiv sa 5, onda njegov kvadrat daje ostatak 1 ili 4 pri deljenju sa 5. Ako nijedan od brojeva a, b i c nije deljiv sa 5, onda važi

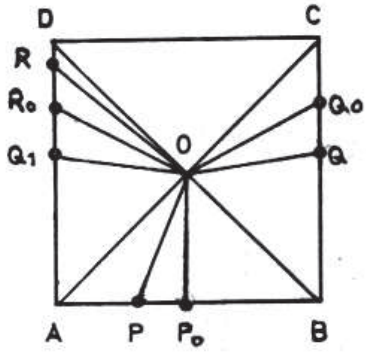
$$a^2 + b^2 \equiv 0,\ 2 \text{ ili } 3 \pmod 5, \qquad c^2 \equiv 1 \text{ ili } 4 \pmod 5,$$

pa nije $a^2 + b^2 = c^2$. Kontradikcija. Prema tome, bar jedan od brojeva a, b i c je deljiv sa 5.

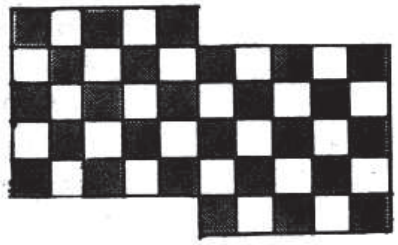
77.1.3. Neka tačke P, Q i R dele obim kvadrata $ABCD$ na tri jednaka dela. Ne smanjujući opštost razmatranja možemo pretpostaviti da nijedna od tačaka P, Q i R nije unutrašnja tačka duži CD i da, na primer, $P \in AP_0$, $Q \in BC$ i $R \in AD$,

gde je P_0 središte duži AB. Neka su dalje $Q_0 \in BC$ i $R_0 \in AD$ tačke koje zajedno sa tačkom P_0 dele obim kvadrata na tri jednaka dela, a Q_1 tačka simetrična tački Q u odnosu na pravu OP_0, sl. 133. Tada je $PP_0 = QQ_0 = RR_0$, $OQ = OQ_1$, $Q_1R_0 = QQ_0 = RR_0$, $OP_0 \leq OP$ i $2OR_0 \leq OR + OQ_1$ (jer je OR_0 težišna duž trougla ORQ_1), pri čemu su zapisane nejednakosti stroge ako je $P \neq P_0$. Dakle, za $P \neq P_0$ dobijamo

$$OP_0 + OQ_0 + OR_0 = OP_0 + 2OR_0 < OP + OR + OQ_1 = OP + OQ + OR.$$



Sl. 133.



Sl. 134.

77.1.4. Šrafirajmo polja dobijene figure kao na sl. 134. Ukupan broj polja je 50, pri čemu je 26 crnih i 24 bela. Kako jedna domina pokriva jedno belo i jedno crno polje, to se sa 25 domina ne može prekriti ova figura.

77.2.1. Data jednačina ekvivalentna je sa sistemom

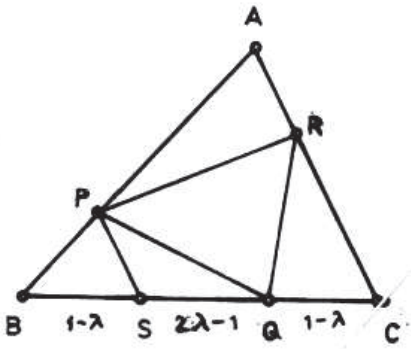
$$\left(x - \sqrt{1 - \frac{1}{x}}\right)^2 = x - \frac{1}{x}, \quad x \geq 1,$$

tj. (posle elementarnih transformacija) sa sistemom $x^2 - x - 1 = 0$, $x \geq 1$. Jedino rešenje jednačine je $x = (1 + \sqrt{5})/2$.

77.2.2. Neka je S presek prave BC sa pravom koja sadrži tačku P i paralelna je sa AC, sl. 135. Tada je $BS = (1 - \lambda)BC$, $PS = (1 - \lambda)AC$. Kako je $1/2 \leq \lambda \leq 1$, to tačka S pripada duži BQ, pa je

$$SQ = BQ - BS = \lambda BC - (1 - \lambda)BC$$
$$= (2\lambda - 1)BC,$$
$$PQ \leq PS + SQ = (1 - \lambda)AC + (2\lambda - 1)BC.$$

Analogno dobijamo $QR \leq (1 - \lambda)AB + (2\lambda - 1)AC$, $RP \leq (1 - \lambda)BC + (2\lambda - 1)AB$, pa dalje lako sledi



Sl. 135.

$$PQ + QR + RP \leq \lambda(AB + BC + CA).$$

Jednakost važi ako i samo ako je $S = Q$ ili $S = B$. Taj uslov je ekvivalentan sa $2\lambda - 1 = 0$ ili $\lambda = 1$, tj. sa $\lambda \in \{1/2, 1\}$.

77.2.3. Dokažimo da među brojevima $a_{20} - a_{19}, a_{19} - a_{18}, \ldots, a_3 - a_2, a_2 - a_1$ ima bar četiri međusobno jednaka. Pretpostavimo suprotno, tj. da među njima ima najviše tri međusobno jednaka broja. Tada je

$$\begin{aligned} a_{20} &= a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{19} - a_{18}) + (a_{20} - a_{19}) \\ &\geq 1 + 3(1+2+3+4+5+6) + 7 = 71, \end{aligned}$$

što je suprotno pretpostavci $a_{20} \leq 70$.

77.2.4. Neka je $P_n = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n-2}$. Kako za $k > 1$ važi $\frac{2k-1}{2k-2} > \sqrt{\frac{k}{k-1}}$, to je

$$P_n > \sqrt{\frac{2}{1}}\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{4}{3}} \cdots \sqrt{\frac{n}{n-1}} = \sqrt{n}.$$

Označimo $Q_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n}$. Kako za $k \in \mathbb{N}$ važi $\frac{2k-1}{2k} < \frac{2k}{2k+1}$, to je

$$Q_n < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{P_n} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{Q_n(2n+1)} < \frac{1}{2nQ_n},$$

pa sledi $Q_n < \frac{1}{\sqrt{2n}}$. Dalje je

$$P_n = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n-2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot 2n = 2nQ_n < \sqrt{2n}.$$

77.3.1. Koristeći nejednakost između kvadratne i aritmetičke sredine dobijamo

$$\begin{aligned} &\sqrt{a_1^2 + (1-a_2)^2} + \sqrt{a_2^2 + (1-a_3)^2} + \cdots + \sqrt{a_{2k}^2 + (1-a_1)^2} \\ &\geq \sqrt{2}\left(\frac{a_1 + 1 - a_2}{2} + \frac{a_2 + 1 - a_3}{2} + \cdots + \frac{a_{2k} + 1 - a_1}{2}\right) = \sqrt{2}\frac{2k}{2} = k\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Jednakost važi ako i samo ako je $a_1 = a_3 = \cdots = x$, $a_2 = a_4 = \cdots = y$ i $x + y = 1$.

77.3.2. Neka je n (u dekadnom zapisu) k-tocifren broj i neka je S zbir cifara broja n. Tada je $9^{k-1} < 10^{k-1} \leq n$ i $S \leq 9k$. Neka je $n^2 = S^5$. Tada je $(9^{k-1})^2 < (9k)^5$, tj. $9^{2k-7} < k^5$. Lako se proverava da poslednja nejednakost važi za $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Dokažimo indukcijom po k da za $k \geq 6$ važi $9^{2k-7} \geq k^5$. Za $k = 6$ dobijamo

$$9^{2 \cdot 6 - 7} = 59049 > 776 = 6^5.$$

Pretpostavimo da za neko $k \geq 6$ važi $9^{2k-7} \geq k^5$. Tada je

$$9^{2(k+1)-7} = 81 \cdot 9^{2k-7} \geq 81k^5 > (2k)^5 > (k+1)^5,$$

tj. nejednakost važi i za $k+1$. Na osnovu dokazanog sledi $k \leq 5$, $S \leq 45$. Iz uslova $n^2 = S^5$ sledi $n = S^2\sqrt{S}$, pa je S potpun kvadrat. Prema tome,

$$S \in \{1, 4, 9, 16, 25, 36\}.$$

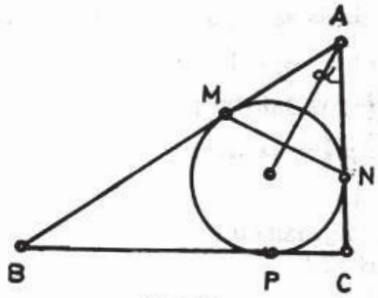
Dalje proveravamo:

$$\begin{array}{lll} S = 1, & n = S^2\sqrt{S} = 1, & 1 = 1; \\ S = 4, & n = 32, & 3 + 2 \neq 4; \\ S = 9, & n = 243, & 2 + 4 + 3 = 9; \\ S = 16, & n = 1024, & 1 + 0 + 2 + 4 \neq 16; \\ S = 25, & n = 3125, & 3 + 1 + 2 + 5 \neq 25; \\ S = 36, & n = 46656, & 4 + 6 + 6 + 5 + 6 \neq 36. \end{array}$$

Prema tome, traženi brojevi su 1 i 243.

77.3.3. Neka je ABC pravougli trougao sa hipotenuzom $AB = c$. Označimo sa M i N redom dodirne tačke upisanog kruga sa dužima AB i AC, a sa α ugao BAC, sl. 136. Tada je

$$AM = \frac{AB + AC - BC}{2} = \frac{c}{2}(1 + \cos\alpha - \sin\alpha).$$



Sl. 136.

Kako je simetrala ugla α istovremeno i simetrala duži MN, to je:

$$\begin{aligned} MN &= 2\,AM \sin\frac{\alpha}{2} = c\sin\frac{\alpha}{2}(1 + \cos\alpha - \sin\alpha) \\ &= c\sin\frac{\alpha}{2}\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right) = c\sin\alpha\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right) \\ &= c\sqrt{\sin^2\alpha(1 - \sin\alpha)} = \frac{c}{\sqrt{2}}\sqrt{\sin\alpha \cdot \sin\alpha(2 - 2\sin\alpha)} \\ &\leq \frac{c}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\frac{\sin\alpha + \sin\alpha + (2 - 2\sin\alpha)}{3}\right)^3} = \frac{2\sqrt{3}\,c}{9}. \end{aligned}$$

77.3.4. Pretpostavimo da je n-tougao podeljen dijagonalama iz D na trouglove, tako da nikoje dve od dijagonala skupa D nemaju zajedničku unutrašnju

tačku i da iz svakog temena n-tougla polazi paran broj dijagonala. Tada se dobijeni trouglovi mogu obojiti plavom i crvenom bojom, tako da su svaka dva trougla koji imaju zajedničku stranicu obojena različitim bojama. (To se može postići ako se poligon na početku ceo oboji jednom bojom, a zatim se konstruišu dijagonale jedna za drugom i posle svakog konstruisanja dijagonale sve obojene površine sa jedne strane te dijagonale se prefarbaju onom drugom bojom.) Za tako obojene trouglove važi:

a) Svaka od dijagonala je stranica jednog plavog i jednog crvenog trougla.

b) Svi trouglovi kod kojih je jedna stranica istovremeno i stranica n-tougla obojeni su istom bojom, recimo plavom. (To sledi iz činjenice da iz svakog temena n-tougla polazi paran broj dijagonala iz D, tj. da je svako teme n-tougla zajedničko teme neparnog broja trouglova na koje je n-tougao podeljen.)

Ako je p broj plavih, a c broj crvenih trouglova, onda je $n + 3c = 3p$, jer je svaka dijagonala iz D stranica jednog plavog i jednog crvenog trougla, a svaka stranica n-tougla je stranica samo jednog plavog trougla. Prema tome, broj n je deljiv sa 3, a to znači da se 100-ugao ne može podeliti na trouglove dijagonalama tako da važe navedeni uslovi.

77.4.1. Primetimo najpre sledeće: Ako je $p \geq n$ prost broj, onda je najviše jedan od brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$ deljiv sa p. Zaista, ako $p \mid a_i$ i $p \mid a_j$, gde je $1 \leq i < j \leq n$, onda $p \mid a_j - a_i = j - i$, pri čemu je $1 \leq j - i \leq n - 1$, pa zato sledi $p \leq n - 1$. Razmotrimo sledeće slučajeve:

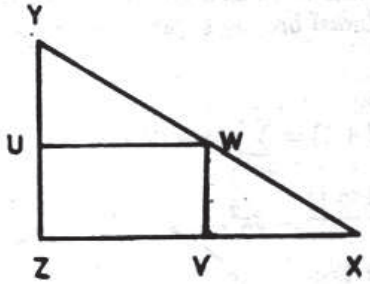
a) k je prost broj i $2k \leq n$. Tada je broj $n!$ deljiv sa k^2, a broj $n!/k$ je deljiv svakim prostim brojem koji nije veći od n. Zato broj $\frac{n!}{k} + 1$ nema proste delioce manje ili jednake od n (inače bi i jedinica bila deljiva takvim prostim deliocem). Sledi da broj $a_k = k\left(\frac{n!}{k} + 1\right)$ ima prost činilac p koji je veći od n. Nijedan od brojeva a_j, $j \neq k$, nije deljiv sa p.

b) k je prost broj i $k \leq n < 2k$. Tada $k \mid a_k$ i nijedan od brojeva j (pa samim tim ni a_j), gde je $j \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{k\}$ nije deljiv sa k.

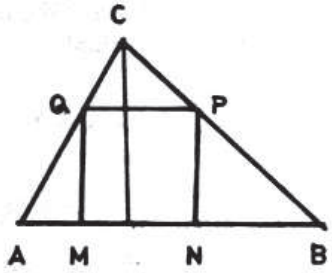
c) k je složen broj i $k \neq 4$. Ako je $k = ab$, gde su a i b prirodni brojevi i $1 < a < b$, onda se u proizvodu $n!$ pojavljuju brojevi a, b i k. Ako je $k = a^2$, gde je $a \geq 3$ prirodan broj, onda se u proizvodu $n!$ pojavljuju brojevi a, $2a$ i k. U svakom slučaju broj $n!/k$ deljiv je sa k, pa kao pod a) dobijamo da a_k ima prost delilac veći od n.

d) $k = 4$. Ako je $n \geq 6$, onda je broj $n!/4$ deljiv sa 4, pa analogno kao u slučajevima a) i c) sledi da broj a_k ima prost delilac veći od n. Za $n = 4$ broj $a_4 = 4!+4 = 28$ deljiv je prostim brojem $p = 7 > 4$, a za $n = 5$ broj $a_4 = 5!+4 = 124$ deljiv je prostim brojem $p = 31 > 5$.

77.4.2. Dokažimo sledeće pomoćno tvrđenje: Neka je XYZ pravougli trougao (sa hipotenuzom XY), W proizvoljna tačka duži XY i U i V podnožja normala iz W redom na katete YZ i ZX, sl. 137. Ako je p_0 površina trougla XYZ i p_1 površina pravougaonika $UZVW$, onda je $p_1 \leq p_0/2$.



Sl. 137.

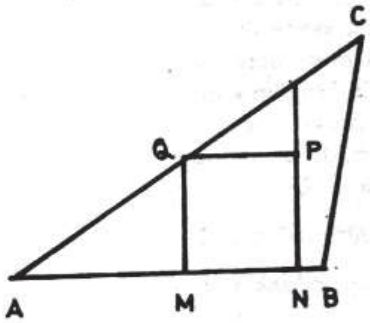


Sl. 138.

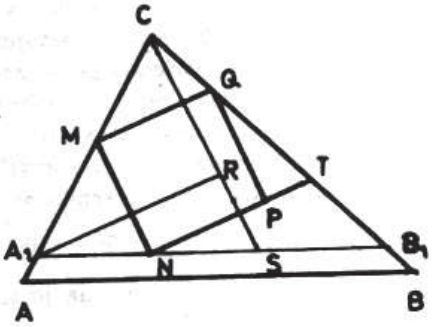
Neka je $YW = k\,XY$ i $XW = (1-k)XY$, gde je $0 < k < 1$. Tada je

$$p_0 - p_1 = P_{UWY} + P_{XWV} = k^2 p_0 + (1-k)^2 p_0 = (2k^2 - 2k + 1)p_0$$
$$= 2\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 p_0 + \frac{p_0}{2} \geq \frac{p_0}{2},$$

odakle lako sledi $p_1 \leq p_0/2$.



Sl. 139.



Sl. 140.

Neka se kvadrat $MNPQ$ nalazi unutar trougla ABC, sl. 138, 139, 140. Čitaocu prepuštamo da dokaže da se trougao ABC može podeliti na nekoliko pravouglih trouglova (i eventualno još nekoliko trouglova i četvorouglova) tako da svaki pravougli trougao sadrži pravougaonik izrezan iz kvadrata $MNPQ$, pri čemu se jedno teme takvog pravougaonika poklapa sa temenom pravog ugla trougla i da posle primeni dokazano pomoćno tvrđenje.

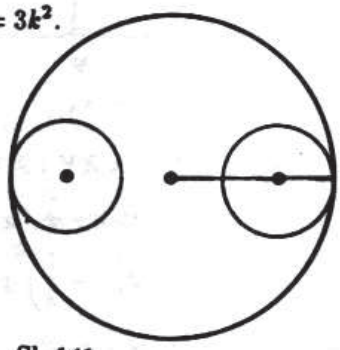
77.4.3. Neka je $6k = x_1 + x_2 + x_3$, gde su x_1, x_2 i x_3 prirodni brojevi za koje važi $x_1 \leq x_2 \leq x_3$. Ako je $x_1 = 2l - 1$, gde je $1 \leq l \leq k$, onda x_2 može biti jednak nekom od brojeva

$$2l-1, \quad 2l, \quad 2l+1, \quad \ldots, \quad \left[\frac{6k-2l+1}{2}\right] = 3k - l,$$

i za svaku od tih $3k - 3l + 2$ mogućnosti broj x_3 jednak je $6k - x_1 - x_2$. Ako je $x_1 = 2l$, gde je $1 \le l \le k$, onda je x_2 jednak nekom od sledećih $3k - 3l + 1$ brojeva: $2l, 2l+1, \ldots, 3k - l$ i za svaku od tih mogućnosti broj x_3 se jednoznačno određuje. Zato je traženi broj jednak

$$\sum_{l=1}^{k}(3k - 3l + 2) + \sum_{l=1}^{k}(3k - 3l + 1) = \sum_{l=1}^{k}(6k - 6l + 3)$$
$$= k(6k+3) - 6\frac{k(k+1)}{2} = 3k^2.$$

77.4.4. Neka je S_{100} skup koji sadrži krugove sa centrima u datim tačkama i poluprečnika $r = \frac{1}{201}$. Zbir prečnika tih krugova je $D_{100} = 200r < 1$. Ako je rastojanje između svaka dva kruga iz S_{100} veće od 1, onda za skup S_{100} važe uslovi 1), 2) i 3). Ako među krugovima iz S_{100} ima takvih da rastojanje među njima nije veće od 1, onda proizvoljna dva takva kruga zamenimo najmanjim krugom koji ih sadrži, sl. 141. Dobijamo skup S_{99} (koji čine 99 krugova), tako da su unutar tih krugova sve date tačke, a pri tome je zbir prečnika svih tih krugova $D_{99} \le 200r + 1 < 2$. Ako je rastojanje između svaka dva kruga iz S_{99} veće od 1, onda za skup S_{99} važe svi uslovi zadatka. U protivnom ćemo dva kruga iz S_{99} čije rastojanje nije veće od 1 zameniti najmanjim krugom koji ih sadrži. Dobijamo skup S_{98} i dalje analogno nastavimo postupak. Na kraju dobijamo skup S_n, gde je $1 \le n \le 100$, tako da taj skup sadrži n krugova, da se unutar tih krugova nalaze sve date tačke i da je zbir prečnika svih krugova iz S_n



Sl. 141.

$$D_n \le 200r + (100 - n) \le 200r + 99 < 100.$$

77.MO.1. Dokazaćemo da je traženi skup jednak skupu svih iracionalnih brojeva.

Pretpostavimo najpre da je α iracionalan broj. U zadatku 74.MO.1. je dokazano da tada za svaki pozitivan broj c postoji (čak beskonačno mnogo) racionalnih brojeva m/n (naravno, različitih od α), takvih da je $\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| < \frac{c}{n}$. Dakle, iracionalni brojevi imaju navedenu osobinu.

Dokažimo sada da racionalni brojevi tu osobinu nemaju. Drugim rečima, dokažimo da za svaki racionalan broj α postoji pozitivan broj c, takav da je za svaki racionalan broj $\frac{m}{n} \ne \alpha$ ispunjeno $\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| \ge \frac{c}{n}$.

Zaista, neka je $\alpha = \frac{p}{q}$, $q \ge 1$. Tada je, zbog $\frac{p}{q} \ne \frac{m}{n}$, ispunjeno $pn - qm \ne 0$, pa je $|pn - qm| \ge 1$. Odatle sledi

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| = \left|\frac{p}{q} - \frac{m}{n}\right| = \frac{|pn - qm|}{qn} \ge \frac{1}{qn} = \frac{1/q}{n},$$

tj. može se uzeti $c = 1/q$.

77.MO.2. Uvek u daljem p, q, r označavaju proste brojeve, a x, y, z prirodne brojeve. Dokažimo prvo sledeća pomoćna tvrđenja.

LEMA 1. Jedino rešenje jednačine $2^x - 1 = 3^y$ je $x = 2$, $y = 1$.

LEMA 2. Jednačina $2^x + 1 = 3^y$ ima tačno dva rešenja: $x = y = 1$ i $x = 3$, $y = 2$.

LEMA 3. Jednačina $p^x - 1 = 2^y$, gde je $p > 3$ i $x > 1$, nema rešenja.

LEMA 4. Jednačina $p^x + 1 = 2^y$, gde je $p > 3$ i $x > 1$, nema rešenja.

Dokaz leme 1. Neka za prirodne brojeve x i y važi $2^x - 1 = 3^y$. Tada je $2^{x-1} + 2^{x-2} + \cdots + 2 + 1 = 3^y$, odakle lako sledi $2 \mid x$. Neka je $x = 2l$, $l \in \mathbf{N}$. Tada je $(2^l - 1)(2^l + 1) = 3^y$. Kako su brojevi $2^l - 1$ i $2^l + 1$ uzajamno prosti (neparni su i razlikuju se za 2), to iz poslednje jednakosti sledi $l = 1$, $x = 2$, $y = 1$.

Dokaz leme 2. Lako se proverava da je $x = 1$, $y = 1$ rešenje jednačine $2^x + 1 = 3^y$. Neka je $y > 1$. Iz jednakosti

$$2^x = 3^y - 1 = 2(3^{y-1} + 3^{y-2} + \cdots + 3 + 1)$$

sledi $y = 2l$, gde $l \in \mathbf{N}$, pa dalje dobijamo $2^x = (3^l - 1)(3^l + 1)$, a odavde dalje sledi $l = 1$, $y = 2$, $x = 3$.

Dokaz leme 3. Kako je p neparan broj, to iz jednakosti

$$(p-1)(p^{x-1} + p^{x-2} + \cdots + p + 1) = 2^y$$

sledi $x = 2l$, gde $l \in \mathbf{N}$. Jednačina prima oblik

$$(p^l - 1)(p^l + 1) = 2^y$$

i ima jedino rešenje $p = 3$, $l = 1$, $y = 3$, jer su jedina dva stepena dvojke koji se razlikuju za dva brojevi 2^1 i 2^2.

Dokaz leme 4. Neka za $x > 1$ i $p > 3$ važi $p^x + 1 = 2^y$. Razmotrimo sledeće slučajeve:

Slučaj 1: $y = 2k$, $k \in \mathbf{N}$. Tada je broj $2^y - 1 = 2^{2k} - 1 = 4^k - 1$ deljiv sa 3, a to je kontradikcija jer je p jedini prost delilac broja $2^y - 1$.

Slučaj 2: Neka je $x = 2k + 1$, $k \in \mathbf{N}$. Tada je

$$p^x + 1 = (p+1)(p^{2k} - p^{2k-1} + \cdots + 1) = (p+1)A = 2^y.$$

Pri tome je A neparan broj koji je stepen dvojke. Dakle, $A = 1$, pa je i $x = 1$, što je koutradikcija.

Slučaj 3: $y = 2k + 1$, $x = 2l$, $k, l \in \mathbf{N}$. Broj p je oblika $p = 4m \pm 1$, gde $m \in \mathbf{N}$. Zato je

$$p^x + 1 = 1 + (1 \pm 4m)^{2l} = 2 \pm 2l \cdot 4m + \binom{2l}{2}(4m)^2 \pm \cdots \equiv 2 \pmod 8,$$

$$2^y = 2^{2k+1} \equiv 0 \pmod 8,$$

što je kontradikcija.

Odredimo sada rešenja date jednačine.

a) Neka je $p = 2$. Jednačina prima oblik

$$(2^x - 1)(2^x + 1) = q^y r^z.$$

Brojevi $2^x - 1$ i $2^x + 1$ su uzajamno prosti i jedan od njih je deljiv sa 3. Iz uslova da broj $(2^x - 1)(2^x + 1)$ ima tačno dva različita prosta delioca sledi da je jedan od brojeva $2^x - 1$ i $2^x + 1$ stepen trojke. Koristeći leme 1 i 2 dobijamo sledeća rešenja date jednačine:

$$(2,3,5,2,1,1), \quad (2,5,3,2,1,1), \quad (2,3,7,3,2,1), \quad (2,7,3,3,1,2).$$

b) Neka je $p = 3$. Jednačina prima oblik

$$(3^x - 1)(3^x + 1) = q^y r^z.$$

Brojevi $3^x - 1$ i $3^x + 1$ su uzastopni parni brojevi, pa im je najveći zajednički delilac jednak 2. Iz uslova da proizvod ta dva broja ima najviše dva različita prosta delioca sledi da je jedan od njih jednak stepenu dvojke. Koristeći leme 1 i 2 lako dobijamo sva rešenja date jednačine kod kojih je $p = 3$. To su:

$$(3,2,2,1,1,2), \quad (3,2,2,1,2,1), \quad (3,2,5,2,4,1), \quad (3,5,2,2,1,4).$$

c) Neka je $p > 3$ i $(p^x - 1)(p^x + 1) = q^y r^z$. Jedan od brojeva $p^x - 1$ i $p^x + 1$ deljiv je sa 3, a svaki od njih je paran broj. Zato je jedan od tih brojeva jednak stepenu dvojke, a drugi je oblika $2 \cdot 3^z$. Iz lema 3 i 4 sledi $x = 1$.

Ako je $p - 1 = 2^{y-1}$, $p + 1 = 2 \cdot 3^z$, onda je $2^{y-2} + 1 = 3^z$. Koristeći lemu 2 dobijamo $y = 3$, $z = 1$, $p = 5$ ili $y = 5$, $z = 2$, $p = 17$, a rešenja date jednačine u ovim slučajevima su

$$(5,2,3,1,3,1), \quad (5,3,2,1,1,3) \quad (17,2,3,1,5,2) \quad (17,3,2,1,2,5).$$

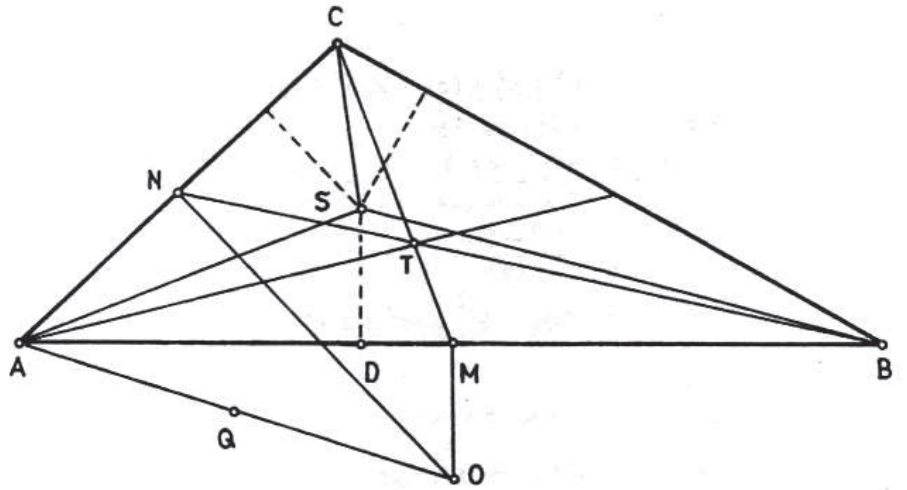
Ako je $p+1 = 2^{y-1}$, $p-1 = 2 \cdot 3^z$, onda je $2^{y-2} - 1 = 3^z$. Koristeći lemu 1 dobijamo $y = 4$, $z = 1$, $p = 7$, a rešenja date jednačine u ovom slučaju su

$$(7,2,3,1,4,1) \quad (7,3,2,1,1,4).$$

Prema tome, jednačina $p^{2x} = q^y r^z + 1$ ima 14 rešenja.

77.MO.3. Uvedimo sledeće oznake: $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, P – površina trougla ABC, R i r – redom poluprečnici opisanog i upisanog kruga, D – tačka dodira upisanog kruga i stranice AB, Q – središte duži AO, sl. 142, i

$$s = \frac{a+b+c}{2}, \quad k = \sqrt{3(3b-c)(3c-b)} = \sqrt{30bc - 9b^2 - 9c^2}.$$



Sl. 142.

Prema uslovu zadatka je $2a = b + c$. Dalje dobijamo:

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{b+c}{16}k,$$
$$R = \frac{abc}{4P} = \frac{2bc}{k}, \quad r = \frac{2P}{a+b+c} = \frac{k}{12},$$
$$AD = \frac{b+c-a}{2} = \frac{b+c}{4}, \quad OM^2 = R^2 - \frac{c^2}{4} = \left(\frac{c(5b-3c)}{2k}\right)^2.$$

Primetimo sledeće: Ako je $5b = 3c$, onda je $b = \frac{3}{5}c$, $a = \frac{4}{5}c$, pa sledi $c^2 = a^2 + b^2$, tj. $\angle BCA = 90°$. Ako je $5b > 3c$, onda je $b > \frac{3}{5}c$, $a > \frac{4}{5}c$, pa sledi $a^2 + b^2 > c^2$, tj. $\angle BCA < 90°$, a tačke C i O su sa iste strane prave AB. Ako je $5b < 3c$, onda su tačke O i C sa raznih strana prave AB.

Uvedimo pravougli koordinatni sistem tako da je $A(0,0)$, $B(c,0)$ i $y_C > 0$, gde je sa y_C označena y-koordinata tačke C. Dalje lako dobijamo:

$$C\left(\frac{3b^2+3c^2-2bc}{8c}, \frac{b+c}{8c}k\right), \quad M\left(\frac{c}{2}, 0\right), \quad D\left(\frac{b+c}{4}, 0\right), \quad S\left(\frac{b+c}{4}, \frac{k}{12}\right)$$
$$O\left(\frac{c}{2}, \frac{5b-3c}{2k}c\right), \quad Q\left(\frac{c}{4}, \frac{5b-3c}{4k}c\right), \quad T\left(\frac{3b^2+11c^2-2bc}{24c}, \frac{b+c}{24c}k\right).$$

a) Kako je $ON \perp AN$ i $OM \perp AM$, to tačke M i N pripadaju krugu K sa prečnikom AO. Kako je

$$\begin{aligned}
SA^2+SO^2-OA^2 &= x_S^2+y_S^2+(x_S-x_O)^2+(y_S-y_O)^2-x_O^2-y_O^2\\
&= 2x_S(x_S-x_O)+2y_S(y_S-y_O)\\
&= \frac{b+c}{2}\left(\frac{b+c}{4}-\frac{c}{2}\right)+\frac{k}{6}\left(\frac{k}{12}-\frac{5b-3c}{2k}c\right)\\
&= \frac{b^2-c^2}{8}+\frac{k^2}{72}+\frac{3c^2-5bc}{12}\\
&= \frac{1}{72}(9b^2-9c^2+30bc-9b^2-9c^2+18c^2-30bc)=0,
\end{aligned}$$

to i tačka S pripada krugu K.

b) Centar kruga K je tačka Q. Kako je

$$\begin{aligned}
ST^2+SQ^2-TQ^2 &= (x_T-x_S)^2+(y_T-y_S)^2\\
&\quad +(x_Q-x_S)^2+(y_Q-y_S)^2-(x_Q-x_T)^2-(y_Q-y_T)^2\\
&= 2(x_S-x_Q)(x_S-x_T)+2(y_S-y_Q)(y_S-y_T)\\
&= \frac{b}{2}\left(\frac{b+c}{4}+\frac{2bc-3b^2-11c^2}{24c}\right)+2\left(\frac{k}{12}+\frac{3c^2-5bc}{4k}\right)\left(\frac{k}{12}-\frac{k}{12}\frac{b+c}{2c}\right)\\
&= \frac{b(8bc-3b^2-5c^2)}{48c}+\frac{k}{12}\frac{c-b}{c}\left(\frac{k}{12}+\frac{3c^2-5bc}{4k}\right)\\
&= \frac{b(b-c)(5c-3b)}{48c}+\frac{k^2(c-b)}{144c}+\frac{(c-b)(3c^2-5bc)}{48c}\\
&= \frac{b(b-c)(5c-3b)}{48c}+\frac{(c-b)(15bc-9b^2)}{144c}\\
&= \frac{b(b-c)(5c-3b)}{48c}-\frac{(b-c)3b(5c-3b)}{144c}=0,
\end{aligned}$$

to je $TS \perp SQ$, tj. prava TS je tangenta kruga K.

78.1.1. Važi:

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}\\
&= \frac{z}{z+xz+xyz}+\frac{xz}{xz+xyz+xyz^2}+\frac{1}{1+z+xz}\\
&= \frac{z}{1+z+xz}+\frac{xz}{1+z+xz}+\frac{1}{1+z+xz}=1,
\end{aligned}$$

pod pretpostavkom da je izraz S definisan.

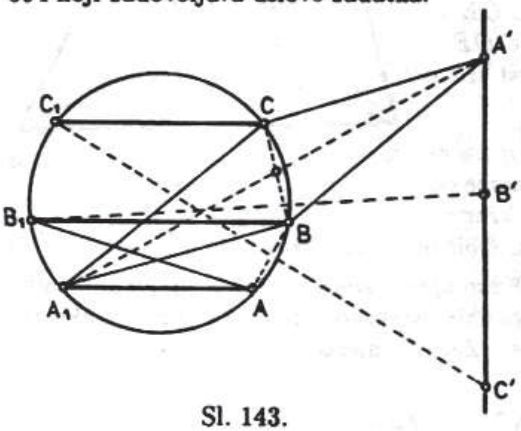
78.1.2. Neka je traženi broj $\overline{a_{n-1}\dots a_1a_0}$, gde $a_i \in \{0,1,\dots,9\}$ za $i=0,1,\dots,n-1$. Uslov

$$a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\dots+10a_1+a_0=33(a_{n-1}+\dots+a_1+a_0)$$

može se napisati u obliku

$$a_{n-1}(10^{n-1} - 33) + \cdots + a_2(10^2 - 33) = 23a_1 + 32a_0.$$

Kako leva strana ove jednakosti nije manja od $10^{n-1} - 33$, a desna nije veća od 495, to je ta jednakost moguća jedino za $n \leq 3$. Lako se proverava da ne postoje jednocifreni ni dvocifreni brojevi koji zadovoljavaju dati uslov. Za $n = 3$ dobijamo uslov $100x + y + z = 33(x + y + z)$. Dakle, mora sam broj da bude deljiv sa 3, pa, takođe, i njegov zbir cifara $x + y + z$. No, to znači da je desna strana deljiva sa 9, pa je i sam broj deljiv sa 9. Najzad, dobijamo da $9 \mid x + y + z$, što je moguće u slučaju $x + y + z \in \{9, 18, 27\}$. Provera pokazuje da jedino $x + y + z = 18$ daje broj 594 koji zadovoljava uslove zadatka.



Sl. 143.

78.1.3. Dijagonale četvorougla $A_1BA'C$ se, po pretpostavci, polove, pa je taj četvorougao paralelogram, tj. $CA' \parallel A_1B$ i $CA' = A_1B$, sl. 143. Slično je $CB' \parallel B_1A$ i $CB' = B_1A$. Odatle sledi da je trougao $A'B'C$ jednakokrak i $A'B' \perp A_1A$. Na sličan način se dokazuje da je $B'C' \perp C_1C$. Kako je $AA_1 \parallel CC_1$, odatle sledi da su tačke A', B' i C' kolinearne.

78.1.4. Pretpostavimo da je tablica postavljena tako da ima 10 (horizontalnih) vrsta i 9 (vertikalnih) kolona. Vertikalne domine prve kolone pokrivaju paran broj polja, pa je i broj polja koja pokrivaju horizontalne domine paran. Te domine pokrivaju, dakle, paran broj polja druge kolone. Kako i vertikalne domine te kolone pokrivaju paran broj polja, to ostaje paran broj polja druge kolone koji pokrivaju domine koje „prelaze" i u treću kolonu. Nastavljajući ovakvo razmatranje zaključujemo da je ukupan broj horizontalnih domina paran. Kako svih domina ima 45, to je ukupan broj vertikalnih domina neparan.

Isti zaključci, međutim, važe i za drugo pokrivanje tablice dominama, pa je nemoguće da budu ispunjeni uslovi zadatka.

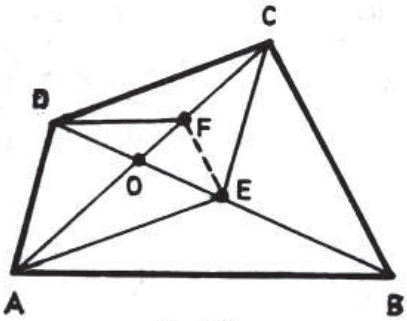
78.2.1. Ako takvi brojevi a, b, c, d postoje, svakako je $abc \neq 0$. Vietova pravila daju $x_1x_2 = c/a$, $x_2x_3 = a/b$, $x_3x_1 = b/c$, odakle je $x_1^2x_2^2x_3^2 = 1$, odnosno $x_1x_2x_3 = \varepsilon$, gde je $\varepsilon = 1$ ili $\varepsilon = -1$. Dalje je $x_3 = \varepsilon\dfrac{a}{c}$, $x_1 = \varepsilon\dfrac{b}{a}$, $x_2 = \varepsilon\dfrac{c}{b}$, pa uvrštavanjem u date jednačine dobijamo $b^2(1 + d\varepsilon) = -ac$, $c^2(1 + d\varepsilon) = -ba$, $a^2(1 + d\varepsilon) = -bc$. Zbog $abc \neq 0$ je $1 + d\varepsilon \neq 0$, pa deljenjem odgovarajućih relacija dobijamo $b^2/c^2 = c/b$, $c^2/a^2 = a/c$, $a^2/b^2 = b/a$, odnosno $a^3 = b^3 = c^3$ i $a = b = c$. No, to znači da se sve tri jednačine poklapaju, što je suprotno pretpostavci da je $x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq x_1$. Dakle, brojevi a, b, c, d koji zadovoljavaju uslove zadatka ne postoje.

78.2.2. Označimo $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Tada je $a^2 = 5 + 2\sqrt{6}$, $(a^2 - 5)^2 = 24$, $a^4 - 10a^2 + 1 = 0$, $a(10a - a^3) = 1$ i, najzad,

$$\frac{1}{a} = 10a - a^3.$$

Iz uslova zadatka sledi da $10a \in S$ (jer $10 \in S$, $a \in S$) i $(-1)a^3 \in S$ (jer $-1 \in S$, $a \in S$), pa i $\frac{1}{a} = 10a + (-a^3) \in S$.

78.2.3. Označimo sa O presek pravih AC i BD, sl. 144. (on može biti i van četvorougla $ABCD$). Iz sličnosti trouglova AOB i FOD dobijamo $AO : OB = FO : OD$, a iz sličnosti trouglova AOE i COD dobijamo $AO : OE = CO : OD$. Deljenje tih relacija daje $OE : OB = FO : CO$, a odatle sledi sličnost trouglova FOE i COB, pa i $EF \parallel BC$.



Sl. 144.

78.2.4. Opišimo oko svake od datih tačaka krug poluprečnika $d/2$; kako je najmanje od rastojanja A_iA_j $(i \neq j)$ jednako d, ti krugovi nemaju zajedničkih unutrašnjih tačaka. Opišimo, dalje, krug poluprečnika $1 + \frac{d}{2}$, s centrom u bilo kojoj od datih tačaka. Kako njemu koncentričan krug poluprečnika 1 sadrži (na rubu ili u unutrašnjosti) sve date tačke, to veći krug sigurno „pokriva" sve ranije konstruisane manje krugove. Zato je njegova površina veća od zbira površina tih manjih krugova:

$$\pi\left(1 + \frac{d}{2}\right)^2 > n\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2,$$

odakle se sređivanjem dobija tražena relacija.

78.3.1. Pretpostavimo da je $P_n(x)$ polinom koji zadovoljava uslove zadatka. Tada je $Q_n(x) = n - P_n(x)$ polinom n-tog stepena koji je u n različitih tačaka, na primer $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}$, jednak nuli, a $Q_n(0) = n$. Zato je, za neku konstantu A, $Q_n(x) = A(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$ i

$$n = Q_n(0) = A(-1)^n x_1 x_2 \cdots x_n.$$

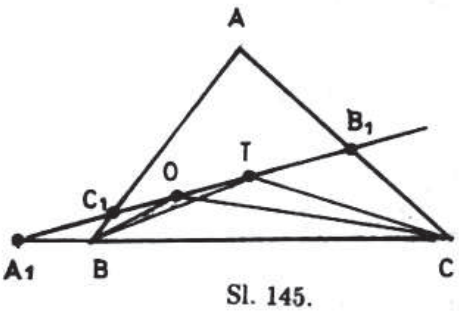
Kako su celi brojevi $x_1, \ldots, x_n$ međusobno različiti i, zbog prethodnog, nijedan od njih nije jednak nuli, to su najviše dva od njih po modulu jednaka 1, pa iz prethodne jednakosti sledi $n = |A(-1)^n x_1 x_2 \cdots x_n| \geq 2^{n-2}$, odnosno $n \leq 4$. Za te vrednosti prirodnog broja n se lako konstruišu polinomi koji zadovoljavaju uslove zadatka:

$n = 1$	$Q_1(x) = x + 1$	$P_1(x) = -x$
$n = 2$	$Q_2(x) = (x - 1)(x - 2)$	$P_2(x) = 3x - x^2$
$n = 3$	$Q_3(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 3)$	$P_3(x) = x + 3x^2 - x^3$
$n = 4$	$Q_4(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$	$P_4(x) = 5x^2 - x^4$

78.3.2 Pretpostavimo najpre da je $r > 2$ složen broj. Ako je jedini njegov prost činilac 2, onda važi tvrđenje (a). Pretpostavimo da to nije slučaj i dokažimo da tada važi tvrđenje (b).

Neka je $r = ab$, gde je $a > 1$, $b > 1$ i a je neparan broj. Razlikujmo slučajeve $b \leq \frac{a-1}{2}$ i $b > \frac{a-1}{2}$. Ako je $b \leq \frac{a-1}{2}$, uzmimo $u = 2b$, $v = b + \frac{a-1}{2}$. Tada je $u \geq 4$, $v \geq 3$, $v - u = \frac{a-1}{2} - b \geq 0$ i $\frac{u}{2}(2v - u + 1) = ab = r$. Ako je $b > \frac{a-1}{2}$, uzmimo $u = a$, $v = b + \frac{a-1}{2}$. Tada je $u \geq 3$, $v \geq 3$, $v - u = b - \frac{a-1}{2} - 1 \geq 0$ (jer je $b - \frac{a-1}{2}$ ceo broj koji je veći od nule) i $\frac{u}{2}(2v - u + 1) = ab = r$.

Obrnuto, ako važi tvrđenje (a), r je očigledno složen broj. Pretpostavimo, zato, da važi tvrđenje (b), tj. da je za neke $u, v \in \{3, 4, \dots\}$, $u \leq v$ i $r = \frac{u}{2}(2v - u + 1)$. Ako je u paran broj, $u = 2q$, tada je $r = q(2v - 2q + 1)$, pri čemu je $q > 1$ i $2v - 2q + 1 > 1$ (jer je $v \geq 2q$), pa je r složen broj. Ako je u neparan broj, $u = 2q + 1$, tada je $r = (2q + 1)(v - q)$, pri čemu je $2q + 1 > 1$ i $v - q > 1$ (jer je $v \geq 2q + 1$), pa je opet r složen broj. Time je tvrđenje zadatka dokazano.



Sl. 145.

78.3.3. Trouglovi OBC i TBC imaju zajedničku osnovicu BC, a visine su im proporcionalne dužima OA_1 i TA_1, sl. 145. Zato je

$$\frac{OA_1}{TA_1} = \frac{P_{OBC}}{P_{TBC}} = 3\frac{P_{OBC}}{P_{ABC}}.$$

Koristeći slične izraze za odnose OB_1/TB_1 i OC_1/TC_1 dobijamo

$$\frac{OA_1}{TA_1} \cdot \frac{OB_1}{TB_1} \cdot \frac{OC_1}{TC_1} = 27\frac{P_{OBC}}{P_{ABC}} \cdot \frac{P_{OCA}}{P_{ABC}} \cdot \frac{P_{OAB}}{P_{ABC}} \leq \left(\frac{P_{OBC} + P_{OCA} + P_{OAB}}{P_{ABC}}\right)^3 = 1,$$

što je i trebalo dokazati. Jednakost važi ako i samo ako se tačke O i T poklapaju.

78.3.4. Neka je A proizvoljna od datih tačaka. Krugu poluprečnika 1 sa centrom A može pripadati najviše 6 od datih tačaka, s obzirom da njihovo međusobno rastojanje ne može biti manje od 1. Dakle, svaka od datih tačaka može biti kraj najviše 6 duži dužine 1. Kako tačaka ima n, a na ovaj način svaku duž računamo dvaput, to ukupan broj duži dužine 1 nije veći od $\frac{6n}{2} = 3n$.

78.4.1. Datu jednačinu možemo napisati u obliku

$$k(x + y + 1) + y = n + 1,$$

odnosno $ka + b = n + 1$, pri čemu je $0 \leq b = y < x + y + 1 = a$. Obrnuto, svakom rešenju jednačine $ka + b = n + 1$, uz date uslove, odgovara tačno jedno

rešenje polazne jednačine. Dakle, treba naći ukupan broj trojki (k, a, b), gde su a i b nenegativni, a k pozitivan ceo broj, $k \leq n+1$, za koje važi $ka+b = n+1$ i $b < a$. Kako svakom $k \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$ odgovara tačno jedno predstavljanje broja $n+1$ u navedenom obliku (teorema o deljenju broja sa ostatkom), to je tražena suma jednaka $n+1$.

78.4.2. Pretpostavimo prvo da dati aritmetički niz ima podniz koji je geometrijski. Neka su $a+kd$, $a+ld$ i $a+md$ bilo koja tri uzastopna člana tog podniza. Tada važi $(a+ld)^2 = (a+kd)(a+md)$, odakle, zbog $d \neq 0$, sledi $a(2l-k-m) = d(km-l^2)$. Ako bi bilo $2l-k-m = 0$, sledilo bi $km - l^2 = km - \left(\frac{k+m}{2}\right)^2 = -\left(\frac{k-m}{2}\right)^2 < 0$, pa prethodna jednakost ne bi mogla da važi. Zato je $2l-k-m \neq 0$, pa dobijamo

$$\frac{a}{d} = \frac{km-l^2}{2l-k-m},$$

čime je dokazano da je a/d racionalan broj.

Pretpostavimo sada da je $a/d = p/q$ racionalan broj ($p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{N}$). Tada je

$$a_n = a + (n-1)d = \frac{p}{q}d + (n-1)d = \frac{p+(n-1)q}{q}d.$$

Odredimo prirodan broj x takav da je količnik

$$\frac{a_{n+x}}{a_n} = \frac{p+(n+x-1)q}{p+(n-1)q} = \alpha$$

veličina koja ne zavisi od n. Mora biti $x = \frac{(\alpha-1)(p+qn-q)}{q}$, tj. $q \mid \alpha - 1$. Ako stavimo $\alpha = q+1$, dobijamo $x = p-q+nq$ i važi

$$a_{p-q+n(q+1)} = (q+1)a_n,$$

gde je pretpostavljeno da je n dovoljno veliko, tako da je $p-q+n(q+1)$ prirodan broj. Sada izaberimo rastući niz prirodnih brojeva (n_k) $(k = 1, 2, \ldots)$ na sledeći način: broj n_1 se bira proizvoljno, tako da je $p-q+n_1(q+1)$ prirodan broj i da je $a_{n_1} \neq 0$; ako su brojevi $n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}$ već izabrani, biramo $n_k = p-q+n_{k-1}(q+1)$. Podniz (a_{n_k}) datog niza biće tada geometrijski. Zaista, važi

$$\frac{a_{n_k}}{a_{n_{k-1}}} = \frac{a_{p-q+n_{k-1}(q+1)}}{a_{n_{k-1}}} = \frac{(q+1)a_{n_{k-1}}}{a_{n_{k-1}}} = q+1, \quad k = 2, 3, \ldots.$$

78.4.3. Primetimo najpre da iz svojstva (1) sledi da važi:

$$a \in P, \quad k \in \mathbf{N} \Rightarrow ka \in P. \tag{3}$$

Dokažimo sada da P sadrži dva uzajamno prosta broja. Zbog (2), P je neprazan. Neka je $a \in P$ i neka je

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$$

njegova kanonska faktorizacija. Na osnovu (2), za svako $j = 1, 2, \ldots, r$, možemo naći broj $c_j \in P$ tako da p_j ne deli c_j. Posmatrajmo broj

$$b = \frac{ac_1}{p_1^{\alpha_1}} + \frac{ac_2}{p_2^{\alpha_2}} + \cdots + \frac{ac_r}{p_r^{\alpha_r}}.$$

Taj broj je ceo i nije deljiv nijednim od prostih faktora p_j broja a (zato što su u datom zbiru svi sabirci osim jednog deljivi sa p_j), pa su a i b uzajamno prosti. Iz (3) i $c_j \in P$ sledi da $ac_j/p_j^{\alpha_j} \in P$, pa iz (1) dobijamo $b \in P$. Time je dokazano da skup P sadrži uzajamno proste brojeve a i b.

Dokažimo sada tvrđenje zadatka, tako što ćemo dokazati da skup P sadrži sve prirodne brojeve n za koje je $n > ab$. Zaista, ako je n takav broj, zbog $(a, b) = 1$, jedan od (prirodnih) brojeva

$$n - a, \quad n - 2a, \quad \ldots, \quad n - ba$$

je deljiv sa b, pa postoje prirodni brojevi k i l, takvi da je $n = ka + lb$. Iz (3) i (1) sledi da $n \in P$, čime je tvrđenje zadatka dokazano.

78.4.4. Tvrđenje zadatka ćemo dokazati indukcijom po n. Za $n = 0$, polinom $P_0(x)$ je konstantan: $P_0(x) = c$. Ako tvrđenje ne bi važilo, bilo bi $|1 - c| < 1$ i $|a - c| < 1$, odakle bi sledilo $|a - 1| \leq |a - c| + |c - 1| < 1 + 1 = 2$, što je suprotno pretpostavci $a \geq 3$.

Pretpostavimo sada da je tvrđenje zadatka tačno za sve prirodne brojeve koji nisu veći od $n-1$ i dokažimo da je ono tačno i za proizvoljan polinom $P_n(x)$ stepena n. Posmatrajmo polinom $Q(x) = \dfrac{P_n(x+1) - P_n(x)}{a-1}$, koji je stepena manjeg od n i za koji tvrđenje zadatka, po pretpostavci, važi. Za svako $i = 0, 1, \ldots, n$ je

$$\begin{aligned}
|a^i - Q(i)| &= \frac{|a^{i+1} - a^i - P_n(i+1) + P_n(i)|}{a-1} \\
&\leq \frac{|a^{i+1} - P_n(i+1)|}{a-1} + \frac{|a^i - P_n(i)|}{a-1} \\
&\leq \frac{2}{a-1} \max_{0 \leq i \leq n+1} |a^i - P_n(i)| \\
&\leq \max_{0 \leq i \leq n+1} |a^i - P_n(i)|.
\end{aligned}$$

Kako je za neko i, $|a^i - Q(i)| \geq 1$, to sledi i da je $\max\limits_{0 \leq i \leq n+1} |a^i - P_n(i)| \geq 1$, što je i trebalo dokazati.

78.MO.1. Data jednačina ekvivalentna je sa

$$(2x^2+y)^2 = y^2+4y^{z+1}.$$

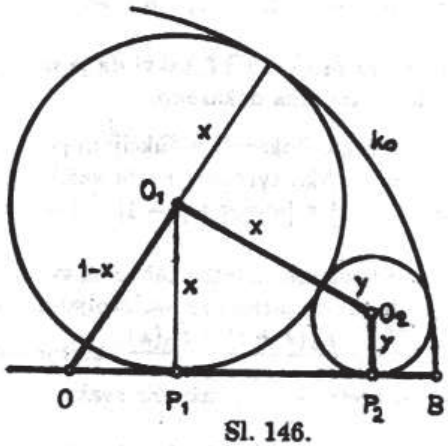
Lako se proverava da ona nema rešenja kod kojih je $z \le -1$. Za $z=0$ desna strana joj je jednaka $y^2+4y=(y+2)^2-4$, pa može biti kvadrat celog broja jedino za $y=0$ ili $y=-4$. Prva mogućnost daje rešenje $(0,0,0)$, a u drugom slučaju nema odgovarajućeg celobrojnog x.

Pretpostavimo sada da je $z \ge 1$. Napišimo jednačinu u obliku

$$(2x^2+y)^2 = y^2(1+4y^{z-1}).$$

Odatle sledi da $1+4y^{z-1}$ mora biti kvadrat celog broja. Taj broj mora biti neparan: $1+4y^{z-1}=(1+2v)^2$ $(v \ge 0)$, odakle dobijamo $y^{z-1}=v(v+1)$. To je mogućno za $v=0$, što daje rešenje $x=0$, $y=0$, kao i za $z=2$ i $y=v(v+1)$. Uvrštavanje u jednačinu daje $x^2=v^2(v+1)$, tako da v mora biti oblika $v=t^2-1$, $t \in \mathbb{Z}\setminus\{-1,0,1\}$ (vrednosti $-1,0,1$ smo isključili, jer ponovo daju trivijalno rešenje $x=0$). Direktna provera potvrđuje da $x=t^3-t$, $y=t^4-t^2$ za $z=2$ zadovoljavaju datu jednačinu.

Dakle, sve trojke (x,y,z) celih brojeva koje zadovoljavaju datu jednačinu su: $(0,0,z)$, $z \ge 0$ i $(t^3-t, t^4-t^2, 2)$, $t \in \mathbb{Z}\setminus\{-1,0,1\}$.



Sl. 146.

78.MO.2. Neka je O centar datog jediničnog polukruga k_0, O_1 i O_2 centri dvaju krugova koji dodiruju polukrug k_0, dodiruju duž AB u tačkama P_1 i P_2 i dodiruju se međusobno, a poluprečnici su im x i y, sl.146. Tada je

$$P_1P_2^2 = (x+y)^2-(x-y)^2 = 4xy,$$
$$OP_1^2 = OO_1^2 - O_1P_1^2 = (1-x)^2-x^2 = 1-2x, \quad OP_2^2 = 1-2y,$$

pa je $P_1P_2 = 2\sqrt{xy} = \sqrt{1-2y}-\sqrt{1-2x} = OP_2 - OP_1$. Odatle, posle dvostrukog kvadriranja i sređivanja, dobijamo $x^2+y^2+4x^2y^2-6xy+4x^2y+4xy^2=0$ ili, ako stavimo $1/x=a$, $1/y=b$,

$$a^2+b^2+4-6ab+4a+4b=0. \tag{1}$$

Ako je $a = 1/r_n$, onda dobijena kvadratna jednačina po b ima rešenja $1/r_{n+1}$ i $1/r_{n-1}$, pa iz Vietovih pravila sledi:

$$\text{a)} \quad \frac{1}{r_{n+1}} + \frac{1}{r_{n-1}} = \frac{6}{r_n} - 4, \quad n = 2, 3, \ldots,$$

$$\text{a')} \quad \frac{1}{r_{n+1}} \cdot \frac{1}{r_{n-1}} = \left(\frac{1}{r_n} + 2\right)^2, \quad n = 2, 3, \ldots.$$

Iz relacije (1) dobija se $r_2 = 1/4$. Odatle i iz a) i a') indukcijom sledi da je r_{2k} kvadrat parnog prirodnog broja, a r_{2k+1} dvostruki kvadrat neparnog prirodnog broja.

78.MO.3. Neka je $\mathcal{F}$ familija sa opisanim svojstvima koja ima najveći mogućan broj članova. Neka je, zatim, k najmanji broj elemenata koji ima neki član familije $\mathcal{F}$ i l broj članova familije $\mathcal{F}$ koji imaju po k elemenata. Dokazaćemo da ne može biti $k < \frac{n-1}{2}$.

Pretpostavimo da je $k < \frac{n-1}{2}$. Označimo sa $\mathcal{F}_1$ familiju podskupova datog skupa koju dobijamo kad iz familije $\mathcal{F}$ izbacimo svih l članova koji imaju po k elemenata, a umesto njih stavimo sve njihove nadskupove koji imaju po $k+1$ element (nijedan od njih nije bio član familije $\mathcal{F}$). Na taj način smo dobili bar $\frac{l(n-k)}{k+1}$ novih članova, jer svaki izbačeni član ima $n-k$ opisanih nadskupova, a svaki dodati se ponavlja najviše $k+1$ puta. Zbog $k < \frac{n-1}{2}$ je $\frac{l(n-k)}{k+1} > l$, pa sledi da familija $\mathcal{F}_1$ ima više članova od familije $\mathcal{F}$. Lako se proverava da i familija $\mathcal{F}_1$ ima osobinu da nijedan njen član nije podskup nekog drugog njenog člana. To je suprotno pretpostavljenoj maksimalnosti familije $\mathcal{F}$. Znači, najmanji broj k elemenata nekog člana familije $\mathcal{F}$ iznosi bar $\frac{n-1}{2}$.

Na sličan način se dokazuje da najveći broj elemenata nekog člana familije $\mathcal{F}$ iznosi najviše $\frac{n+1}{2}$. Dakle, familija $\mathcal{F}$ može sadržati samo podskupove n-točlanog skupa koji imaju $\frac{n-1}{2}$, $\frac{n}{2}$ ili $\frac{n+1}{2}$ elemenata.

Razmotrimo sada slučajeve parnog i neparnog n. Ako je n paran broj, $n = 2m$, iz prethodnog sledi da $\mathcal{F}$ može sadržati samo članove sa $m = \frac{n}{2}$ elemenata. S druge strane, familija svih m-članih podskupova datog skupa očigledno zadovoljava uslove zadatka, pa je u ovom slučaju zaista traženi maksimalan broj članova familije $\mathcal{F}$ jednak $\binom{n}{m} = \binom{n}{[n/2]}$. Ako je n neparan broj, $n = 2m+1$, familiji $\mathcal{F}$ mogu pripadati samo podskupovi datog skupa koji imaju m ili $m+1$ elemenata. Ako se ona sastoji od svih m-članih podskupova (ili od svih $(m+1)$-članih), broj njenih elemenata je

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{m+1} = \binom{n}{[n/2]}.$$

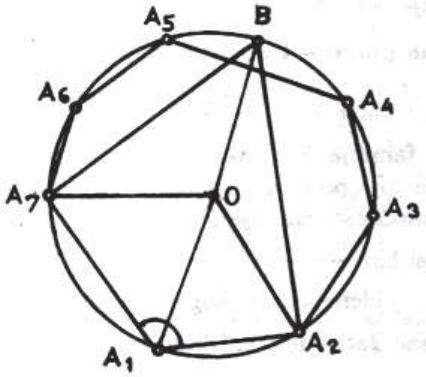
Kao u prvom delu zadatka dokazuje se da familija koja sadrži m–člane i $(m+1)$–člane podskupove, a zadovoljava uslove zadatka, ne može imati više od navedenog broja elemenata.

79.1.1. Kako je $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$ i $S_1 < S_2 < \cdots < S_{10}$, to je

$$S_1 = x_1 + x_2, \quad S_2 = x_1 + x_3, \quad \ldots, \quad S_9 = x_3 + x_5, \quad S_{10} = x_4 + x_5,$$
$$S_1 + S_2 + \cdots + S_{10} = 4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5),$$

pa dalje dobijamo $S_1 + S_{10} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$,

$$x_3 = \frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_{10}}{4} - S_1 - S_{10},$$
$$x_1 = S_2 - x_3 = S_1 + S_2 + S_{10} - \frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_{10}}{4},$$
$$x_2 = S_1 - x_1 = -S_2 - S_{10} + \frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_{10}}{4},$$
$$x_5 = S_9 - x_3 = S_1 + S_9 + S_{10} - \frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_{10}}{4},$$
$$x_4 = S_{10} - x_5 = -S_1 - S_9 + \frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_{10}}{4}.$$



Sl. 147.

79.1.2. Pretpostavimo da nikoja dva susedna ugla datog sedmougla nisu jednaki $120°$ i neka je, na primer,

$$\angle A_7A_1A_2 = \angle A_2A_3A_4 = \angle A_4A_5A_6 = 120°,$$

a B tačka dijametralno suprotna tački A_1, sl.147. Tada je $\angle A_1A_2B = \angle A_1A_7B = 90°$, pa dobijamo

$$\angle A_2BA_7 = 360° - 120° - 2 \cdot 90° = 60°.$$

Zato je $\angle A_2OA_7 = 120°$. Analogno dokazujemo

$$\angle A_2OA_4 = \angle A_4OA_6 = 120°,$$

pa na osnovu toga sledi $\angle A_6OA_7 = 0°$. Kontradikcija. Dakle, dva susedna ugla datog sedmougla jednaki su $120°$. Ne umanjujući opštost razmatranja možemo pretpostaviti $\angle A_7A_1A_2 = \angle A_1A_2A_3 = 120°$. Tada su duži A_2A_3 i A_1A_7 simetrične u odnosu na simetralu duži A_1A_2, pa sledi $A_2A_3 = A_1A_7$.

79.1.3. U dati krug smestimo kvadrat stranice 1. Taj kvadrat stranice 1 podelimo na n^2 jednakih kvadrata stranice $1/n$ i u svaki od tih kvadrata upišemo

krug. Zbir poluprečnika tih upisanih krugova je $n^2/2n$ i jednak je 1979, ako je $n = 2 \cdot 1979$.

79.1.4. Neka je x_n zbir cifara broja $n!$. Primetimo da je broj $n!$ deljiv sa 9, ako i samo ako je $n \geq 6$. Dalje dobijamo

$$6! = 720,\ x_6 = 9; \quad 7! = 5040,\ x_7 = 9;$$
$$8! = 40320,\ x_8 = 9; \quad 9! = 362880,\ x_9 = x_{10} > 9.$$

Neka je $n \geq 11$, $n! = \overline{a_k a_{k-1} \cdots a_2 a_1 a_0}$. Pretpostavimo da je

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k = 9. \tag{1}$$

Kako je za $n \geq 11$ broj $n!$ deljiv sa 11, to na osnovu kriterijuma deljivosti sa 11 dobijamo

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^k a_k = 11m, \tag{2}$$

gde je m ceo broj. Kako je

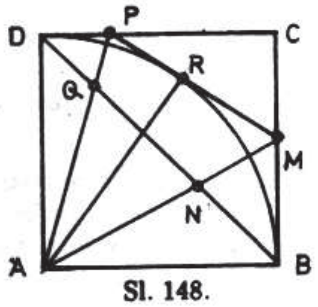
$$-9 = -(a_0 + a_1 + \cdots + a_k) \leq a_0 - a_1 + \cdots + (-1)^k a_k = 11m \leq a_0 + a_1 + \cdots + a_k = 9,$$

to sledi $m = 0$. Sabirajući jednakosti (1) i (2) dobijamo $2(a_0 + a_2 + a_4 + \ldots) = 9$, a to je kontradikcija. Traženi brojevi su 6, 7 i 8.

79.2.1. Neka je R dodirna tačka tangente MP i datog kruga, sl.148. Primetimo da su trouglovi AMB i AMR podudarni jer je

$$MB = MR, \quad \angle ARM = \angle ABM = 90^\circ.$$

Zato je $\angle RAM = \angle BAM = \frac{1}{2}\angle BAR$. Analogno dobijamo $\angle PAR = \frac{1}{2}\angle RAD$, pa dalje sledi



Sl. 148.

$$\angle PAN = \angle PAM = \angle PAR + \angle RAM = \frac{1}{2}\angle RAD + \frac{1}{2}\angle BAR = 45^\circ.$$

Kako je $\angle PDN = 45^\circ = \angle PAN$ i $\angle PDA = 90^\circ$, to tačke N, P, D, A pripadaju krugu sa prečnikom AP, pa je $\angle PNA = 90^\circ$. Dalje sledi $\angle PNM = 90^\circ$. Analogno dokazujemo $\angle MQP = 90^\circ$, a važi i $\angle PCM = 90^\circ$. Prema tome, tačke M, C, P, Q i N pripadaju krugu sa prečnikom PM.

79.2.2. Za $x \geq 3$ nejednakost je očigledna, a za $0 < x < 3$ ekvivalentna je nejednakosti $(x - y)(y + 1)^2(3 - x) \leq 4$, koja je tačna, jer, na osnovu nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine, za $0 \leq y < x < 3$ važi

$$(x - y)(y + 1)^2(3 - x) = \frac{1}{4}(y + 1)(y + 1)(2x - 2y)(6 - 2x)$$
$$\leq \frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}(y + 1 + y + 1 + 2x - 2y + 6 - 2x)\right]^4 = \frac{1}{4} \cdot 2^4 = 4.$$

79.2.3. Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_{1979}$ prirodni brojevi za koje važi

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_{1979}, \quad x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{1979}^2 = 2001.$$

Ne mogu svi ti brojevi biti veći od 1, jer je u suprotnom slučaju

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{1979}^2 \geq 1979 \cdot 2^2 > 2001.$$

Neka je $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_k > 1 = x_{k+1} = \cdots = x_{1979}$. Tada važi

$$kx_k^2 \leq x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2 = 2001 - 1979 + k = k + 22$$

i $4 \leq x_k^2 \leq 1 + 22/k$, odakle sledi $k \leq 7$. Kako je $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_7^2 = 29$, to x_1, x_2, $\ldots$, $x_7 \in \{1, 2, 3, 4\}$. (U protivnom je $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_7^2 \geq 5^2 + 6 = 31$.) Neka među brojevima $x_1, x_2, \ldots, x_7$ ima redom a, b, c, d jedinica, dvojki, trojki i četvorki. Tada je

$$a + b + c + d = 7, \quad a + 4b + 9c + 16d = 29,$$

pa sledi $22 = (a + 4b + 9c + 16d) - (a + b + c + d) = 3b + 8c + 15d$, $c \leq 2$ i $3 \mid 22 - 8c$. To je mogućno samo za $c = 2$. U tom slučaju je $15d + 3b = 6$, odakle sledi $d = 0$, $b = 2$, pa je $a = 7 - (b + c + d) = 3$. Lako se proverava da je

$$2001 = 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 2^2 + 1975 \cdot 1^2,$$

čime smo dokazali da postoji samo jedno razbijanje broja 2001 za koje važe dati uslovi.

79.2.4. Prvo primetimo sledeće: kako su m i n uzajamno prosti brojevi, to se pri deljenju brojeva $n, 2n, 3n, \ldots, mn$ sa m dobijaju svi mogućni ostaci $0, 1, 2, \ldots, m-1$. Neka je $l \in \{1, 2, \ldots, m\}$ broj za koji se pri deljenju ln sa m dobija količnik s i ostatak $k - 1 \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$, tj. $ln = sm + k - 1$. Tada je

$$(l + s)m + k = 1 + l(m + n). \tag{1}$$

Neka je dat niz mesta numerisanih brojevima $1, 2, 3, \ldots$ i neka se kuglice nalaze na mestima označenim brojevima $1, 2, \ldots, m + n$. U prvom koraku se kuglice koje se nalaze na mestima $1, 2, \ldots, m$ premeštaju redom na mesta $m+n+1$, $m+n+2$, $\ldots$, $2m+n$. U drugom koraku se kuglice koje se nalaze na mestima $m+1, m+2, \ldots, 2m$ premeštaju redom na mesta $2m + n + 1$, $2m + n + 2$, $\ldots$, $3m + n$ itd. Kuglica koja je bila na prvom mestu pojavljuje se na mestima

$$1, \quad 1 + m + n, \quad 1 + 2(m + n), \quad 1 + 3(m + n), \quad \ldots,$$

a početak niza kuglica je na mestima 1, $1 + m$, $1 + 2m$, $1 + 3m$, $\ldots$. Na osnovu jednakosti (1) dobijamo da se posle $l + s$ koraka početak niza kuglica nalazi na mestu $(l + s)m + 1$, a kuglica koja je na početku bila na mestu 1 nalazi se na mestu sa rednim brojem $(l + s)m + k$, tj. na k-tom mestu u nizu kuglica.

79.3.1. Kako je $P(1) = 1 + a_1 + \cdots + a_n$ i $P(-1) = (-1)^n + (-1)^{n-1}a_1 + (-1)^{n-2}a_2 + \cdots + a_n$ i kako su $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots$ i $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots$ realni brojevi, to su i $P(1)$ i $P(-1)$ realni brojevi. Dalje je

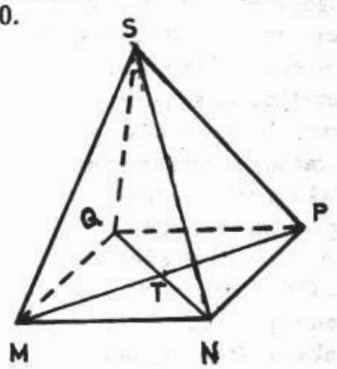
$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n), \quad Q(x) = (x - x_1^2)(x - x_2^2)\cdots(x - x_n^2),$$

pa sledi

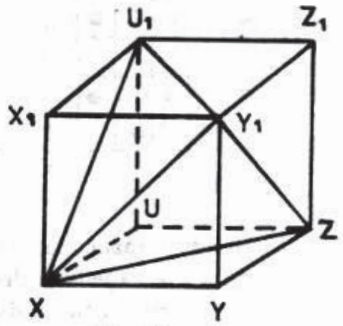
$$\begin{aligned} 1 + b_1 + b_2 + \cdots + b_n = Q(1) &= (1 - x_1^2)(1 - x_2^2)\cdots(1 - x_n^2) \\ &= (1 - x_1)(1 - x_2)\cdots(1 - x_n)(1 + x_1)(1 + x_2)\cdots(1 + x_n) \\ &= (-1)^n P(1)P(-1). \end{aligned}$$

Prema tome, $Q(1)$ je realan broj, pa je i $b_1 + b_2 + \cdots + b_n = Q(1) - 1$ realan broj.

79.3.2. Neka je $ABCD$ pravilan tetraedar ivice a, $SMNPQ$ pravilna piramida sa vrhom S i ivicom a, sl.149. i neka je $XYZUX_1Y_1Z_1U_1$ kocka ivice $a/\sqrt{2}$, sl.150.



Sl. 149.



Sl. 150.

Neka je T presek dijagonala kvadrata $MNPQ$. Tada je

$$MT = NT = PT = QT = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad ST = \sqrt{SM^2 - MT^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Prema tome, ravni SMP i SQN dele piramidu $SMNPQ$ na četiri trostrane piramide, od kojih svaka ima sva tri prava ivična ugla kod jednog temena i sve ivice koje polaze iz tog temena jednake $a/\sqrt{2}$. Dovoljno je još primetiti da ravni XY_1Z, XY_1U_1, XZU_1 i ZY_1U_1 dele kocku na pravilan tetraedar XZY_1U_1 čija je ivica jednaka a i piramide $YXZY_1$, $X_1XY_1U_1$, $UXZU_1$ i $Z_1ZU_1Y_1$ (prvo označeno teme je vrh), kod kojih su svi ivični uglovi pri vrhu pravi, a sve ivice koje polaze iz vrha jednake $a/\sqrt{2}$.

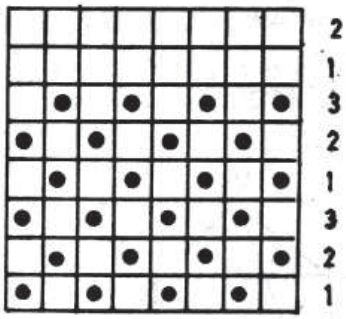
79.3.3. Neka je $z_j = x_j + iy_j$, $x_j, y_j \in \mathbb{R}$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Označimo

$$S_1 = \{j \mid x_j \geq 0, y_j \geq 0\}, \quad S_2 = \{j \mid x_j < 0, y_j \geq 0\},$$
$$S_3 = \{j \mid x_j < 0, y_j < 0\}, \quad S_4 = \{j \mid x_j \geq 0, y_j < 0\}.$$

Tada je $\sum_{j=1}^{n} |z_j| = \sum_{k=1}^{4} \sum_{j \in S_k} |z_j|$, pa sledi da za neki broj $k \in \{1,2,3,4\}$ važi nejednakost $\sum_{j \in S_k} |z_j| \geq \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n} |z_j|$. Za taj broj k dobijamo

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} \sum_{j=1}^{n} |z_j| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j \in S_k} |z_j| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j \in S_k} |x_j + iy_j| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j \in S_k} (|x_j| + |y_j|)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| \sum_{j \in S_k} x_j \right| + \left| \sum_{j \in S_k} y_j \right| \right) \leq \frac{2}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\left| \sum_{j \in S_k} x_j \right|^2 + \left| \sum_{j \in S_k} y_j \right|^2 \right)} = \left| \sum_{j \in S_k} z_j \right|.$$



Sl. 151.

79.3.4. Horizontalne redove šahovske table podelimo na tri klase, tako da prvoj klasi pripadaju prvi, četvrti i sedmi red, drugoj klasi – drugi, peti i osmi red i trećoj klasi – treći i šesti red, sl.151. Na početku se u svakoj klasi nalazi po osam pešaka. Primetimo da se posle svakog poteza menja parnost broja pešaka u svakoj klasi. Zaista, u svakom potezu menja se za jedan broj pešaka u tri susedna reda (sa prvog i drugog od tih redova skida se po jedan pešak, a na treći red se stavlja jedan pešak), a tri susedna reda pripadaju različitim klasama. Osim toga, posle svakog poteza ukupan broj pešaka smanjuje se za jedan. Prema tome, posle 22 odigrana poteza (ukoliko je to moguće) na tabli ostaju tačno dva pešaka i pošto su brojevi pešaka u različitim klasama iste parnosti, to su oba pešaka u istoj klasi. To međutim znači da sledeći potez nije moguće, jer se pešaci ne nalaze u susednim redovima.

79.4.1. Pretpostavimo da za prirodne brojeve $p > 5$ i n važi

$$(p-1)! + 1 = p^n.$$

Tada su p i $(p-1)!$ uzajamno prosti brojevi, odakle sledi da je p prost broj. Dalje je

$$(p-2)! = \frac{(p-1)!}{p-1} = \frac{p^n - 1}{p-1} = p^{n-1} + p^{n-2} + \cdots + p + 1.$$

Kako za $p > 5$ važi $2 < \frac{p-1}{2} \leq p-2$, a $\frac{p-1}{2}$ je ceo broj, jer je p neparan prost broj, to su brojevi 2 i $\frac{p-1}{2}$ delioci broja $(p-2)!$. Prema tome, i broj $2 \cdot \frac{p-1}{2} = p-1$ je delilac broja $(p-2)!$. Kako je

$$\begin{aligned}(p-2)! &= p^{n-1} + p^{n-2} + \cdots + p + 1 \\ &= (p-1+1)^{n-1} + (p-1+1)^{n-2} + \cdots + (p-1+1) + 1 \\ &\equiv n \pmod{p-1},\end{aligned}$$

to je i broj n deljiv sa $p-1$. Zato je $p-1 \le n$, tj. $p-2 \le n-1$, pa dalje dobijamo $(p-1)!+1 < p^{p-2}+1 \le p^{n-1}+1 < p^n$, a to je suprotno uvedenoj pretpostavci.

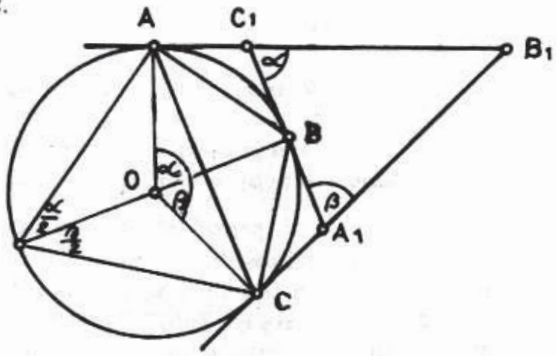
79.4.2. Odgovor je potvrdan u sva tri slučaja. U dokazu ćemo koristiti činjenicu da je e iracionalan i transcendentan broj (tj. nije nula nijednog polinoma sa celim koeficijentima). Dokažimo prvo da $\ln 2 \notin \mathbf{Q}$. Pretpostavimo suprotno, tj. $\ln 2 = \frac{p}{q}$, gde su p i q prirodni brojevi. Tada je $e^{p/q} = 2$, tj. $e^p = 2^q$, što nije mogućno. Dalje slede primeri:

a) $a = e \notin \mathbf{Q}$, $b = \ln 2 \notin \mathbf{Q}$, $a^b = e^{\ln 2} = 2 \in \mathbf{Q}$.

b) $a = e \notin \mathbf{Q}$, $b = \frac{1}{2}\ln 2 \notin \mathbf{Q}$, $a^b = e^{\ln\sqrt{2}} = \sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.

c) $a = 2 \in \mathbf{Q}$, $b = \log_2 e = \frac{1}{\ln 2} \notin \mathbf{Q}$, $a^b = e \notin \mathbf{Q}$.

79.4.3. Neka je $A_1B_1C_1$ trougao određen tangentama na krug u tačkama A, B i C, neka je B na kraćem luku AC, O centar datog kruga i $r = OA$, $\alpha = \angle AOB$, $\beta = \angle BOC$, sl.152.



Sl. 152.

Tada je $C_1A = C_1B = r\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$, $A_1C = A_1B = r\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2}$, pa sledi

$$A_1C_1 = C_1B + A_1B = r\left(\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} + \mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2}\right) = r\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}.$$

Kako je $AB = 2r\sin\frac{\alpha}{2}$, $BC = 2r\sin\frac{\beta}{2}$ i $\angle ABC = \pi - \frac{\alpha+\beta}{2}$, to je

$$P = \frac{1}{2}AB\cdot BC\sin\angle ABC = 2r^2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Dalje je $\angle A_1C_1B_1 = \angle BOC = \alpha$ i $\angle C_1A_1B_1 = \angle BOC = \beta$ (kao uglovi sa normalnim kracima) i $\angle A_1BC_1 = \pi - \alpha - \beta$, pa sledi

$$A_1B_1 = A_1C_1\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}, \quad B_1C_1 = A_1C_1\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)},$$

$$P_1 = \frac{1}{2}A_1B_1\cdot B_1C_1\sin\angle A_1B_1C_1 = r^2\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Konačno dobijamo

$$\frac{P_1}{P} = \frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Ako $B \to A$ i $C \to A$, onda $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$, pa sledi $\frac{P_1}{P} \to \frac{1}{2}$.

79.MO.1. Neka je $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ i $A_n = a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3$, gde su a_1, $a_2, \ldots, a_n$ različiti prirodni brojevi, za koje, na primer, važi $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Nejednakost $S_n^2 \leq A_n$ dokazujemo matematičkom indukcijom po n.

Za $n = 1$ važi $S_1^2 = a_1^2 \leq a_1^3 = A_1$. Pretpostavimo da je $S_k^2 \leq A_k$. Kako je $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_k < a_{k+1}$, to je

$$\begin{aligned} 2S_k &= 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) \leq 2[1 + 2 + \cdots + (a_{k+1} - 2) + (a_{k+1} - 1)] \\ &= (a_{k+1} - 1)a_{k+1} = a_{k+1}^2 - a_{k+1}, \end{aligned}$$

pa dalje sledi $2S_k a_{k+1} + a_{k+1}^2 \leq a_{k+1}^3$ i

$$S_{k+1}^2 = (S_k + a_{k+1})^2 = S_k^2 + 2S_k a_{k+1} + a_{k+1}^2 \leq A_k + a_{k+1}^3 = A_{k+1}.$$

Jednakost $S_n^2 = A_n$ važi ako i samo ako je $a_1 = 1$ i za svako $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ važi $a_k + 1 = a_{k+1}$, tj. ako i samo ako je $a_1 = 1$, $a_2 = 2, \ldots, a_n = n$.

79.MO.2. Neka je S skup svih prirodnih brojeva za koje važe navedeni uslovi. Ako je $n \in S$ i $p^2 < n$, gde je p prost broj, onda n i p^2 nisu uzajamno prosti brojevi, jer p^2 nije prost broj. Prema tome $p \mid n$. Ako je $n > 49$ i $n \in S$, onda je svaki od brojeva $2, 3, 5, 7$ delilac broja n. Zato je $n \geq 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210 > 11^2$, pa i $11 \mid n$. Dalje sledi $n \geq 210 \cdot 11 = 2310 > 1979$, a to je kontradikcija. Zato je $S \subset \{2, 3, 4, \ldots, 49\}$.

a) Neka je $n > 25$. Tada $n \in S$, ako i samo ako je broj n deljiv sa $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Takav je samo broj 30.

b) Neka je $9 < n \leq 25$. Tada $n \in S$, ako i samo ako je broj n deljiv sa $2 \cdot 3 = 6$. To važi za brojeve 12, 18 i 24.

c) Neka je $4 < n \leq 9$. Tada $n \in S$, ako i samo ako je n paran broj. Dakle $6 \in S$, $8 \in S$.

d) Lako se proverava da svaki od brojeva 2, 3 i 4 pripada skupu S.

Prema tome, $S = \{2, 3, 4, 6, 8, 12, 18, 24, 30\}$.

79.MO.3. Fiksirajmo drugi krug, zatim na njega postavimo prvi krug i rotirajmo ga oko centra. Pretpostavimo da fiksirana tačka A prvog kruga „zapisuje trag" na drugom krugu, ako bilo koja od označenih tačaka pripada bilo kom od označenih lukova. Posle rotacije prvog kruga za 360° ukupna dužina „traga" biće manja od $1979 \cdot 1 = 1979$. Prema tome, na drugom krugu postoji tačka X koja ne pripada „tragu". U trenutku poklapanja tačaka A i X nijedna od označenih tačaka ne pripada nijednom od označenih lukova.

80.1.1. Neka je x cena olovke (u parama). Tada iz $1100 < 9x < 1200$ sledi $122 < x \leq 133$, a iz $1500 < 13x < 1600$ sledi $115 < x \leq 123$, pa, kako je x ceo broj, mora biti $x = 123$.

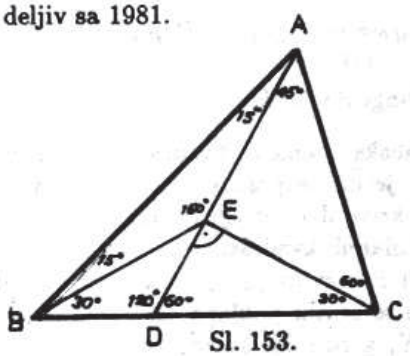
80.1.2. Posmatrajmo brojeve iz datog skupa koji su oblika

$$12\ldots9012\ldots90\ldots12\ldots90.$$

Takvih brojeva ima beskonačno mnogo, a kako mogućnih ostataka pri deljenju sa 1981 ima konačno mnogo, to postoje dva broja navedenog oblika koji daju isti ostatak pri deljenju sa 1981. Razlika ta dva broja je deljiva sa 1981. Međutim ona je oblika

$$12\ldots90\ldots12\ldots9000\ldots00,$$

tj. jednaka je nekom broju A navedenog oblika, pomnoženom nekim stepenom broja 10. Kako su svi stepeni broja 10 uzajamno prosti sa 1981, to odatle sledi da je broj A deljiv sa 1981.



Sl. 153.

80.1.3. Označimo sa E podnožje normale iz C na pravu AD, sl.153. Tada je $2\,ED = DC$, pa iz $2\,BD = DC$ sledi $ED = BD$. U jednakokrakom trouglu BDE je ugao pri vrhu 120°, pa je

$$\angle EBD = \angle DEB = 30^\circ, \quad \angle ABE = 15^\circ.$$

Trougao EBC ima jednake uglove kod B i C (po 30°), pa je $EB = CE$. Trougao ABE ima jednake uglove kod A i B (po 15°), pa je $BE = EA$. Dakle je $CE = EA$, pa je trougao CEA jednakokrako-pravougli i ima oštre uglove po 45°. Odatle lako sledi da je $\angle BCA = 75^\circ$ i $\angle CAB = 60^\circ$.

80.1.4. Pođimo iz proizvoljne raskrsnice trasom autobuske linije. U prvoj ulici zasadimo jednu vrstu drveta (na primer kesten), posle prolaska kroz raskrsnicu u drugoj ulici zasadimo drugu vrstu drveta (na primer brezu), zatim opet kesten i tako naizmenično. Kako je 1980 paran broj, u poslednjoj ulici pre povratka u početnu raskrsnicu biće zasađena breza. U svim ulicama kroz koje ne prolazi autobus treba zatim zasaditi preostalu vrstu drveta (dakle lipu). Jasno je da ovako zasađeno drveće zadovoljava uslove zadatka.

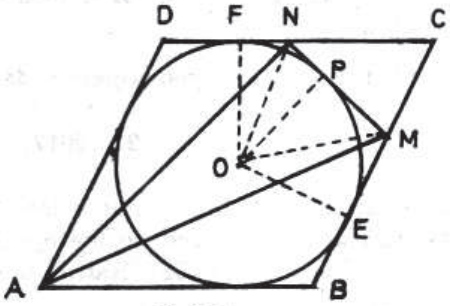
80.2.1. Treba naći celobrojna rešenja jednačine $x^2 + 3x + 24 = y^2$. Ona je ekvivalentna sa $(2x+3)^2 + 87 = 4y^2$, odnosno

$$(2y + 2x + 3)(2y - 2x - 3) = 3 \cdot 29.$$

Dakle, dolaze u obzir mogućnosti $2x + 2y + 3 = \pm1, \pm3, \pm29, \pm87$ i njima odgovarajuće vrednosti za $2y - 2x - 3$. Rešavanjem tih sistema jednačina dobijaju se

vrednosti $-23, -8, 5, 20$ za x. Neposredno se proverava da one zaista zadovoljavaju uslove zadatka.

80.2.2. Neka je O centar kruga upisanog u dati romb, E i F, redom, tačke u kojima taj krug dodiruje stranice BC i CD, a P tačka u kojoj on dodiruje pravu MN, sl.154. Jasno je da su trouglovi ONF i ONP podudarni. S druge strane, trouglovi ONF i ANF imaju zajedničku osnovicu NF i prvi ima dvostruko manju visinu. Na osnovu toga sledi da je $P_{ANF} = 2P_{ONF} = P_{OPNF}$. Iz sličnih razloga je $P_{AEM} = 2P_{OEM} = P_{OEMP}$. Sledi da je

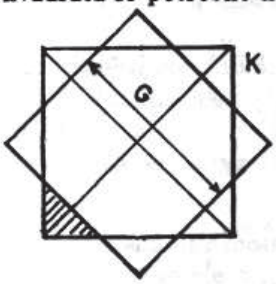


Sl. 154.

$$P_{AMN} = P_{AEMNF} - P_{AEM} - P_{ANF} = P_{AEMNF} - P_{OEMP} - P_{OPNF} = P_{AEOF},$$

a poslednja površina očigledno ne zavisi od tangente MN.

80.2.3. a) Uočimo sledećih devet tačaka: temena kvadrata K, središta njegovih stranica i presek dijagonala. Jasno je da ne postoji kvadrat stranice 3 koji zadovoljava uslove paralelnosti i koji pokriva dve od tih tačaka. Zato je za pokrivanje kvadrata K potrebno najmanje 9 manjih kvadrata.



Sl. 155.

b) Postavimo kvadrat stranice 6 tako da mu se centar poklapa sa centrom kvadrata K, a stranice su mu paralelne njegovim dijagonalama, sl.155. Lako se dokazuje da je stranica svakog od jednakokrakopravouglih trouglova koji nisu pokriveni tim kvadratom jednaka $7-3\sqrt{2}$, dakle manja od 3, pa se svaki od tih trouglova može prekriti jednim od preostala 4 kvadrata stranice 3.

80.2.4. Formirajmo $19 \cdot 21 = 399$ razlika oblika $a_i - b_p$, $i = 1, \ldots, 19$, $p = 1, \ldots, 21$. Sve su one celi brojevi u segmentu $[-199, 199]$, dakle mogu imati najviše 399 različitih vrednosti. Postoje sledeće dve mogućnosti:

1° Sve te razlike su međusobno različite. Tada za neke $i, j \in \{1, \ldots, 19\}$ i neke $p, q \in \{1, \ldots, 21\}$ važi $a_i - b_p = -199$, $a_j - b_q = 199$, tj. $a_i = b_q = 1$ i $a_j = b_p = 200$. Jasno je da pri tome važi $a_i < a_j$, $b_q < b_p$ i $a_j - a_i = b_p - b_q$.

2° Neka su dve od tih razlika jednake: $a_i - b_p = a_j - b_q$. Tada je $a_j - a_i = b_q - b_p$, pri čemu je ili $a_i < a_j$ i $b_p < b_q$ ili $a_j < a_i$ i $b_q < b_p$.

80.3.1. Neposredno se proverava da među brojevima $1, 2, \ldots, 6$ samo 1 i 5 zadovoljavaju datu jednačinu. Pretpostavimo da je neki prirodan broj $x > 6$ rešenje. Jasno je da je x neparan broj, $x = 2k + 1$ $(k \geq 3)$. Zamenom u jednačinu

dobijamo $(2k+1)^{4-2k} = (5-2k)^{-2k}$ ili, na drugi način zapisano

$$\left(1+\frac{6}{2k-5}\right)^{k-2} = (2k-5)^2.$$

Dakle broj $6/(2k-5)$ mora biti ceo, odnosno mora da važi $2k-5 \in \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6\}$. Vrednosti ±2 i ±6, kao parne, otpadaju, a vrednosti -1 i -3 daju $2k+1 < 7$. Preostaju mogućnosti $2k+1 = 7$ i $2k+1 = 9$. Provera pokazuje da prva mogućnost daje rešenje, a druga ne.

Rešenja date jednačine su $x = 1$, $x = 5$ i $x = 9$.

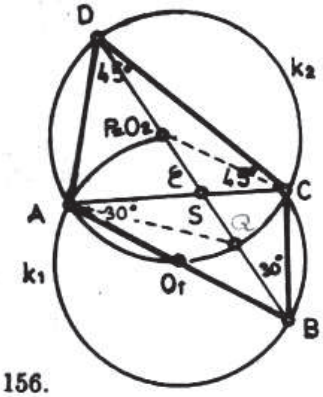
80.3.2. Pretpostavimo, suprotno tvrđenju zadatka, da ne postoje tri među datim dužima od kojih se može konstruisati trougao. Tada za svako $i = 1, 2, \ldots, 16$ važi $x_i + x_{i+1} \leq x_{i+2}$. Odatle sledi

$$\begin{aligned} x_{18} &\geq x_{17} + x_{16} \geq (x_{16} + x_{15}) + x_{16} = 2x_{16} + x_{15} \\ &\geq 2(x_{15} + x_{14}) + x_{15} = 3x_{15} + 2x_{14} \\ &\geq 3(x_{14} + x_{13}) + 2x_{14} = 5x_{14} + 3x_{13} \\ &\geq 5(x_{13} + x_{12}) + 3x_{13} = 8x_{13} + 5x_{12} \\ &\geq \cdots \geq 1597x_2 + 987x_1 \geq 2584, \end{aligned}$$

što je suprotno pretpostavci $x_{18} \leq 1980$. Ova kontradikcija dokazuje tvrđenje zadatka.

80.3.3. Pretpostavimo, zbog određenosti, da je ugao $ASD = \varphi$ oštar, sl.156. Slučaj kada on nije oštar razmatra se analogno. Taj ugao je spoljašni za trouglove SCD i SAB, pa se lako izvodi

$$\varphi = \angle CDA = \angle ABC.$$



Sl. 156.

Dakle, tačke B i D pripadaju lukovima krugova k_1 i k_2 jednakih poluprečnika (recimo r) koji su geometrijska mesta tačaka iz kojih se duž AC vidi pod uglom φ. Označimo centre tih krugova sa O_1 i O_2, a preseke duži BD (različite od B i D) sa krugovima k_1 i k_2 redom, sa P i Q, sl.156.

Kako je $\angle AQD = \angle ACD = 45°$ i $\angle QDA = 45°$, to je AQD jednakokrako-pravougli trougao i centar O_2 njemu opisanog kruga k_2 je središte njegove hipotenuze DQ. Dalje je $\angle BPC = \angle BAC = 30°$ i $\angle PBC = 30°$, pa je trougao BCP jednakokrak i $\angle BCP = 120°$, što znači da je $BC = CP = r$. Kako je, dakle, $CP = CO_2$ i $O_2 \in BD$, to je $P = O_2$. Dalje je $\angle CO_2A = 120°$ i $\angle CDA = 60°$, pa je i $\varphi = 60°$.

80.3.4. Odredimo polinome sa opisanim svojstvima kod kojih je $a_n = 1$. Ostale ćemo dobiti množenjem nađenih sa -1. Za $n = 1$ takvi polinomi su $x - 1$ i $x + 1$. Pretpostavimo da je $n \geq 2$.

Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ realne nule traženog polinoma. Na osnovu Vietovih pravila je $(x_1 x_2 \cdots x_n)^2 = a_0^2 = 1$ i

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - 2\sum_{i \neq j} x_i x_j = a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} = 1 - 2a_{n-2},$$

odakle zbog $a_{n-2} \in \{-1, 1\}$, sledi $a_{n-2} = -1$ i $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 3$. Primenjujući nejednakost između sredina na nenegativne brojeve $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2$ dobijamo

$$\frac{3}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq \left(\prod_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/n} = 1,$$

odakle sledi $n \leq 3$.

Za $n = 2$ lako se proverava da oba polinoma koji zadovoljavaju dobijene uslove (to su $x^2 + x - 1$ i $x^2 - x - 1$) imaju sve nule realne. Za $n = 3$ dobijene uslove zadovoljavaju polinomi

$$x^3 + x^2 - x - 1, \quad x^3 - x^2 - x + 1, \quad x^3 + x^2 - x + 1, \quad x^3 - x^2 - x - 1.$$

Od njih prva dva imaju sve tri nule realne. Čitaocu prepuštamo da dokaže da poslednja dva imaju po par kompleksnih nula.

Svi polinomi koji zadovoljavaju uslove zadatka su

$$\pm(x-1), \pm(x+1), \pm(x^2+x-1), \pm(x^2-x-1), \pm(x^3+x^2-x-1), \pm(x^3-x^2-x+1).$$

80.4.1. Pretpostavimo prvo da tačke elipse kojima odgovaraju parametri t_1, t_2, t_3, t_4 pripadaju nekom krugu. Neka je

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

jednačina tog kruga, gde su A, B, C realni brojevi i $A^2 + B^2 - 4AC > 0$. Zamenjujući $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ i stavljajući $u = \operatorname{tg}\frac{t}{2}$, posle sređivanja tu jednačinu transformišemo u oblik

$$(a^2 - aA + C)u^4 + 2bBu^3 + (2C - 2a^2 + 4b^2)u^2 + 2bBu + (a^2 + aA + C) = 0, \quad (1)$$

pri čemu za rešenja u_1, u_2, u_3, u_4 dobijene jednačine važi $u_i = \operatorname{tg}(t_i/2)$, $(i = 1, 2, 3, 4)$. Označimo

$$\begin{aligned}
D_1 &= u_1 + u_2 + u_3 + u_4,\\
D_2 &= u_1u_2 + u_1u_3 + u_1u_4 + u_2u_3 + u_2u_4 + u_3u_4,\\
D_3 &= u_1u_2u_3 + u_1u_2u_4 + u_1u_3u_4 + u_2u_3u_4,\\
D_4 &= u_1u_2u_3u_4.
\end{aligned}$$

Kako jednačina (1) ima jednake koeficijente uz u^3 i u, na osnovu Vietovih pravila dobijamo da je $D_1 = D_3$. Primenjujući adicione formule dobijamo

$$\operatorname{tg}\frac{t_1+t_2+t_3+t_4}{2} = \frac{D_1 - D_3}{1 - D_2 + D_4} = 0,$$

odakle je

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 2k\pi \tag{2}$$

za neko $k \in \mathbb{Z}$.

Pretpostavimo sada da za neko $k \in \mathbb{Z}$ važi (2), pri čemu možemo pretpostaviti da $t_i \in [0, 2\pi)$ za $i = 1, 2, 3, 4$. Neka krug, određen tačkama čiji su parametri t_1, t_2, t_3, seče elipsu još u tački kojoj odgovara parametar $t_4' \in [0, 2\pi)$. Tada iz prvog dela dokaza sledi

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4' = 2k'\pi \tag{3}$$

za neko $k' \in \mathbb{Z}$. Iz (2) i (3) sledi $t_4 - t_4' = 2(k - k')\pi$, odakle je, zbog $t_4, t_4' \in [0, 2\pi)$, $k = k'$ i $t_4 = t_4'$. Dakle, tačke elipse kojima odgovaraju parametri t_1, t_2, t_3, t_4 pripadaju jednom krugu.

80.4.2. Označimo elemente datog skupa S sa $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tako da je $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Dokazaćemo da postoji $k(n-k)+1$ elemenata $y_i \in T$ $(i = 0, 1, \ldots, k(n-k))$ koji čine strogo rastući niz, čime će biti dokazano tvrđenje zadatka.

Stavimo najpre $y_0 = x_1 + x_2 + \cdots + x_k$; zatim

$$y_1 = y_0 + x_{k+1} - x_k > y_0, \quad y_2 = y_1 + x_k - x_{k-1} > y_1, \quad \ldots,$$
$$y_k = y_{k-1} + x_2 - x_1 > y_{k-1};$$
$$y_{k+1} = y_k + x_{k+2} - x_{k+1} > y_k, \quad y_{k+2} = y_{k+1} + x_{k+1} - x_k > y_{k+1}, \quad \ldots,$$
$$y_{2k} = y_{2k-1} + x_3 - x_2 > y_{2k-1}$$

i tako dalje. Poslednji element u $(n-k)$-toj grupi biće

$$y_{(n-k)k} = y_{(n-k)k-1} + x_{n-k+1} - x_{n-k} > y_{(n-k)k-1}.$$

80.4.3. Za proizvoljno n neka je $a_n = 10A + c_0$. Tada je, prema definiciji, $a_{n+1} = A + 2c_0$. Odatle sledi da je $2a_n - a_{n+1} = 19A$, tj. važi:

1° $19 \mid a_n$, ako i samo ako $19 \mid a_{n+1}$.

Takođe, važi $a_n - a_{n+1} = 9A - c_0$. Zato je za $A \geq 1$, $a_n - a_{n+1} \geq 0$, pri čemu jednakost važi ako i samo ako je $A = 1$ i $c_0 = 9$. Drugim rečima:

2° Ako je $a_n \geq 10$ i $a_n \neq 19$, onda je $a_n > a_{n+1}$.

Iz 2° sledi da niz (a_n) strogo opada, dok neki njegov član ne postane manji od 20. Ako je taj član jednak 19 (a to će se na osnovu 1° dogoditi ako i samo ako $19 \mid a_0$) i svi sledeći članovi biće jednaki 19. Ako je taj član manji od 19, niz dalje postaje periodičan sa periodom 18 u kojoj se pojavljuju svi brojevi skupa $\{1, 2, \ldots, 18\}$ (proveriti!).

Dakle, ako $19 \mid a$ u nizu (a_n) se beskonačno mnogo puta pojavljuje samo broj 19, a ako a nije deljivo sa 19, onda se u tom nizu beskonačno mnogo puta pojavljuju (samo) brojevi $1, 2, \ldots, 18$.

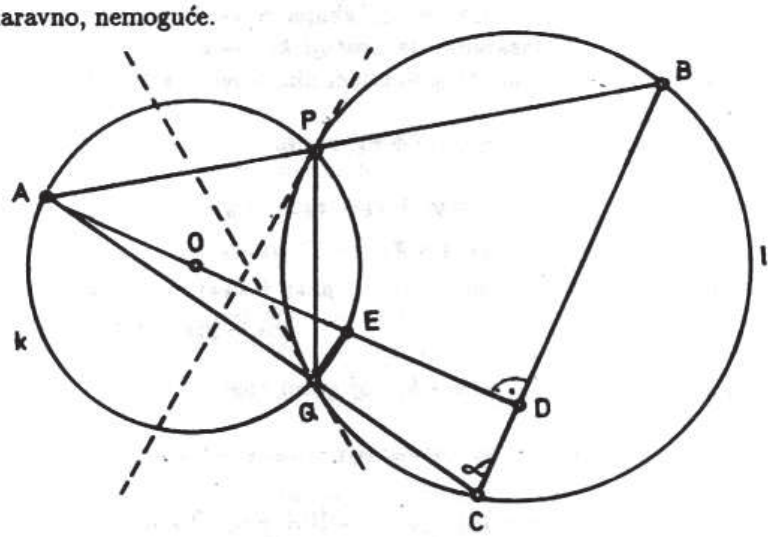
80.4.4. Prema pretpostavci, postoje brojevi $a, b \in [0,1]$, takvi da je $f(a) = 0$, $f(b) = 1$. Stavljajući $x = a$ i $y = b$ u datu nejednakost, dobijamo $2 = 2|f(a) - f(b)| \leq |a - 0| + |b - 1|$, odakle sledi $a = 1, b = 0$, tj. $f(1) = 0$ i $f(0) = 1$.

Dokažimo sada da je $f(1/2) = 1/2$. Pretpostavimo da to nije tačno. Tada je ili $f(1/2) > 1/2$ ili $f(1/2) < 1/2$. Ako bi bilo $f(1/2) > 1/2$, stavljajući $x = 1/2$ i $y = 1$ u datu nejednakost, dobili bismo $2|f(1/2) - 0| \leq |1/2 - f(1/2)| + 1$, ili, posle sređivanja, $f(1/2) \leq 1/2$. Slično bismo iz $f(1/2) < 1/2$, korišćenjem date nejednakosti za $x = 1/2$ i $y = 0$, dobili $f(1/2) \geq 1/2$. Dakle obe mogućnosti otpadaju, tj. važi $f(1/2) = 1/2$.

Dokažimo da za $x \neq 1/2$ ne važi $f(x) = x$. Ako bi za neko $x \neq 1/2$ to važilo, imali bismo

$$0 < 2\left|x - \frac{1}{2}\right| = 2\left|f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leq |x - f(x)| + \left|\frac{1}{2} - f\left(\frac{1}{2}\right)\right| = 0,$$

što je, naravno, nemoguće.



Sl. 157.

80.MO.1. Dokazaćemo da svaka prava određena visinom nekog trougla ABC sadrži centar O kruga k.

Konstruišimo tangente kruga l u tačkama P i Q. One dele krug k na četiri luka. Mi ćemo dokaz sprovesti za slučaj kada tačka A pripada onom od tih lukova koji je prikazan na sl.157, a čitaocu prepuštamo da razmotri ostale slučajeve.

Neka je D podnožje visine iz temena A trougla ABC i E drugi presek prave AD i kruga k. Označimo $\angle QCB = \alpha$. Iz tetivnog četvorougla $PQCB$ dobijamo

$\angle BPQ = 180^\circ - \alpha$, pa je $\angle AEQ = \angle APQ = \alpha$. S druge strane je $\angle QAE = \angle CAD = 90^\circ - \alpha$, pa je trougao AEQ pravougli s pravim uglom kod temena Q, što znači da prava AE (tj. prava AD) sadrži centar O kruga k, a to je i trebalo dokazati.

80.MO.2. Iz pretpostavke zadatka, za $n = 1, n = 2$ i $n = 3$, dobijamo redom:

$$a+b+c \equiv 0 \pmod m, \quad a^2+2b+c \equiv 0 \pmod m, \quad a^3+3b+c \equiv 0 \pmod m.$$

Iz prve dve od tih relacija sledi

$$a^2 - a + b \equiv 0 \pmod m, \tag{1}$$

a iz poslednje dve

$$a^3 - a^2 + b \equiv 0 \pmod m. \tag{2}$$

Iz (1) i (2) dobijamo

$$a^3 - 2a^2 + a = a(a-1)^2 \equiv 0 \pmod m,$$
$$b^2 \equiv [a(a-1)]^2 \equiv a[a(a-1)^2] \pmod m,$$

pa dalje sledi $b^2 \equiv 0 \pmod m$. Da ne mora biti $b \equiv 0 \pmod m$ pokazuje primer $m = 4$, $a = 3$, $b = 2$, $c = 3$.

80.MO.3. Primetimo najpre da niz (x_n) čiji članovi zadovoljavaju datu relaciju mora imati sve članove različite od nule. Označimo

$$y_n = \frac{x_n^2 + x_{n+1}^2 + a}{x_n x_{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Tada za $n = 1, 2, \ldots$ važi

$$y_n = \frac{x_n^2 + \left(\dfrac{x_n^2 + a}{x_{n-1}}\right)^2 + a}{x_n \dfrac{x_n^2 + a}{x_{n-1}}} = \frac{(x_{n-1}^2 + x_n^2 + a)(x_n^2 + a)}{x_{n-1}x_n(x_n^2 + a)} = \frac{x_{n-1}^2 + x_n^2 + a}{x_{n-1}x_n} = y_{n-1},$$

tj. niz (y_n) je konstantan, pa za svako $n = 1, 2, \ldots$ važi

$$y_n = \frac{x_n^2 + x_{n+1}^2 + a}{x_n x_{n+1}} = \frac{x_0^2 + x_1^2 + a}{x_0 x_1} = y_0 \in \mathbb{Z}.$$

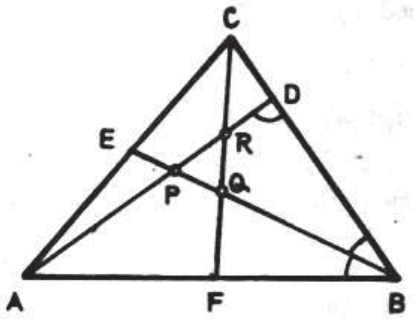
Odatle je $x_n^2 + x_{n+1}^2 + a = y_0 x_n x_{n+1}$, tj. $x_{n+1}^2 + a = x_n(y_0 x_{n+1} - x_n)$. Sada se tvrđenje zadatka lako dokazuje indukcijom: brojevi x_0 i x_1 su celi po pretpostavci, a ako pretpostavimo da su, za neko n, x_n i x_{n+1} celi brojevi, onda na osnovu prethodnog dobijamo da je i

$$x_{n+2} = \frac{x_{n+1}^2 + a}{x_n} = y_0 x_{n+1} - x_n$$

ceo broj.

81.1.1. Neka je $a+c=k^2$ i $b+c=(k+1)^2$, gde je k prirodan broj. Tada je $a=k^2-c$ i $b=(k+1)^2-c$, pa lako dobijamo

$$ab+c=(k^2-c)[(k+1)^2-c]+c=[k(k+1)-c]^2,$$
$$ab+a+b+c=[(k(k+1)-c+1]^2.$$



Sl. 158.

81.1.2. Neka je AD visina, BE simetrala ugla ABC i CF težišna duž trougla ABC i neka su P, Q, R redom preseci duži AD i BE, BE i CF, CF i AD, sl.158. Pretpostavimo da je trougao PQR jednakostraničan. Tada je $\angle BPD = 60°$, pa sledi $\angle PBD = \angle PBA = 30°$ i $\angle ABC = 60°$. Kako je $\angle BQF = \angle PQR = 60°$, to je $\angle QFB = 180° - \angle BQF - \angle QBF = 90°$. Prema tome $CF \perp AB$, tj. težišna duž CF je ujedno visina trougla ABC. Kako je $CF = CF$, $FA = FB$ i $\angle CFA = \angle CFB = 90°$, to su trouglovi CFA i CFB podudarni. Zato je $\angle BAC = \angle ABC = 60°$, pa dobijamo i $\angle ACB = 180° - 2 \cdot 60° = 60°$. Prema tome, trougao ABC je jednakostraničan, a duži AD, BE i CF se seku u jednoj tački. Kontradikcija.

81.1.3. Neka je $a_1, a_2, a_3, \ldots$ dati niz brojeva. Koristeći prva četiri člana i pravila na osnovu koga se računaju sledeći članovi dobijamo: a_n je paran broj, ako i samo ako je $n \equiv 3 \pmod 5$.

a) Na osnovu rečenog sledi da je od proizvoljna četiri uzastopna člana niza najviše jedan paran. Zato se u nizu ne pojavljuje četvorka $1, 2, 3, 4$.

b) Neka je $x_1 = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, $x_2 = (a_2, a_3, a_4, a_5)$, $x_3 = (a_3, a_4, a_5, a_6)$, ... Kako četvorki čiji su elementi $0, 1, 2, \ldots, 9$ ima 10^4, to u nizu $x_1, x_2, x_3, \ldots$ ima jednakih članova. Neka je k najmanji indeks za koji postoji prirodan broj $n > k$, tako da važi $x_k = x_n$, tj.

$$a_k = a_n, \quad a_{k+1} = a_{n+1}, \quad a_{k+2} = a_{n+2} \quad , a_{k+3} = a_{n+3}.$$

Pretpostavimo da je $k > 1$. Kako je

$$a_{k-1} + a_k + a_{k+1} + a_{k+2} \equiv a_{k+3} \pmod{10},$$
$$a_{n-1} + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} \equiv a_{n+3} \pmod{10},$$

to je $a_{k-1} \equiv x_{k-1} \pmod{10}$, tj. $a_{k-1} = x_{k-1}$ (jer $a_{k-1}, a_{n-1} \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$). Zato je $x_{k-1} = x_{n-1}$. Kontradikcija. Prema tome $k = 1$, tj. prva četvorka koja će se ponoviti u nizu je $x_1 = (1, 9, 8, 1)$.

81.1.4. Označimo svaku od manjih kocki jednim od brojeva 0 i 1, tako da su ugaone kocke označene nulom, a svake dve kocke koje imaju zajedničku stranu

različitim brojevima. Tada je centralna kocka označena jedinicom. Miš jede kocke koje su redom označene brojevima $0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$ Dvadesetsedmi član u tom nizu je nula, pa poslednja kocka ne može biti centralna.

81.2.1. Neka su x_1 i x_2 nule kvadratnog trinoma $f(x) = ax^2 + bx + c$, pri čemu je $0 < x_1 < x_2 < 1$. Tada je $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, $f(0) > 0$, $f(1) > 0$. Kako su $f(0)$ i $f(1)$ prirodni brojevi, a brojevi x_1 i x_2 međusobno različiti, to je

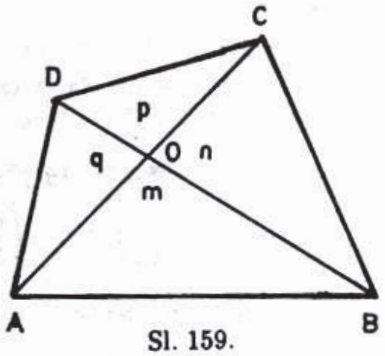
$$1 \leq f(0)f(1) = a^2x_1x_2(1 - x_1)(1 - x_2) < a^2\left(\frac{x_1 + x_2 + 1 - x_1 + 1 - x_2}{4}\right)^4 = \frac{a^2}{16},$$

pa sledi $a^2 > 16$. Pošto je a prirodan broj, to je $a \geq 5$. Dalje je $f(0)f(1) < \frac{25}{16}$, pa sledi $f(0) = f(1) = 1$, tj. $c = a + b + c = 1$. Ako je $a = 5$, onda je $c = 1$, $b = -5$. Lako se proverava da kvadratni trinom $f(x) = 5x^2 - 5x + 1$ ima dve različite nule u intervalu $(0, 1)$.

81.2.2. Neka je O presek dijagonala konveksnog četvorougla $ABCD$ i neka su m, n, p, q redom površine trouglova ABO, BCO, CDO, DAO. Kako trouglovi ABO i BCO imaju zajedničku visinu iz temena B, a trouglovi CDO i DAO imaju zajedničku visinu iz temena D, to je

$$\frac{m}{n} = \frac{AO}{CO} = \frac{q}{p}.$$

Zato je $mp = nq$, pa sledi $mnpq = (nq)^2$.



Sl. 159.

81.2.3. Datu jednačinu transformišemo ekvivalentno na sledeći način

$$(x^2 + 3x + 1)^2 - y^4 = 0,$$
$$16(x^2 + 3x + 1 - y^2)(x^2 + 3x + 1 + y^2) = 0,$$
$$[(2x + 3)^2 - (2y)^2 - 5][(2x + 3)^2 + (2y)^2 - 5] = 0,$$
$$[(2x + 2y + 3)(2x - 2y + 3) - 5][(2x + 3)^2 + (2y)^2 - 5] = 0.$$

Par (x, y) celih brojeva je rešenje te jednačine, ako i samo ako važi jedan od sledećih 8 slučajeva:

1) $2x + 2y + 3 = 1$, $2x - 2y + 3 = 5$,
2) $2x + 2y + 3 = 5$, $2x - 2y + 3 = 1$,
3) $2x + 2y + 3 = -1$, $2x - 2y + 3 = -5$,
4) $2x + 2y + 3 = -5$, $2x - 2y + 3 = -1$,
5) $2x + 3 = 1$, $2y = 2$,
6) $2x + 3 = 1$, $2y = -2$,
7) $2x + 3 = -1$, $2y = 2$,
8) $2x + 3 = -1$, $2y = -2$.

Rešavanjem ovih osam sistema jednačina dobijamo sledeća rešenja date jednačine:

$$(0, -1),\ (0, 1),\ (-3, 1),\ (-3, -1),\ (-1, 1),\ (-1, -1),\ (-2, 1),\ (-2, -1).$$

81.2.4. Neka je $\{1,2,\dots,100\} = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_7$, gde su $A_1, A_2, \dots, A_7$ međusobno disjunktni skupovi. Kako je $7 \cdot 14 < 100$, to bar jedan od skupova $A_1, A_2, \dots, A_7$ sadrži bar 15 elemenata. Ne umanjujući opštost razmatranja možemo pretpostaviti $a_1, a_2, \dots, a_{15} \in A_1$ i $a_1 < a_2 < \dots < a_{15}$. Neka je

$$x_1 = a_2 - a_1, \quad x_2 = a_3 - a_2, \quad \dots, \quad x_{14} = a_{15} - a_{14}.$$

Pretpostavimo da među prirodnim brojevima $x_1, x_2, \dots, x_{14}$ nema jednakih. Tada je

$$a_{15} - a_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_{14} \geq 1 + 2 + \dots + 14 = 105,$$

tj. $a_{15} \geq a_1 + 105 \geq 106$, što nije mogućno. Prema tome, bar dva od brojeva $x_1, x_2, \dots, x_{14}$ su međusobno jednaki. Neka je $x_k = x_n$, gde je $1 \leq k < n \leq 14$. Tada važi $a_{k+1} - a_k = a_{n+1} - a_n$, tj.

$$a_{k+1} + a_n = a_k + a_{n+1}, \quad \text{gde je} \quad 1 \leq k < k+1 \leq n < n+1 \leq 15.$$

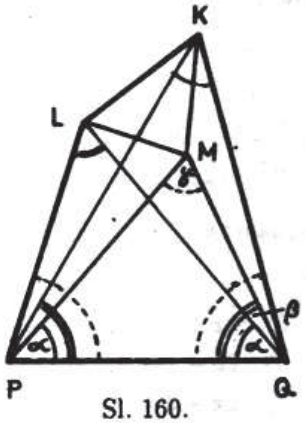
Možemo staviti $a = a_{k+1}$, $b = a_n$, $c = a_k, d = a_{n+1}$.

81.3.1. Primetimo da je $\operatorname{tg} 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$, $\operatorname{ctg} 15^\circ = 2 + \sqrt{3}$. Neka je $a_n = \operatorname{tg}^{2n} 15^\circ + \operatorname{ctg}^{2n} 15^\circ$. Tada je

$$\begin{aligned} a_n - 2 &= (\operatorname{ctg}^n 15^\circ - \operatorname{tg}^n 15^\circ)^2 = [(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n]^2 \\ &= \left\{2\sqrt{3}\left[\binom{n}{1}2^{n-1} + \binom{n}{3}2^{n-3}\cdot 3 + \binom{n}{5}2^{n-5}3^2 + \cdots\right]\right\}^2 = 3m^2, \end{aligned}$$

gde je m prirodan broj, pa sledi

$$a_n = 3m^2 + 2 = (m-1)^2 + m^2 + (m+1)^2.$$



Sl. 160.

81.3.2. Lako se dobija da je $\angle KPL = \angle KQM = \gamma - \beta$ i

$$\frac{PL}{QM} = \frac{PL}{PQ}\frac{PQ}{QM} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{PK}{QK}.$$

Na osnovu toga sledi da su trouglovi PKL i QKM slični, pa dalje sledi

$$\frac{KL}{KM} = \frac{PK}{QK} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta},$$

tj. $\dfrac{KL}{\sin\gamma} = \dfrac{KM}{\sin\beta}$. Analogno se dokazuje $\dfrac{KL}{\sin\gamma} = \dfrac{LM}{\sin\alpha}$, pa konačno dobijamo $\dfrac{LM}{\sin\alpha} = \dfrac{MK}{\sin\beta} = \dfrac{KL}{\sin\gamma}$, odakle sledi da su trouglovi LMK i PQM slični.

81.3.3. Neka je $S_n(k)$ k-ti član niza S_n. Iz uslova zadatka sledi da za svaki prirodan broj n važi $S_n(1) \leq S_n(2) \leq S_n(3) \leq \cdots$ (jer ako se u nekom koraku neki član niza poveća za jedan, onda se povećaju i svi njemu jednaki članovi).

a) Neka je n prost broj. Tada je

$$S_n(1) = n = S_2(n-1) = S_3(n-1) = \cdots = S_{n-1}(n-1) = S_n(n-1).$$

Kako je $S_2(n) = n+1$, to je $S_n(n) \geq n+1$. Pošto je niz $S_n(k)$ monotono rastući, to je

$$S_n(1) = S_n(2) = \cdots = S_n(n-1) = n < S_n(n).$$

b) Neka n nije prost broj i neka je p njegov najmanji prost delilac. Tada je

$$S_2(n-1) = S_p(n-1) = n < n+1 = S_{p+1}(n-1) \leq S_n(n-1),$$

tj. $(n-1)$-vi član niza S_n veći je od n.

81.3.4. Kako je $|A_k| > |M|/2$, za svako $k \in \{1, 2, \ldots, 1066\}$, to je

$$|A_1| + |A_2| + \cdots + |A_{1066}| > 533|M|.$$

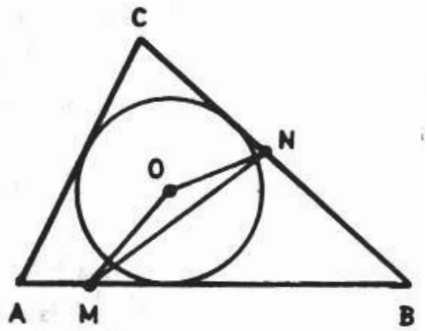
Na osnovu Dirihleovog principa zaključujemo da postoji element $x_1 \in M$, koji je sadržan bar u 534 od skupova $A_1, A_2, \ldots, A_{1066}$. Označimo tih 534 skupova sa $B_{533}, B_{534}, \ldots, B_{1066}$. Analogno dokazujemo da postoje elementi $x_2, x_3, \ldots, x_{10}$, takvi da važi

$$\begin{aligned}
&x_2 \in B_{266} \cap B_{267} \cap \cdots \cap B_{532}, \quad x_3 \in B_{133} \cap B_{134} \cap \cdots \cap B_{265},\\
&x_4 \in B_{66} \cap B_{67} \cap \cdots \cap B_{132}, \quad x_5 \in B_{33} \cap B_{34} \cap \cdots \cap B_{65},\\
&x_6 \in B_{16} \cap B_{17} \cap \cdots \cap B_{32}, \quad x_7 \in B_8 \cap B_9 \cap \cdots \cap B_{15},\\
&x_8 \in B_4 \cap B_5 \cap B_6 \cap B_7, \quad x_9 \in B_2 \cap B_3, \quad x_{10} \in B_1,
\end{aligned}$$

gde je $(B_1, B_2, \ldots, B_{1066})$ neka permutacija skupa $\{A_1, A_2, \ldots, A_{1066}\}$. Tada svaki od skupova $A_1, A_2, \ldots, A_{1066}$ sadrži bar jedan od elemenata $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$.

81.4.1. Neka prava p seče stranice AB i BC redom u tačkama M i N, pri čemu trougao MBN i četvorougao $AMNC$ imaju jednake površine i obime. Pretpostavimo da centar O upisanog kruga ne pripada pravoj MN. Razmotrimo slučaj kada tačka O pripada četvorouglu $AMNC$. Neka je r poluprečnik upisanog kruga. Tada je

$$\begin{aligned}
P_{AMONC} &= \frac{1}{2}(MA + AC + CN)r\\
&= \frac{1}{2}(NB + BM)r = P_{MONB},
\end{aligned}$$



Sl. 161.

a pošto je $P_{AMONC} + P_{MON} = P_{AMNC} = P_{MBN} = P_{MONB} - P_{MON}$, to sledi $P_{MON} = 0$, što je kontradikcija. Analogno se razmatra slučaj kada tačka O pripada trouglu MBN. Primetimo još da isti dokaz ostaje na snazi ako je $A = M$.

81.4.2. Imamo da je

$$\left|\frac{x+y}{1+x\overline{y}}\right|^2 = \frac{x+y}{1+x\overline{y}}\,\frac{\overline{x}+\overline{y}}{1+\overline{x}y} = \frac{|x|^2+|\overline{y}|^2+2\mathrm{Re}(x\overline{y})}{1+|x\overline{y}|^2+2\mathrm{Re}(x\overline{y})}$$
$$= 1 + \frac{|x|^2+|y|^2-1-|x\overline{y}|^2}{1+|x\overline{y}|^2+2\mathrm{Re}(x\overline{y})} = 1 - \frac{(a^2-1)(b^2-1)}{1+|x\overline{y}|^2+2\mathrm{Re}(x\overline{y})},$$

pri čemu je

$$\min\{\mathrm{Re}(x\overline{y}) : |x| = a,\ |y| = b\} = -ab,$$
$$\max\{\mathrm{Re}(x\overline{y}) : |x| = a,\ |y| = b\} = ab.$$

Ako je bar jedan od brojeva a i b jednak 1, onda je

$$\min_{|x|=a,|y|=b}\left|\frac{x+y}{1+x\overline{y}}\right| = 1.$$

Ako su brojevi a i b oba manji ili oba veći od 1, onda je

$$\min_{|x|=a,|y|=b}\left|\frac{x+y}{1+x\overline{y}}\right| = \left[1 - \frac{(a^2-1)(b^2-1)}{1+a^2b^2-2ab}\right]^{1/2} = \left|\frac{a-b}{1-ab}\right|.$$

Ako je jedan od brojeva a i b manji, a drugi veći od 1, onda je

$$\min_{|x|=a,|y|=b}\left|\frac{x+y}{1+x\overline{y}}\right| = \left[1 - \frac{(a^2-1)(b^2-1)}{1+a^2b^2+2ab}\right]^{1/2} = \frac{a+b}{1+ab}.$$

81.4.3. Neka je

$$z_1 = a(\cos A + i\sin A),\quad z_2 = b(\cos B + i\sin B),\quad z_3 = c(\cos C + i\sin C),$$
$$E_n = a^n\cos nA + b^n\cos nB + c^n\cos nC,\quad G_n = E_n + iF_n.$$

Koristeći Muavrovu formulu dobijamo

$$G_n = a^n(\cos nA + i\sin nA) + b^n(\cos nB + i\sin nB)$$
$$+ c^n(\cos nC + i\sin nC) = z_1^n + z_2^n + z_3^n.$$

Primetimo da je $G_0 = 3$ i da su prema uslovu zadatka G_1 i G_2 realni brojevi. Dalje je

$$\begin{aligned}G_n &= (z_1+z_2+z_3)(z_1^{n-1}+z_2^{n-1}+z_3^{n-1}) - z_1(z_2^{n-1}+z_3^{n-1})\\ &\quad - z_2(z_3^{n-1}+z_1^{n-1}) - z_3(z_1^{n-1}+z_2^{n-1})\\ &= G_1G_{n-1} - (z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)(z_1^{n-2}+z_2^{n-2}+z_3^{n-2})\\ &\quad + z_1z_2z_3(z_1^{n-3}+z_2^{n-3}+z_3^{n-3})\\ &= G_1G_{n-1} + \frac{(G_2-G_1^2)G_{n-2}}{2} + abcG_{n-3}[\cos(A+B+C) + i\sin(A+B+C)].\end{aligned}$$

Ako pretpostavimo da su brojevi $G_{n-3}, G_{n-2}, G_{n-1}$ realni za neko $n \geq 3$, onda na osnovu dobijene rekurentne veze za članove niza (G_k) sledi da je i G_n realan broj, jer je $\sin(A+B+C)=0$. Na osnovu metoda matematičke indukcije dobijamo da su svi članovi niza (G_n) realni brojevi. Prema tome za svaki prirodan broj n važi $F_n = 0$.

81.4.4. Neka su $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ i $\{B_1, B_2, \ldots, B_{m+k}\}$ razbijanja skupa S. Za svako $i \in S$ označimo sa x_i broj elemenata onog od blokova $A_1, A_2, \ldots, A_m$ koji sadrži broj i, a sa y_i broj elemenata onog od blokova $B_1, B_2, \ldots, B_{m+k}$ koji sadrži broj i.

Pretpostavimo da su brojevi $|A_1|, |A_2|, \ldots, |A_m|$ međusobno različiti. Tada među brojevima $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ima tačno $|A_j|$ brojeva jednakih $|A_j|$, gde je $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Zato je $\sum_{i=1}^{n} 1/x_i = m$. Lako se vidi da ova jednakost važi i u slučaju da među brojevima $|A_1|, |A_2|, \ldots, |A_m|$ ima jednakih. Analogno se dokazuje da važi $\sum_{i=1}^{n} 1/y_i = m+k$. Na osnovu toga sledi

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{y_i} - \frac{1}{x_i}\right) = k.$$

Kako su svi sabirci $1/y_i - 1/x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, manji od 1, to su bar $k+1$ od tih sabiraka pozitivni brojevi. Dovoljno je još primetiti da je broj $1/y_i - 1/x_i$ pozitivan, ako i samo ako je $x_i > y_i$, tj. ako i samo ako se element i prvi put nalazio u brojnijem bloku nego drugi put.

81.MO.1. Neka je $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ i $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Broj tročlanih aritmetičkih nizova elemenata skupa S čiji je srednji član jednak a_k nije veći od $\min\{k-1, n-k\}$, jer prvi član takvog niza može biti neki od elemenata $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$, a poslednji – neki od elemenata $a_{k+1}, \ldots, a_n$. Zato skup $A(S)$ ima ne više od

$$\sum_{k=1}^{n} \min\{k-1, n-k\} \equiv x_n$$

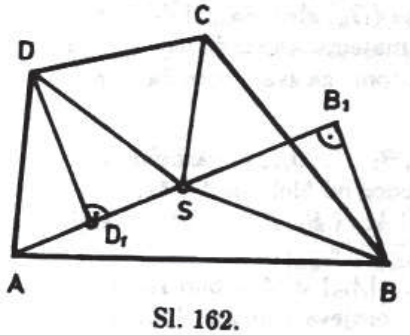
elemenata. Ako je $n = 2m$, onda je

$$x_n = x_{2m} = 2[1+2+\cdots+(m-1)] = m(m-1) = \left[\frac{n-1}{2}\right]\left[\frac{n}{2}\right].$$

Ako je $n = 2m+1$, onda je

$$x_n = x_{2m+1} = 2[1+2+\cdots+(m-1)] + m = m^2 = \left[\frac{n-1}{2}\right]\left[\frac{n}{2}\right].$$

Pri tome, ako je $S = \{1, 2, \ldots, n\}$, onda skup $A(S)$ sadrži tačno x_n elemenata.



Sl. 162.

81.MO.2. Kako trouglovi ASD i ASB imaju jednake površine i zajedničku stranicu AS, to su visine DD_1 i BB_1 tih trouglova međusobno jednake, sl.162. Zato središte dijagonale BD pripada pravoj AS. Na sličan način dokazujemo da središte dijagonale BD pripada pravoj CS, a da prave BS i DS sadrže središte duži AC. Ako se prave AS i CS poklapaju, onda dijagonala AC polovi dijagonalu BD. Ako je S jedina zajednička tačka pravih AS i CS, onda je S središte dijagonale BD, prave BS i DS se poklapaju, pa dijagonala BD polovi dijagonalu AC.

81.MO.3. a) Neka je (x, y, z, t) rešenje datog sistema u skupu nenegativnih brojeva. Tada je

$$5a - 7b = 5(x + 2y + 3z + 7t) - 7(y + 2z + 5t) = 5x + 3y + z \geq 0.$$

b) Neka je $5a \geq 7b$ i $b = 5k + r$, gde je $k \geq 0$ i $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Jedno rešenje (x, y, z, t) u skupu nenegativnih celih brojeva je

$$\begin{aligned}
&(a - 7k, 0, 0, k), && \text{ako je } r = 0;\\
&(a - 7k - 2, 1, 0, k), && \text{ako je } r = 1;\\
&(a - 7k - 3, 0, 1, k), && \text{ako je } r = 2;\\
&(a - 7k - 5, 1, 1, k), && \text{ako je } r = 3;\\
&(a - 7k - 6, 0, 2, k), && \text{ako je } r = 4.
\end{aligned}$$

Lako se proverava da je svaka od navedenih četvorki rešenje. Nenegativnost x-koordinate, na primer u slučaju $r = 3$, dokazujemo na sledeći način: Iz uslova $5a \geq 7b$ sledi $5a \geq 35k + 21$. Pošto je a prirodan broj, to je $5a \geq 35k + 25$, pa sledi $a \geq 7k + 5$, tj. $a - 7k - 5 \geq 0$. Slično se postupa i u ostalim slučajevima.

82.1.1. Ako je $a = c$, iz date jednakosti se neposredno izvodi $b = d$. Pretpostavimo da je $a \neq c$, na primer, $a < c$. Datu jednakost možemo zapisati u obliku

$$(a + b + c + d)(a + b - c - d) = c - a, \tag{1}$$

odakle zbog $c - a > 0$ dobijamo $a + b - c - d > 0$. No, dati brojevi su celi, pa mora biti i $a + b - c - d \geq 1$. Iz (1) onda sledi $c - a \geq a + b + c + d$, odnosno $2a + b + d \leq 0$, što je nemoguće, jer su dati brojevi prirodni. Dakle mora biti $a = c$, pa i $b = d$.

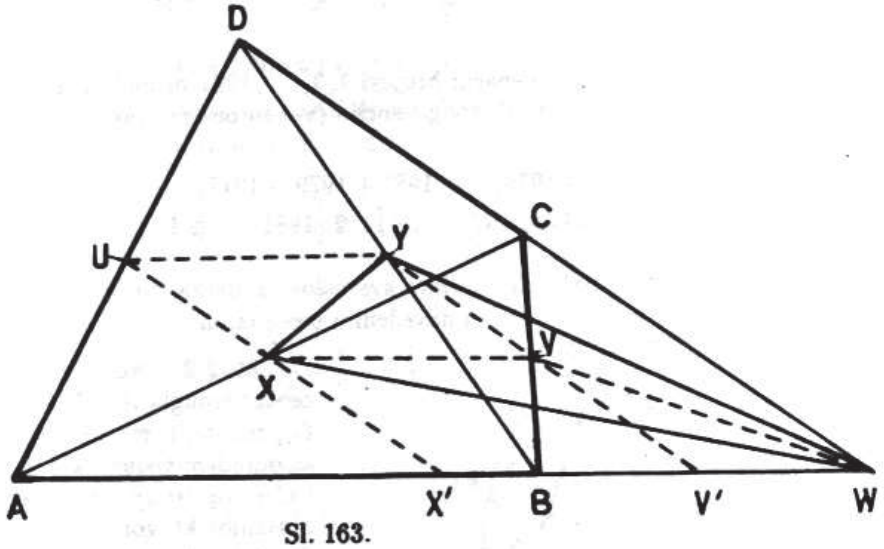
82.1.2. a) Moguće je. Ako je broj upaljenih sijalica u početku veći od 13, jasno je da gaseći po 13 sijalica uvek možemo doći u situaciju kada imamo manje od 13 upaljenih sijalica. Jasno je da je u tom slučaju dovoljno rešiti zadatak pod pretpostavkom da je $n = 14$. Pretpostavimo najpre da gori samo jedna sijalica. Tada se može postupiti na način koji pokazuje sledeća tablica:

upaljene	1	12	3	10	5	8	7	6	9	4	11	2	13	0
ugašene	13	2	11	4	9	6	7	8	5	10	3	12	1	14

Ako je broj upaljenih sijalica u početku bilo koji drugi broj između 2 i 12, treba se na odgovarajućem mestu uključiti u postupak koji opisuje tablica.

b) Zbog $8 \cdot 13 < 111$, jasno je da 8 koraka nije dovoljno da se sve sijalice ugase. Pokažimo da je 9 koraka dovoljno. U prvih 7 koraka gasimo po 13 sijalica – ostaje ih 20 upaljenih. U osmom koraku ugasimo 10 sijalica, a upalimo 3. Preostaje 13 upaljenih sijalica koje ugasimo u devetom koraku.

82.1.3. Pretpostavimo, suprotno tvrđenju zadatka, da ti krugovi imaju zajedničku tačku P. Spojimo tu tačku sa centrima $S_1, S_2, \ldots, S_6$ datih krugova. Bar jedan od uglova S_iPS_j biće tada manji ili jednak 60°. U trouglu S_iPS_j je onda jedan od preostala dva ugla, na primer $\angle S_jS_iP$, veći ili jednak 60°, tj. veći ili jednak od ugla S_iPS_j, pa je $PS_j \geq S_iS_j$. Kako tačka P pripada krugu sa centrom S_j, to sledi da i S_i pripada tom krugu, što je suprotno pretpostavci zadatka.



Sl. 163.

82.1.4. Neka se, određenosti radi, prave AB i CD seku sa one strane tačke A s koje je tačka B. Neka su U i V, redom, središta stranica AD i BC četvorougla $ABCD$, sl.163. Duž XV je srednja duž trougla ABC, pa je paralelna i jednaka polovini duži AB. Tačke C i W su jednako udaljene od prave XV, pa je

$$P_{XWV} = P_{XVC} = \frac{1}{4}P_{ABC}. \tag{1}$$

Analogno se dobija da je

$$P_{YVW} = P_{YBV} = \frac{1}{4}P_{DBC}. \tag{2}$$

Odredimo još površinu trougla XVY. Duži XV i YU su srednje duži trouglova ABC i ABD sa zajedničkom osnovicom AB, pa je četvorougao $XVYU$ paralelogram i $P_{XVY} = \frac{1}{2}P_{XVYU}$. Neka su X' i V' tačke u kojima prave UX i YV, redom, seku pravu AB. Paralelogram $X'V'YU$ ima osnovicu jednaku polovini osnovice trougla ABD i visinu jednaku polovini njegove visine, pa je $P_{X'V'YU} = \frac{1}{2}P_{ABD}$. Slično je $P_{X'V'VX} = \frac{1}{2}P_{ABC}$. Zato je

$$P_{XVY} = \frac{1}{2}P_{XVYU} = \frac{1}{2}(P_{X'V'YU} - P_{X'V'VX}) = \frac{1}{4}(P_{ABD} - P_{ABC}). \qquad (3)$$

Sabiranjem jednakosti (1), (2) i (3) dobijamo

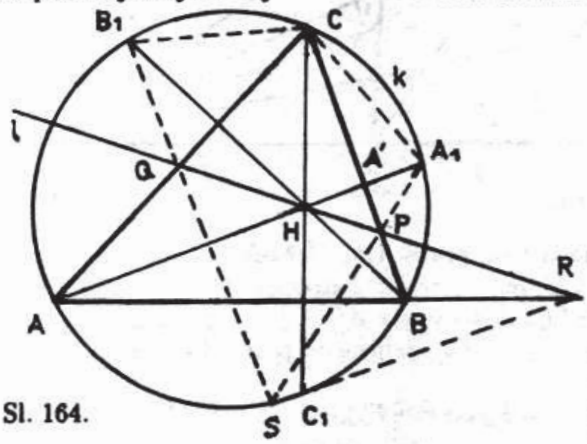
$$\begin{aligned} P_{XVY} &= P_{XWV} + P_{YVW} + P_{XVY} \\ &= \frac{1}{4}(P_{ABC} + P_{DBC} + P_{ABD} - P_{ABC}) = \frac{1}{4}P_{ABCD}, \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

82.2.1. Dokažimo da svi neparni brojevi $1, 3, \ldots, 1981$ pripadaju skupu S. To sledi iz b) i c) na osnovu sledećih kongruencija (sve su one po modulu 1982):

$$\begin{gathered} 3 \cdot 1981 \equiv 1979, \quad 2 \cdot 1981 + 1979 \equiv 1977, \\ 2 \cdot 1981 + 1977 \equiv 1975, \quad \ldots, \quad 2 \cdot 1981 + 3 \equiv 1. \end{gathered}$$

Kako skup $S = \{1, 3, \ldots, 1981\}$ zadovoljava sve uslove zadatka, to je on ujedno i skup sa najmanjim brojem elemenata i navedenim osobinama.



Sl. 164.

82.2.2. Neka je H ortocentar trougla ABC, A_1, B_1 i C_1, redom, preseci pravih koji su određeni visinama AH, BH i CH tog trougla sa njegovim opisanim krugom k i P, Q i R, redom, tačke u kojima data prava l seče date prave BC, CA i AB, ako ti preseci postoje, sl.164. Lako se dokazuje da su tačke H i A_1 simetrične u odnosu na pravu BC. Zaista, važi $\angle A_1CB = \angle A_1AB$ (periferijski uglovi nad jednakim lukom) i $\angle HCB = \angle A_1AB$ (uglovi sa normalnim kracima), pa ako sa A' označimo podnožje visine AH imamo $\angle A_1CA' = \angle HCA'$, što znači da su pravougli trouglovi A_1CA' i HCA' podudarni. Odatle sledi i $A'A_1 = A'H$. Slično, tačke H i

B_1 su simetrične u odnosu na pravu CA. Zato prave, simetrične pravoj l u odnosu na prave, redom, BC i CA sadrže tačke A_1 i B_1 respektivno. Označimo presek tih pravih sa S. U četvorouglu A_1CB_1S je

$$\angle SA_1C + \angle CB_1S = \angle PHC + \angle CHQ = 180^\circ,$$

pa je on tetivan, tj. tačka S pripada krugu k koji je oko njega opisan.

Slično se dokazuje da i prava simetrična pravoj l u odnosu na pravu AB sadrži tačku S, tj. sve te tri prave se seku na krugu k.

82.2.3. Posmatrajmo $2k-1 > n$ celih brojeva

$$a_1, a_2, \ldots, a_k, a_2 - a_1, a_3 - a_1, \ldots, a_k - a_1,$$

koji pripadaju segmentu $[1, n]$. Neka dva od njih moraju biti jednaka među sobom. Kako je $a_i \neq a_j$ za $i \neq j$, to postoje $i, r \in \{1, 2, \ldots, k\}$ takvi da važi $a_r - a_1 = a_i$.

82.2.4. Lako se dokazuje da je $\max\limits_{0\le x\le 1}\left|x^2 - x + \frac{1}{8}\right| = \frac{1}{8}$. Dokažimo da je za proizvoljna dva realna broja u i v, $\max\limits_{0\le x\le 1}|x^2 - ux - v| \ge \frac{1}{8}$. Pretpostavimo suprotno – da je za neke brojeve u i v maksimum funkcije $f(x) = |x^2 - ux - v|$ na segmentu $[0,1]$ manji od $1/8$, tj. da je $f(x) < 1/8$ za svako $x \in [0,1]$. Onda je i

$$|v| = f(0) < \frac{1}{8}, \quad \left|\frac{1}{4} - \frac{u}{2} - v\right| = f\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{8}, \quad |1 - u - v| = f(1) < \frac{1}{8},$$

odakle sledi

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} = \left|(1-u-v) - 2\left(\frac{1}{4} - \frac{u}{2} - v\right) - v\right| &\le |1-u-v| + 2\left|\frac{1}{4} - \frac{u}{2} - v\right| + |v| \\ &< \frac{1}{8} + 2\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

što je nemoguće. Dakle, traženi brojevi su $a = 1$, $b = -1/8$.

82.3-4.1. Neka je $p(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0$ $(a_n \neq 0)$ traženi polinom. Stavljajući $x = 0$ u datu relaciju dobijamo $16a_0 = a_0^2$, odakle je $a_0 = 0$ ili $a_0 = 16$. S druge strane, izjednačavanjem koeficijenata uz x^{2n} u toj relaciji dobijamo $16a_n = 2^{2n}a_n^2$. Kako nije $a_n = 0$, to mora biti $a_n = 16/4^n$, pa pošto je a_n ceo broj, to je $n = 0$, $n = 1$ ili $n = 2$.

Za $n = 0$ polinomi $p(x) = 0$ i $p(x) = 16$ zadovoljavaju uslove zadatka. Za $n = 1$ dolaze u obzir polinomi $p(x) = 4x$ i $p(x) = 4x + 16$. Lako se proverava da prvi od njih zadovoljava dati uslov, a drugi ne. Za $n = 2$ „kandidati" su polinomi $p(x) = x^2 + a_1x$ i $p(x) = x^2 + a_1x + 16$. Direktna provera pokazuje da je prvi polinom rešenje ako i samo ako je $a_1 = 0$, dok drugi nije rešenje ni za jedno a_1.

Traženi polinomi su 0, 16, $4x$ i x^2.

82.3-4.2. Označimo $x = 22°30'$. Tada je $\operatorname{tg} x = \sqrt{2} - 1$ i $\operatorname{tg}^2 x = 1 - 2\operatorname{tg} x$. Koristeći te činjenice lako dobijamo da za $0 < \alpha < 45°$ $(\alpha \neq x)$ važi

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(45° - \alpha) - 2\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\alpha + \frac{1 - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha} - 2\operatorname{tg} x = \frac{(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg} x)^2}{1 + \operatorname{tg}\alpha} > 0. \quad (1)$$

Stavljajući u nejednakost (1) $\alpha = 1°, 2°, \ldots, 22°$ i sabirajući dobijene nejednakosti dobijamo desnu stranu date nejednakosti. Iz (1) takođe sledi da za $0 < \alpha < x$ važi

$$1 = \operatorname{tg} 45° = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(45° - \alpha)}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}(45° - \alpha)} > \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}(45° - \alpha)} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}(45° - \alpha)},$$

odnosno $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}(45° - \alpha) < \operatorname{tg}^2 x$. Množenjem nejednakosti koje se odatle dobijaju za $\alpha = 1°, 2°, \ldots, 22°$ dobijamo levu stranu date nejednakosti.

82.3-4.3. Neka je S_1 skup tačaka iz S kod kojih je zbir koordinata paran broj, a $S_2 = S \setminus S_1$. Tada su, jasno, sve tačke skupa S, susedne nekoj tački $P_1 \in S_1$, u skupu S_2 i, obrnuto, sve tačke skupa S, susedne nekoj tački $P_2 \in S_2$, pripadaju skupu S_1. Zato je „susedno" preslikavanje $f : S \to S$ bijekcija između skupova S_1 i S_2. Inverzno preslikavanje f^{-1} je takođe bijekcija. Lako se proverava da funkcija $g : S \to S$, definisana sa

$$g(P) = \begin{cases} f(P), & \text{za } P \in S_1, \\ f^{-1}(P), & \text{za } P \in S_2, \end{cases}$$

zadovoljava sve uslove zadatka.

82.3-4.4. Prema uslovu zadatka je

$$xyz + 1 = at, \quad xyt + 1 = bz, \quad xzt + 1 = cy, \quad yzt + 1 = dx$$

za neke prirodne brojeve a, b, c, d. Odatle neposredno sledi da su brojevi x, y, z, t uzajamno prosti u parovima. Množeći te jednakosti dobijamo da je broj $xyz + xyt + xzt + yzt + 1$ deljiv sa $xyzt$. Zato je broj

$$S = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{xyzt}$$

ceo. Prema uslovu zadatka je $x \geq 2, y \geq 3, z \geq 4, t \geq 5$, odakle sledi

$$0 < S \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{120} = \frac{155}{120},$$

pa je $S = 1$. Ako bi bilo $x \geq 3$, imali bismo $y \geq 4, z \geq 5, t \geq 6$ i

$$1 = S \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{360} = \frac{343}{360},$$

što nije mogućno. Dakle $x = 2$ i

$$1 = \frac{2}{y} + \frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{1}{yzt}.$$

Brojevi y, z, t su neparni jer su uzajamno prosti sa 2. Ako bi bilo $y > 3$, imali bismo $y \geq 5, z \geq 7, t \geq 9$ i

$$1 \leq \frac{2}{5} + \frac{2}{7} + \frac{2}{9} + \frac{1}{315} = \frac{287}{317},$$

što nije mogućno. Dakle $y = 3$ i $1 = 6/z + 6/t + 1/(zt)$, odakle je $z = 6 + 37/(t-6)$. Zbog $z < t$ odatle lako dobijamo $z = 7$ i $t = 43$.

Neposredno se proverava da četvorka $(2, 3, 7, 43)$ zaista zadovoljava uslove zadatka.

82.MO.1. Traženi zbir napišimo u obliku

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{p-1} = (a_1 + a_{p-1}) + (a_2 + a_{p-2}) + \cdots + (a_{(p-1)/2} + a_{(p+1)/2}).$$

Ako za $k \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ izraz $k^p + (p-k)^p$ razvijemo po binomnom obrascu, dobijamo da je on deljiv sa p^2, što znači da je i broj $a_k + a_{p-k}$ deljiv sa p^2. Kako je, međutim, $a_k < p^2$ i $a_{p-k} < p^2$, to je $a_k + a_{p-k} = p^2$, pa je zaista

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{p-1} = \frac{p-1}{2} p^2.$$

82.MO.2. Za $n = 1$ jedini polinom tog oblika je $P_1(x) = x - 2$ i on zadovoljava uslove zadatka.

Za $n = 2$ treba naći ceo broj a_1, tako da $P_2(x) = 2x^2 + a_1 x + 6$ zadovoljava date uslove. Tada za korene x_1, x_2 tog polinoma važi:

$$1 \leq x_1 \leq 2 \leq x_2 \leq 3, \quad x_1 + x_2 = -\frac{a_1}{2}, \quad x_1 x_2 = 3.$$

Iz tih uslova se redom dobija $0 \leq x_2 - x_1 \leq 2$,

$$0 \leq (x_2 - x_1)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = \frac{1}{4} a_1^2 - 12 \leq 4$$

i $48 \leq a_1^2 \leq 64$, a takođe i $a_1 < 0$. Kako je a_1 ceo broj, to je $a_1 = -7$ ili $a_1 = -8$. Obe te vrednosti zadovoljavaju uslove zadatka.

Dokažimo da za $n \geq 3$ takav polinom ne postoji. Neka je

$$\begin{aligned} P_n(x) &= n! x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + (-1)^n n(n+1) \\ &= n!(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n). \end{aligned}$$

Tada je $(-1)^n n(n+1) = n!(-1)^n x_1 x_2 \cdots x_n$, pa bi iz $x_k \in [k, k+1]$ za $k = 1, 2, \ldots, n$ sledilo

$$n! \leq x_1 x_2 \cdots x_n = \frac{n+1}{(n-1)!} \leq \frac{n+1}{2} < n < n!.$$

Svi traženi polinomi su $x - 2$, $2x^2 - 7x + 6$ i $2x^2 - 8x + 6$.

82.MO.3. Primetimo da svakom zbiru $\sum_{k=1}^{2n} \alpha_k x_k$ odgovara razbijanje $S \cup T$ skupa $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ određeno sa $k \in S \Leftrightarrow \alpha_k = -1$, $k \in T \Leftrightarrow \alpha_k = 1$. Neka su

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{2n} \alpha_k x_k, \qquad \sigma_2 = \sum_{k=1}^{2n} \beta_k x_k$$

dva takva zbira, $\alpha_k, \beta_k \in \{-1, 1\}$ i neka su $S_1 \cup T_1$ i $S_2 \cup T_2$ odgovarajuća razbijanja skupa $\{1, 2, \ldots, 2n\}$. Pretpostavimo da jedan od skupova S_1 i S_2 sadrži drugi, na primer, $S_1 \subset S_2$. Tada se zbirovi σ_1 i σ_2 razlikuju za dvostruki zbir nekoliko brojeva x_i, dakle za više od dva, pa ne mogu oba pripadati segmentu $[0, 2]$. Znači, ako su $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ svi zbirovi datog oblika koji pripadaju segmentu $[0, 2]$ i $S_1 \cup T_1, S_2 \cup T_2, \ldots, S_m \cup T_m$ odgovarajuća razbijanja skupa $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, onda su skupovi $S_1, S_2, \ldots, S_m$ neuporedivi u odnosu na inkluziju, tj. nijedan od njih ne sadrži neki drugi kao podskup. Koristeći rezultat zadatka 78.MO.3. zaključujemo da je $m \leq \binom{2n}{n}$.

83.1.1. Ako je n jednocifren broj, onda je $n^3 \leq 9^3 \leq 729$, $n^4 \leq 9^4 \leq 6461$, tj. u zapisu brojeva n^3 i n^4 ima najviše 7 cifara. Ako u zapisu broja n ima više od dve cifre, onda je

$$n^3 \geq 100^3 = 10^6, \quad n^4 \geq 100^4 = 10^8,$$

pa u zapisu brojeva n^3 i n^4 ima najmanje $7+9 = 16$ cifara. Neka se u zapisu brojeva n^3 i n^4 svaka od cifara $0, 1, 2, \ldots, 9$ pojavljuje tačno jedanput. Na osnovu rečenog sledi da je n dvocifren broj. Dalje lako sledi da je n^3 četvorocifren, a n^6 šestocifren broj. Iz uslova $1000 \leq n^3 \leq 9999$ sledi $10 \leq n \leq 21$, a iz $10^5 \leq n^4 \leq 10^6 - 1$ sledi $18 \leq n \leq 31$. Prema tome $n \in \{18, 19, 20, 21\}$. Svaki od brojeva 20^3 i 20^4 završava se nulom, a svaki od brojeva 21^3 i 21^4 završava se jedinicom. Dalje je $19^4 = 130321$, tj. u zapisu broja 19^4 ima ponavljanja cifara. Konačno je

$$18^3 = 5832, \qquad 18^4 = 104976,$$

tj. 18 je jedini prirodan broj za koji važe navedeni uslovi.

83.1.2. Označimo sa x, y, z, t brojeve koji se nalaze u k-tom redu, a sa s zbir tih brojeva. Tada se u $(k+1)$-om redu nalaze brojevi $s - 2a$, $s - 2b$, $s - 2c$, $s - 2d$. Prvi broj u $(k+2)$-om redu jednak je

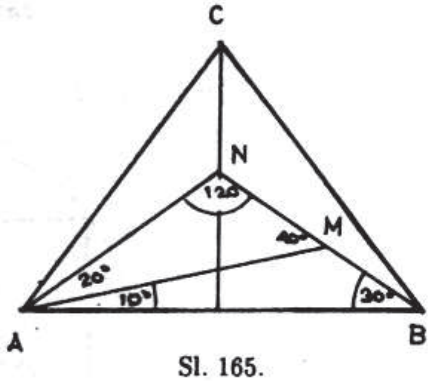
$$(s - 2b) + (s - 2c) + (s - 2d) - (s - 2a) = 2s - 2(b + c + d - a) = 4a,$$

a ostali brojevi su $4b$, $4c$, $4d$. Prema tome, prvi brojevi u prvom, drugom, trećem, ..., 1983-em redu jednaki su redom $1, 4, 4^2, \ldots, 4^{991}$. Traženi broj je 2^{1982}.

83.1.3. Neka je N presek prave BM i visine iz temena C trougla ABC, sl.165. Trougao ABN je jednakokraki sa osnovicom AB i uglom pri vrhu

$$\angle ANB = 180^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 120^\circ.$$

Dalje je $\angle ANC = \angle BNC = 120^\circ$. Kako je $AN = AN$, $\angle ACN = \angle AMN = 40^\circ$, $\angle ANC = \angle ANM$, to su trouglovi ANC i ANM podudarni. Zato je $AC = AM$, tj. trougao ACM je jednakokraki sa osnovicom CM, pa konačno dobijamo



Sl. 165.

$$\angle AMC = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle CAM) = \frac{1}{2}(180^\circ - 40^\circ) = 70^\circ.$$

1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	2	0
1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	2	0
1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	1

Sl. 166.

83.1.4. Označimo polja šahovske table 8×8 brojevima 0, 1 i 2 kao na sl.166. Kretanju delfina po tabli pridružimo niz brojeva kojima su redom označena polja na koja staje delfin. Primetimo da kod proizvoljnog kretanja dobijamo niz $0, 1, 2, 0, 1, 2, \ldots$ Prema tome, posle svakog poteza, čiji redni broj pri deljenju sa 3 daje ostatak 1, delfin se nalazi na polju koje je označeno jedinicom. Prema tome posle 64 poteza delfin ne može biti na početnom polju, jer je ono označeno nulom.

83.2.1. Koristeći dati uslov i nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine dobijamo

$$x + y + z = (x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 3(xyz)^{1/3} \cdot 3\left(\frac{1}{xyz}\right)^{1/3} = 9$$

i $xy + yz + zx = xyz$, pa dalje sledi

$$(x-1)(y-1)(z-1) = xyz - xy - yz - zx + x + y + z - 1 \geq 8.$$

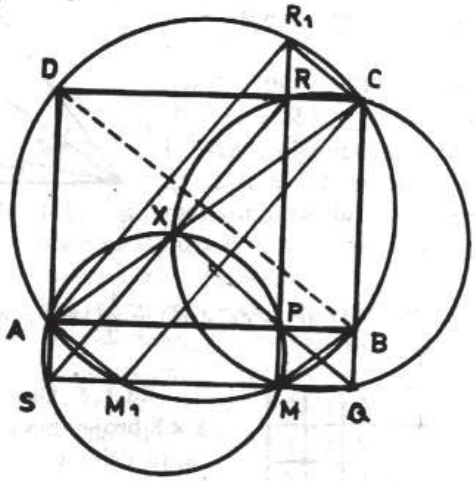
Jednakost važi ako i samo ako je $x = y = z = 3$.

83.2.2. Neka je $a_n = [(n-1)^2 + n^2]/2$ za svaki prirodan broj n. Tada je $a_1 = 1/2$ i niz (a_n) je monotono rastući niz koji teži beskonačnosti. Zato za svako

$x \geq 1/2$ postoji prirodan broj n takav da je $a_{n-1} \leq x \leq a_n$. Ove nejednakosti važe ako i samo ako je

$$f(x) = (x - a_{n-1})(x - a_n) = x^2 - (2n^2+1)x + \left(n^4 + \frac{1}{4}\right) = (x - n^2)^2 - \left(x - \frac{1}{4}\right) \leq 0,$$

odakle sledi $|x - n^2| \leq \sqrt{x - \frac{1}{4}}$.



Sl. 167.

83.2.3. a) Neka je M_1 druga presečna tačka prave QS i kruga k opisanog oko pravougaonika $ABCD$, R_1 druga presečna tačka kruga k i prave MR, a X presečna tačka pravih PQ i RS, sl.167. Kako je $\angle M_1MR_1 = 90°$, to je M_1R_1 prečnik kruga k. (Napomenimo da je M_1R_1 prečnik kruga k i u slučaju $M_1 \equiv M$.) Kako je AC prečnik kruga k, to je AM_1CR_1 pravougaonik, pa je $M_1C \perp R_1C$. Trouglovi R_1RC i MPB simetrični su u odnosu na simetralu duži BC, a trouglovi ASM_1 i BQM simetrični su u odnosu na simetralu duži AB. Zato je $RC = PB = MQ = SM_1$, a kako je $RC \parallel SM_1$, to je SM_1CR paralelogram, pa sledi $RS \parallel CM_1$. Dalje je

$$PR_1 = PR + RR_1 = PR + PM = BC + QB = QC,$$

pa kako je $PR_1 \parallel QC$, to je i $PQCR_1$ paralelogram, a odatle sledi $PQ \parallel R_1C$. Kako je $PQ \parallel R_1C$, $RS \parallel CM_1$ i $CM_1 \perp R_1C$, to je $PQ \perp RS$. Analogno se dokazuje da je $PS \perp QR$.

b) Iz uslova zadatka i dokazanog sledi da su uglovi QMR, QXR i QCR pravi. Prema tome, tačke Q, C, R, X, M pripadaju istom krugu. Uglovi SAP, SXP i SMP su takođe pravi, pa i tačke S, M, P, X, A takođe pripadaju istom krugu. Zato je

$$\begin{aligned} \angle RXC &= \angle RQC \quad \text{(kao uglovi nad istim lukom)} \\ &= \angle APS \quad \text{(kao uglovi sa normalnim kracima)} \\ &= \angle AXS \quad \text{(kao uglovi nad istim lukom),} \end{aligned}$$

pa kako tačka X pripada pravoj SR, to ona pripada i pravoj AC. Dakle presek pravih PQ i SR pripada dijagonali AC.

83.2.4. Strategija prvog igrača je sledeća: Ako je n neparan broj, onda on u prvom potezu premešta žeton sa polja $n-2$ na polje 1. Tada se između žetona na polju 1 i žetona na poljima $n-1$ i n nalazi paran broj (tačnije, $n-3$) polja. Ako je n paran broj, onda u prvom potezu premešta žeton sa polja n na polje 1, pri čemu između žetona na polju 1 i žetona na poljima $n-2$ i $n-1$ ostaje paran broj (tačnije, $n-4$) polja. U daljem toku igre posle svakog poteza drugog igrača prvi igrač premešta poslednji žeton na polje koje je susedno polju na kome stoji drugi žeton, ispred ili iza, tako da broj praznih polja između prvog i ostala dva žetona ostane paran. (Ako drugi igrač pomeri poslednji žeton za dva polja napred, pa su dva žetona i dalje susedni, onda i prvi igrač ponavlja takav potez i pri tome se posle dva takve poteza broj slobodnih polja između prvog i ostala dva žetona smanjuje za dva.) Posle konačnog broja poteza, pri čemu je poslednji potez odigrao prvi igrač, broj slobodnih polja između žetona na polju 1 i ostala dva žetona jednak je nuli. Prema tome, opisanom strategijom prvi igrač sigurno dobija igru.

83.3-4.1. Neka su x_1 i x_2 rešenja jednačine $x^2+px+q=0$.
a) Pretpostavimo da je $|x_1|=|x_2|=1$. Tada je

$$\begin{aligned}
&|p|=|x_1+x_2|\le|x_1|+|x_2|=2,\\
&|q|=|x_1x_2|=|x_1|\cdot|x_2|=1,\\
&\frac{p^2}{q}=\frac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2}=2+\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=2+x_1\overline{x}_2+x_2\overline{x}_1\\
&\quad=2+2\mathrm{Re}(x_1\overline{x}_2)\ge 2+2(-1)=0.
\end{aligned}$$

b) Pretpostavimo da je $|p|\le 2$, $|q|=1$ i da je p^2/q nenegativan realan broj. Neka je r kompleksan broj takav da važi $r^2=q$. Tada je $|r|=1$. Označimo $k=p/r$. Kako je $p^2/q=p^2/r^2=k^2$ nenegativan realan broj, to je i k realan broj i važi $|k|=|p/r|=|p|\le 2$, $k^2\le 4$ Dalje je

$$\begin{aligned}
&x_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}=\frac{-kr\pm\sqrt{k^2r^2-4r^2}}{2}=\frac{-k\pm i\sqrt{4-k^2}}{2}r,\\
&|x_1|=|x_2|=\frac{|r|}{2}\sqrt{k^2+(4-k^2)}=1.
\end{aligned}$$

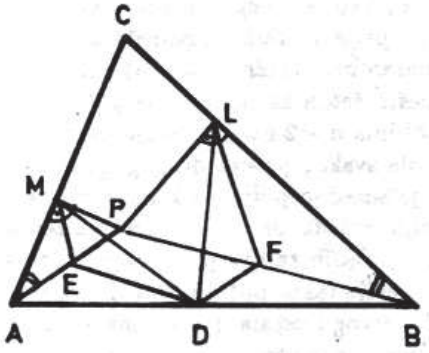
83.3-4.2. Primetimo da je

$$f(100)=f(f(100+11))=f(f(111))=f(101)=101-10=91.$$

Pretpostavimo da je $f(x)=91$ za svako $x\in\{k+1,k+2,\dots,100\}$, gde je k ceo broj manji od 100. Ako je $90<k<100$, onda je

$$f(k)=f(f(k+11))=f(k+1)=91,$$

a ako je $k \leq 90$, onda je $f(k) = f(f(k+11)) = f(91) = 91$. Na osnovu metoda matematičke indukcije dobijamo da za svaki ceo broj $k \leq 100$ važi $f(k) = 91$.



Sl. 168.

83.3-4.3. Neka su E i F redom središta duži PA i PB, sl.168. Kako su duži DE i DF srednje linije trougla ABP, to je četvorougao $EDFP$ paralelogram, a kako su duži AP i BP hipotenuze pravouglih trouglova AMP i BLP, to je $ME = EP = DF$, $DE = FP = LF$,

$$\begin{aligned}\angle MED &= \angle MEP + \angle PED \\ &= 2\angle PAC + \angle DFP \\ &= 2\angle PBC + \angle DFP = \angle DFL.\end{aligned}$$

Zato su trouglovi MED i DFL podudarni, pa sledi $DM = DL$.

83.3-4.4. a) Pretpostavimo da u nizu (x_n) ima konačno mnogo neparnih brojeva. Tada postoji indeks m, takav da je x_n paran broj za svako $n \geq m$. Neka je $x_m = 2k_0$, gde $k_0 \in \mathbf{N}$. Tada je

$$x_{m+1} = \left[\frac{3}{2}x_m\right] = \left[\frac{3}{2}2k_0\right] = 3k_0.$$

Kako je x_{m+1} paran broj, to je $k_0 = 2k_1$, gde je $k_1 \in \mathbf{N}$. Dalje je

$$x_{m+2} = \left[\frac{3}{2}x_{m+1}\right] = \left[\frac{3}{2}3k_0\right] = \left[\frac{3}{2}\cdot 3\cdot 2k_1\right] = 3^2k_1.$$

Kako je x_{m+2} takođe paran broj, to je $k_1 = 2k_2$, $k_2 \in \mathbf{N}$ i $k_0 = 2^2k_2$. Nastavljajući opisani postupak dobijamo da za svako $s \in \mathbf{N}$ postoji $k_s \in \mathbf{N}$, tako da važi $k_0 = 2^sk_s$. To je kontradikcija, jer je stepen dvojke u reprezentaciji broja k_0 u obliku proizvoda prostih brojeva konačan broj.

b) Pretpostavimo da u nizu (x_n) ima konačno mnogo parnih brojeva. Tada postoji indeks m, takav da je x_n neparan broj za svako $n \geq m$. Neka je $x_m = 2k_0+1$, $k_0 \in \mathbf{N}$. Tada je

$$x_{m+1} = \left[\frac{3}{2}(2k_0+1)\right] = 3k_0 + 1.$$

Kako je x_{m+1} neparan broj, to je $k_0 = 2k_1$, gde je $k_1 \in \mathbf{N}$. Dalje analogno kao u slučaju a) pretpostavku dovodimo do kontradikcije.

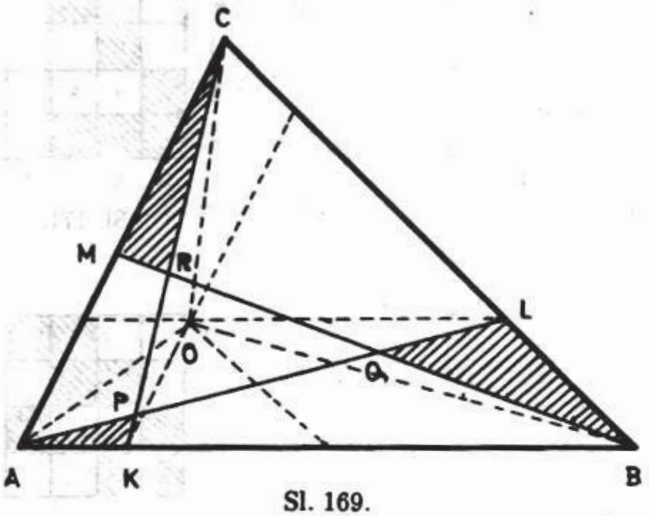
84.1.1. U brojevima $1, 2, \ldots, 99$ svaka cifra osim nule pojavljuje se po 20 puta, pa je zbir cifara broja a jednak

$$20(1+2+\cdots+9)+1+1+1 = 903.$$

Zato je broj a deljiv sa 3, a nije sa 9, pa je složen, ali nije kvadrat celog broja.

84.1.2. Iz date pretpostavke sledi

$$0=\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)\left(\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}\right)=\frac{a}{(b-c)^2}$$
$$+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}+\frac{(a+b)(a-b)+(b+c)(b-c)+(c+a)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$
$$=\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}.$$



Sl. 169.

84.1.3. Trouglovi ABL i ABO imaju zajedničku osnovicu i jednake visine, pa je $P_{ABL}=P_{ABO}$, sl.169. Slično je $P_{BCM}=P_{BCO}$ i $P_{CAK}=P_{CAO}$, pa je

$$P_{ABC}=P_{ABO}+P_{BCO}+P_{CAO}=P_{ABL}+P_{BCM}+P_{CAK}.$$

Zato je $P_{PQR}=P_{ABC}-(P_{ABL}+P_{BCM}+P_{CAK})+P_{AKP}+P_{BLQ}+P_{CMR}=P_{AKP}+P_{BLQ}+P_{CMR}$.

84.1.4. Označimo vrste date tablice sa 1,2,3,4,5, a kolone sa a,b,c,d,e, analogno uobičajenim oznakama na šahovskoj tabli, sl.170-173. Neka su boje pomenute u zadatku plava (polja obojena plavom bojom su šrafirana na slikama) i crvena. U prvoj vrsti su bar tri polja iste boje; pretpostavimo, određenosti radi, da su polja $a1$, $b1$ i $c1$ plava. Ako bi u bilo kojoj od vrsta 2–5 u prve tri kolone postojala dva plava polja (na primer, kao na sl.170, polja $a3$ i $c3$), traženi pravougaonik bio bi nađen.

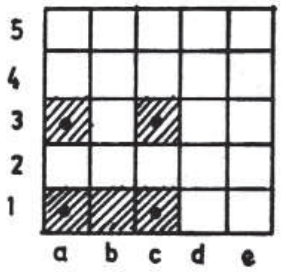
Pretpostavimo zato da su u svakoj od sledeće četiri trojke

$$(a2,b2,c2),\quad (a3,b3,c3),\quad (a4,b4,c4),\quad (a5,b5,c5)$$

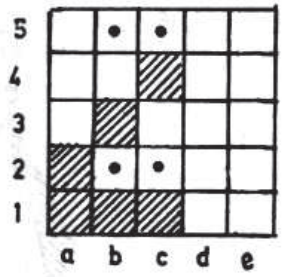
bar po dva polja crvena. Ako su u jednoj od tih trojki sva polja crvena (na sl.171. to je trojka $(a5,b5,c5)$), onda se jednobojni pravougaonik takođe lako nalazi. Ako

u svakoj od te četiri trojke ima tačno dva crvena polja, onda su bar u dve od njih ta polja jednako raspoređena, što opet daje traženi pravougaonik (na sl.172. to je $a3, c3, a5, c5$).

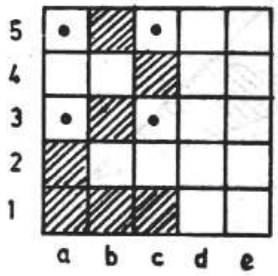
Da tvrđenje zadatka ne važi u slučaju kvadrata stranice 4 pokazuje slika 173.



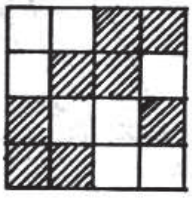
Sl. 170.



Sl. 171.



Sl. 172.



Sl. 173.

84.2.1. Primetimo najpre da iz definicije sledi da funkcija π ima sledeća svojstva:

1° $\pi(p_k) = k$ za svako $k \in \mathrm{N}$;

2° $\pi(n) \leq \pi(n+1)$ za svako $n \in \mathrm{N}$;

3° $\pi(n) < \pi(n+1)$ ako i samo ako je $n+1$ prost broj.

Da bismo dokazali da je $A \cap B = \emptyset$, pretpostavimo suprotno, da za neke prirodne brojeve m i n važi

$$m + p_m = n + \pi(n) + 1. \tag{1}$$

Razmotrimo dve mogućnosti: $p_m \leq n$ i $p_m > n$. Ako bi bilo $p_m \leq n$, onda bi iz te relacije i $m = \pi(p_m) \leq \pi(n)$ sledilo

$$m + p_m \leq n + \pi(n) < n + \pi(n) + 1,$$

što je suprotno (1). Kako je $m = \pi(p_m) > \pi(n)$, to u slučaju $p_m > n$ važi $m \geq \pi(n) + 1$ i $m + p_m > n + \pi(n) + 1$, što ponovo protivureči pretpostavci (1). Time je dokazano da je $A \cap B = \emptyset$.

Dokažimo sada da je $A \cup B = \mathbf{N} \setminus \{1\}$. Jasno je da $1 \notin A \cup B$ i da $2 \in B$. Neka je $n > 2$ proizvoljan prirodan broj koji ne pripada skupu A. Dokažimo da $n \in B$. Kako za neko $m \in \mathbf{N}$ važi $m + p_m < n < m + 1 + p_{m+1}$, odnosno $p_m \leq n - m - 1 < p_{m+1}$, to je $\pi(n - m - 1) = m$, pa sledi

$$n = \pi(n - m - 1) + (n - m - 1) + 1 \in B.$$

84.2.2. Iz $x + y + z = 2$ sledi $x + y = 2 - z$, a iz $xy + yz + zx = 1$ sledi

$$xy = 1 - z(x + y) = 1 - z(2 - z) = (1 - z)^2.$$

Zato su realni brojevi x i y rešenja kvadratne jednačine po t

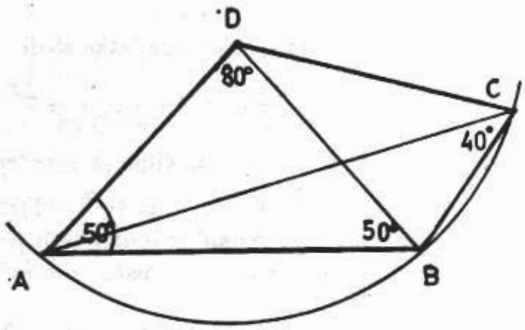
$$t^2 + (z - 2)t + (1 - z)^2 = 0,$$

koja ima nenegativnu diskriminantu $(z-2)^2 - 4(1-z)^2 \geq 0$. Odatle sledi $z(4-z) \geq 0$, što je ekvivalentno sa $z \in [0, 4/3]$. Analogno se dokazuje da brojevi x i y pripadaju segmentu $[0, 4/3]$.

84.2.3. Kako u trouglu ABD važi $\angle ABD = 50°$ i $\angle BDA = 80°$, to je $\angle DAB = 50°$, pa dalje sledi $DA = DB$, sl.174. Kako je

$$\angle BDA = 80° = 2\angle BCA$$

i tačke C i D su sa iste strane prave AB, to tačka C pripada krugu sa centrom D i poluprečnikom $DA = DB$. Zato je i trougao BCD jednakokrak, pa iz $\angle BDC + 2\angle DBC = 180°$ i date relacije $\angle DBC = \angle BDC + 30°$ sledi da je $\angle DBC = 70°$.



Sl. 174.

84.2.4. Tvrđenje zadatka ćemo dokazati matematičkom indukcijom. Nije teško proveriti da ono važi za države sa najviše tri grada. Pretpostavimo da tvrđenje važi za države sa n gradova i dokažimo da važi za proizvoljnu državu sa $n+1$ gradom.

Označimo te gradove sa $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$. Prema induktivnoj pretpostavci, u delu države koji sadrži samo gradove $A_1, A_2, \ldots, A_n$ postoji grad (neka je to, na primer, A_n) iz koga se u svaki drugi grad A_i $(1 \leq i \leq n - 1)$ može stići sa najviše jednim presedanjem. U daljem će $A_i \to A_j$ značiti da avionska linija vodi iz grada A_i u grad A_j.

Ako važi $A_n \to A_{n+1}$, onda je A_n grad sa traženim svojstvom. Pretpostavimo da važi $A_{n+1} \to A_n$. Jasno je da iz grada A_n polazi bar jedna avionska linija.

Gradove $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ numerišemo tako da važi $A_n \to A_i$ za $1 \le i \le k$ i $A_i \to A_n$ za $k \le i \le n-1$, gde je $1 \le k \le n-1$. Ako za neko $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ važi $A_i \to A_{n+1}$, onda je opet A_n grad sa traženim svojstvom. Ako je, međutim, $A_{n+1} \to A_i$ za sve $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, onda grad A_{n+1} ima osobinu da se iz njega u svaki drugi može stići sa najviše jedním presedanjem. Zaista, da bismo iz njega stigli u neki od gradova A_j za koji je $k+1 \le j \le n-1$, možemo umesto maršrute $A_n \to A_i \to A_j$ (koja, za neko $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, postoji po induktivnoj pretpostavci) koristiti maršrutu $A_{n+1} \to A_i \to A_j$.

84.3-4.1. Direktno se proverava da je $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 0$, $a_4 = 4$, $a_5 = 0$, $a_6 = 0$, $a_7 = 0$, $a_8 = 8$, $a_9 = 0$. Dokažimo da je

$$a_n = \begin{cases} n, & n = 2^k \text{ za neko } k \in \mathbf{N} \cup \{0\}, \\ 0, & n \ne 2^k \text{ za sve } k \in \mathbf{N} \cup \{0\}. \end{cases}$$

Za $n = 1$ to je tačno. Pretpostavimo da to tvrđenje važi za sve prirodne brojeve manje ili jednake od nekog $n \in \mathbf{N}$. Neka je $n + 1 = 2^r s$, gde je s neparan broj. Razmotrimo dve mogućnosti:

a) $s = 1$, tj. $n + 1 = 2^r$. Tada se uslov zadatka, uz korišćenje induktivne pretpostavke, svodi na

$$1 + (1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{r-1}) - a_{n+1} = 0,$$

odakle sledi $a_{n+1} = 2^r = n + 1$.

b) $s > 1$. Sada iz uslova zadatka sledi

$$1 + (1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{r-1}) - 2^r - a_{n+1} = 0,$$

pa sledi $a_{n+1} = 2^r - 2^r = 0$, čime je navedeno tvrđenje induktivno dokazano.

84.3-4.2. Označimo $t = (\sqrt{5} - 1)/2$ i primetimo da je $t^2 + t = 1$. Lako je dokazati da ni za jedan prirodan broj n data jednačina ne može imati više od jednog celobrojnog rešenja. Zaista, ako bi za neka dva para (x, y) i (x', y') celih brojeva važilo

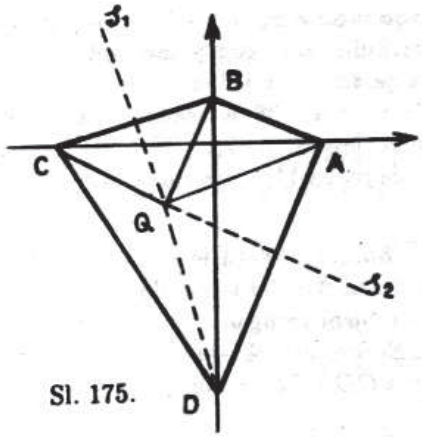
$$t^n x + t^{n+1} y = 1, \quad t^n x' + t^{n+1} y' = 1,$$

sledilo bi $t^n(x - x') + t^{n+1}(y - y') = 0$, odnosno $(x - x') + t(y - y') = 0$, što je, zbog iracionalnosti broja t mogućno jedino za $x = x'$ i $y = y'$.

Dokažimo sada indukcijom da za svaki prirodan broj n data jednačina ima celobrojno rešenje. Za $n = 1$ to rešenje je $x = 1, y = 1$. Pretpostavimo da je $t^{n-1}x_{n-1} + t^n y_{n-1} = 1$ za cele brojeve x_{n-1} i y_{n-1}. Tada za $x_n = x_{n-1} + y_{n-1}$ i $y_n = x_{n-1}$ važi

$$\begin{aligned} t^n x_n + t^{n+1} y_n &= t \cdot t^{n-1} x_{n-1} + t^n y_{n-1} + t^2 t^{n-1} x_{n-1} \\ &= t^{n-1} x_{n-1} + t^n y_{n-1} = 1, \end{aligned}$$

pa je par (x_n, y_n) celih brojeva rešenje jednačine $t^n x + t^{n+1} y = 0$, čime je dokaz završen.



Sl. 175.

84.3-4.3. Iz uslova zadatka sledi da rotacija oko tačke P za $90°$ preslikava tačku A u tačku B, a tačku C u tačku D, znači duž AC u duž BD, pa je $AC = BD$ i $AC \perp BD$. Uvedimo koordinatni sistem čiji je početak presek O pravih AC i BD, tako da tačka A pripada pozitivnom delu x-ose, a tačka B pozitivnom delu y-ose, sl.175. Bez ograničenja opštosti možemo pretpostaviti da je $AC = BD = 1$. Neka tačke A i B imaju redom koordinate $(a, 0)$ i $(0, b)$. Tada tačke C i D imaju redom koordinate $(a-1, 0)$ i $(0, b-1)$. Prava BC ima koeficijent pravca $b/(1-a)$, pa simetrala s_1 duži BC koja sadrži središte $((a-1)/2, b/2)$ te duži ima jednačinu

$$y - \frac{b}{2} = \frac{a-1}{b}\left(x - \frac{a-1}{2}\right).$$

Slično se dobija da simetrala s_2 duži DA ima jednačinu

$$y - \frac{b-1}{2} = \frac{a}{b-1}\left(x - \frac{a}{2}\right).$$

Prave s_1 i s_2 imaju zajedničku tačku $Q\left(\frac{a+b-1}{2}, \frac{a+b-1}{2}\right)$. Direktna provera pokazuje da je $BQ \perp CQ$ i $DQ \perp AQ$, pa tačka Q zadovoljava sve uslove zadatka.

84.3-4.4. Neka je $\{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ familija različitih nepraznih podskupova skupa $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ koja ima osobinu da je presek bilo koja tri njena elementa prazan. Tada svaki član skupa S može biti element najviše dva od skupova $S_1, S_2, \ldots, S_m$. Ako sa $|S_i|$ označimo broj elemenata skupa S_i, to znači da je $\sum_{i=1}^{n} |S_i| \leq 2n$.

S druge strane, ako sa k označimo broj jednočlanih podskupova S_i koji su članovi date familije, tada je

$$\sum_{i=1}^{m} |S_i| \geq k + 2(m-k).$$

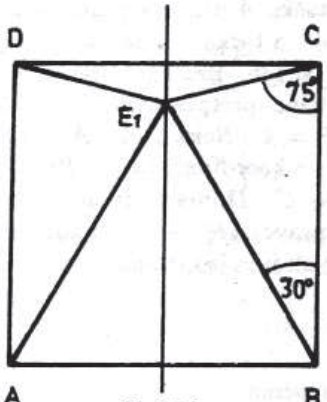
Koristeći ovu i prethodno dobijenu nejednakost dobijamo $2m \leq 2n + k$ pa, zbog $k \leq n$, sledi $2m \leq 3n$ i $m \leq [3n/2]$

Primer familije čiji su članovi

$$\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}, \{1,2\}, \{3,4\}, \ldots, \left\{2\left[\frac{n}{2}\right]-1, 2\left[\frac{n}{2}\right]\right\}$$

pokazuje da je tražena maksimalna vrednost za m jednaka $[3n/2]$.

85.1.1. Neka je n prirodan broj. Među brojevima $n, n+1, \ldots, n+19$ postoje dva, kod kojih je poslednja cifra jednaka nuli. Bar kod jednog od tih brojeva pretposlednja cifra nije jednaka 9. Neka je taj broj jednak a i neka je S zbir njegovih cifara. Tada je $a+19 \leq n+19+19 = n+38$, a izračunavanjem zbirova cifara brojeva $a, a+1, \ldots, a+19$ dobijamo brojeve $S, S+1, \ldots, S+10$. Kako među 11 uzastopnih brojeva postoji broj koji je deljiv sa 11, to je zbir cifara bar jednog od brojeva $n, n+1, \ldots, n+38$ deljiv sa 11.



Sl. 176.

85.1.2. Neka je E_1 unutrašnja tačka kvadrata $ABCD$ takva da je ABE_1 jednakostranični trougao, sl.176. Tada su CDE_1 i CE_1B jednakokraki trouglovi (sa osnovicama CD i CE_1 redom) i važi

$$\begin{aligned}\angle CE_1D &= 180^\circ - 2\angle E_1CD \\ &= 180^\circ - 2(90^\circ - \angle E_1CB) \\ &= 2\angle E_1CB = 180^\circ - \angle E_1BC \\ &= 180^\circ - (90^\circ - 60^\circ) = 150^\circ.\end{aligned}$$

Zato je $E_1 = E$, pa su svi uglovi trougla ABE jednaki 60°.

85.1.3. Neka je l proizvoljna prava koja nije paralelna nijednoj od pravih koje su određene datim tačkama. Označimo sa $l_1, l_2, \ldots, l_{3000}$ prave od kojih svaka sadrži po jednu od datih tačaka, a sve su paralelne pravoj l, ali tako da se između pravih l_i i l_{i+1} ne nalazi nijedna druga od tih pravih i to za svako $i \in \{1, 2, 3, \ldots, 2999\}$. Za svako $k \in \{1, 2, \ldots, 3000\}$ označimo sa a_k onu od datih tačaka koja pripada pravoj l_k. Trouglovi $A_1A_2A_3$, $A_4A_5A_6$, $\ldots$, $A_{2998}A_{2999}A_{3000}$ su međusobno disjunktni.

85.1.4. Neka su x, y, z, u pozitivni brojevi. Elementarnim transformacijama se dobija da važi nejednakost

$$\frac{xy}{x+y} + \frac{zu}{z+u} \leq \frac{(x+z)(y+u)}{x+y+z+u}.$$

Stavljajući $x = a, y = b, z = c, u = d$, a zatim $x = a+c, y = b+d, z = c, u = f$, dobijamo

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{cd}{c+d} + \frac{ef}{e+f} \leq \frac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d} + \frac{ef}{e+f} \leq \frac{(a+c+e)(b+d+f)}{a+b+c+d+e+f}.$$

85.2.1. Traženi broj n je oblika

$$n = c\underbrace{99\ldots9}_{k}8\underbrace{99\ldots9}_{l},$$

pri čemu je l najmanji prirodan broj za koji važi $1985 \mid 9l - 1$, a k je najmanji prirodan broj takav da za neko $c \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ važi $1985 = 9(k+1) + c$. Iz uslova $9l - 1 = 1985s = 9 \cdot 220s + 5s$ dobijamo traženi broj $l = 1544$ za $s = 7$. Dalje lako dobijamo $k = 219, c = 5$.

85.2.2. Primetimo da za svaki prirodan broj m postoji prirodan broj n takav da važi $n^2 \leq m < n^2 + 2n = (n+1)^2 - 1$. Ako je $m = n^2$, onda je

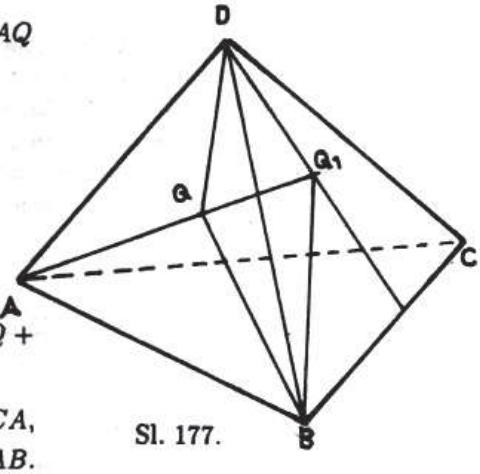
$$\begin{aligned}
f(m) &= f(n^2) = n^2 + n,\\
f^2(n^2) &= n^2 + 2n,\\
f^3(n^2) &= n^2 + 3n = (n+1)^2 + n - 1,\\
f^5(n^2) &= (n+1)^2 + n - 1 + 2(n+1) = (n+2)^2 + n - 2,\\
f^7(n^2) &= (n+2)^2 + n - 2 + 2(n+2) = (n+2)^3 + n - 3,\\
&\ldots\ldots\\
f^{2n-1}(n^2) &= (n+n-1)^2 + 1,\\
f^{2n+1}(n^2) &= (2n-1)^2 + 1 + 2(2n-1) = (2n)^2.
\end{aligned}$$

Slično se za $m = n^2 + ln + k$, gde $l \in \{0, 1\}$, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ dobija

$$f^{2k-l}(m) = f^{2k-l}(n^2 + ln + k) = (m+k)^2.$$

85.2.3. Neka je Q_1 presek prave AQ i ravni PBC, sl.177. Tada je

$$\begin{aligned}
&\angle ABP + \angle PBC\\
&= \angle ABP + \angle PBQ_1 + \angle Q_1BC\\
&> \angle ABQ_1 + \angle Q_1BC\\
&= \angle ABQ + \angle QBQ_1 + \angle Q_1BC\\
&> \angle ABQ + \angle QBC.
\end{aligned}$$



Sl. 177.

Prema tome $\angle ABP + \angle PBC > \angle ABQ + \angle BQC$ i analogno

$$\angle BCP + \angle PCA > \angle BCQ + \angle QCA,$$
$$\angle CAP + \angle PAB > \angle CAQ + \angle QAB.$$

Sabiranjem ove tri nejednakosti dobijamo $\alpha_1 > \alpha_2$, gde je

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \angle ABP + \angle PBC + \angle BCP + \angle PCA + \angle CAP + \angle PAB,\\
\alpha_2 &= \angle ABQ + \angle QBC + \angle BCQ + \angle QCA + \angle CAQ + \angle QAB.
\end{aligned}$$

Na osnovu toga sledi

$$\begin{aligned}
\angle BQC + \angle CQA + \angle AQB &= 3 \cdot 180^\circ - \alpha_2\\
&> 3 \cdot 180^\circ - \alpha_1 = \angle BPC + \angle CPA + \angle APB.
\end{aligned}$$

85.2.4. Neka je $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset \{1, 2, \ldots, 100\}$, gde je

$$1 = a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n = 100$$

i neka za skup M važi uslov b). Tada je

$$a_2 = 2,\ a_3 \le 4,\ a_4 \le 8,\ a_5 \le 16,\ a_6 \le 32,\ a_7 \le 64.$$

Ako $50 \notin M$, onda zbog $a_6 + a_7 < 100$ sledi $n > 8$, tj. $n \ge 9$. Ako je $a_k = 50 \in M$, za neki indeks k, onda zbog $a_5 + a_6 \le 48 < 50$ sledi $k > 7$, tj. $k \ge 8$, pa je $n \ge 9$. Neposredno se proverava da za skupove

$$M_1 = \{1, 2, 4, 6, 10, 20, 40, 60, 100\},$$
$$M_2 = \{1, 2, 3, 6, 12, 13, 25, 50, 100\},$$

važe svi uslovi zadatka. Zato je traženi broj jednak 9.

85.3-4.1. Treba odrediti sve trojke (x, y, z) za koje važi

$$x, y, z \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}, \quad (x, y, z) \ne (0, 0, 0),$$
$$100x + 10y + z = x! + y! + z!.$$

Ako je (x, y, z) jedna takva trojka, onda je $x \le 5, y \le 5, z \le 5$ i $x! + y! + z! \le 3 \cdot 5! = 360$. (U protivnom je $x! + y! + z! \ge 6! = 720$, pa je $x! \ge 7! = 5040$, što je kontradikcija.) Proverom za brojeve 55, 155, 255, 355 lako se dobija da nijedan od njih nije rešenje, tj. da je najviše jedan od brojeva x, y, z jednak 5.

a) Neka je tačno jedan od brojeva x, y, z jednak 5. Lako se proverava da nisu oba od ostalih brojeva jednaki 4. Zato je

$$120 \le x! + y! + z! \le 5! + 4! + 3! = 150.$$

Proverom za brojeve 125, 135, 145, 155 dobijamo da je 145 jedino rešenje.

b) Neka je $x \le 4$, $y \le 4$, $z \le 4$. Proverom dobijamo da su trojke $(0, 0, 1)$ i $(0, 0, 2)$ jedina rešenja u ovom slučaju.

Svi traženi brojevi su 1, 2 i 145.

85.3-4.2. Neka je $P(t) = Q_1(t)(t^4 - t^2) + at^3 + bt^2 + ct + d$. Iz uslova zadatka sledi da za svaki realan broj x važi

$$\begin{aligned} P(\sin x) - P(\cos x) &= \sin^2 x \cos^2 x[Q_1(\cos x) - Q_1(\sin x)] \\ &\quad + (\sin x - \cos x)[a \sin x \cos x + b(\sin x + \cos x) + a + c] = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

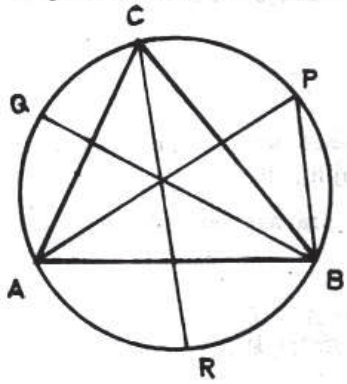
Iz jednakosti (1) za $x = 0$ dobijamo $a + b + c = 0$, a za $x = \pi$ dobijamo $a - b + c = 0$, pa lako sledi $a + c = 0$, $b = 0$. Jednakost (1) prima oblik

$$\sin^2 x \cos^2 x[Q_1(\sin x) - Q_1(\cos x)] = a(\sin x - \cos x) \sin x \cos x. \tag{2}$$

Pošto jednakost (2) važi za svaki realan broj x, a funkcije $\sin x$, $\cos x$ i $Q_1(t)$ su neprekidne, to i jednakost

$$\sin x \cos x[Q_1(\sin x) - Q_1(\cos x)] = a(\sin x - \cos x) \tag{3}$$

važi za svaki realan broj x Iz jednakosti (3) za $x = 0$ dobijamo $a = 0$, pa kako je $a + c = 0$, to je i $c = 0$. Prema tome, $P(t) = Q_1(t)(t^4 - t^2) + d$, a iz jednakosti (3) sledi da za svaki realan broj x važi $Q_1(\sin x) = Q_2(\cos x)$. Tvrđenje zadatka se dalje lako dokazuje matematičkom indukcijom po stepenu polinoma P.



Sl. 178.

85.3-4.3. Na osnovu sinusne teoreme dobijamo

$$AB = 2r\sin\gamma,$$
$$BC = 2r\sin\alpha,$$
$$CA = 2r\sin\beta,$$

gde je r poluprečnik opisanog kruga trougla ABC. Dalje je (sl.178.)

$$\angle ABP = \angle ABC + \angle CBP$$
$$= \beta + \angle CAP = \beta + \frac{\alpha}{2},$$

pa sledi $AP = 2r\sin\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)$. Analogno dobijamo $BQ = 2r\sin\left(\gamma + \frac{\beta}{2}\right)$, $CR = 2r\sin\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)$. Dalje je $\beta + \gamma < \pi$, pa sledi

$$\frac{CA + AB}{2} = r(\sin\beta + \sin\gamma) = 2r\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2} < 2r\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$$
$$= 2r\sin\left(\frac{\beta-\gamma}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 2r\sin\left(\frac{\beta-\gamma}{2} + \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right) = 2r\sin\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right) = AP.$$

Analogno dokazujemo

$$\frac{AB + BC}{2} < BQ, \quad \frac{BC + CA}{2} < CR.$$

Sabirajući ove tri nejednakosti dobijamo $AB + BC + CA < AP + BQ + CR$.

85.3-4.4. Neka su m_i i M_i redom najmanji i najveći broj u i–toj koloni i neka je

$$m = \max_{1\le i\le n} m_i, \qquad M = \min_{1\le i\le n} M_i.$$

Razmotrimo sledeća dva slučaja

a) $m \le M$. Tada svaka kolona sadrži svaki od brojeva $m, m+1, \ldots, M$.

b) $m > M$. Neka je $m_i = m$ i $M_j = M$, gde je $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Neka je dalje k proizvoljan broj iz skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$, a a_{ki} i a_{kj} brojevi koji se nalaze u preseku k-te vrste redom sa i-tom i j-tom kolonom. Tada je

$$a_{ki} \geq m_i = m > M = M_j \geq a_{kj}.$$

Prema tome, u k-toj vrsti se između brojeva a_{ki} i a_{kj} nalazi broj $M + 1$, tj. taj broj je sadržan u svakoj vrsti.

85.MO.1. Neka je $k = \max\{|S_1|, |S_2|, \ldots, |S_n|\}$ i neka je, na primer, $|S_1| = k$. Ako je $S_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, onda iz uslova a) sledi

$$1 \in S_{a_1} \cap S_{a_2} \cap \cdots \cap S_{a_k},$$

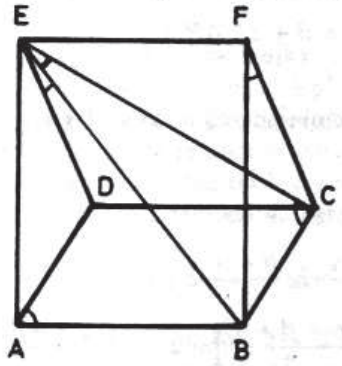
a iz uslova b) sledi da su brojevi $|S_{a_1}|, |S_{a_2}|, \ldots, |S_{a_k}|$ međusobno različiti. Kako ti brojevi pripadaju skupu $\{1, 2, \ldots, k\}$, to je jedan od njih jednak 1.

85.MO.2. Neka je F tačka, takva da je $ABFE$ pravougaonik. Razmotrimo sledeće slučajeve:

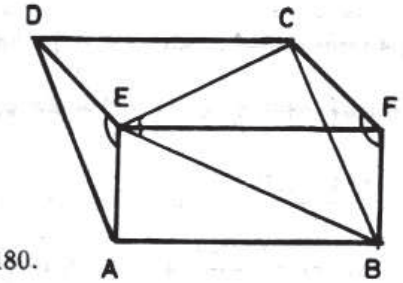
a) $\angle BAD \leq 90°$, sl.179.

b) $\angle BAD > 90°$, tačka E je unutar paralelograma $ABCD$, sl.180.

c) $\angle BAD > 90°$, tačka E je van paralelograma $ABCD$, sl.181.



Sl. 179.



Sl. 180.

U svakom od ovih slučajeva važi

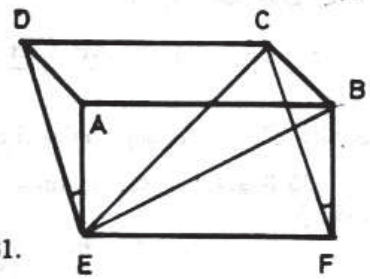
$$\angle EAD = \angle FBC$$

(uglovi sa paralelnim kracima) i

$$AE = BF, \quad AD = BC.$$

Zato je $\triangle ADE \cong \triangle BCF$, pa sledi

$$\angle AED = \angle BFC.$$



Sl. 181.

Kako je $\angle BCE = \angle BFE = 90°$, to tačke B, C, E, F pripadaju krugu sa prečnikom BE. U slučajevima a) i c) $\angle BEC$ i $\angle BFC$ su periferijski uglovi nad istim lukom

tog kruga, a u slučaju b) ti uglovi su periferijski nad komplementarnim lucima. Zato u slučajevima a) i c) važi $\angle BEC = \angle BFC = \angle AED$, a u slučaju b) važi $\angle BEC + \angle AED = \angle BEC + \angle BFC = 180°$.

85.MO.3. Lako se dokazuje da je nejednakost

$$2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ad + bc + cd) \geq (a + b + c + d)^2$$

tačna, jer je ekvivalentna nejednakosti $(a - c)^2 + (b - d)^2 \geq 0$ i da za pozitivne brojeve x i y važi $1/(xy) \geq [2/(x + y)]^2$. Na osnovu toga dobijamo

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} = \frac{a(d+a) + c(b+c)}{(b+c)(d+a)} + \frac{b(a+b) + d(c+d)}{(c+d)(a+b)}$$
$$\geq \frac{4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ad + bc + cd)}{(a+b+c+d)^2} \geq 2.$$

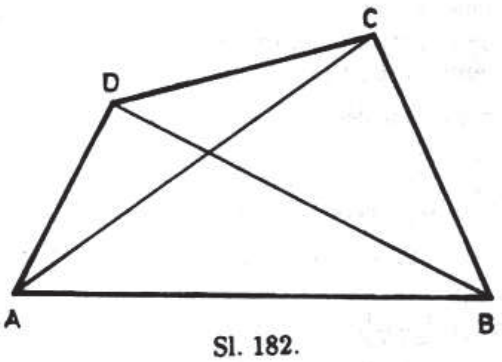
Jednakost važi ako i samo ako je $a = c$ i $b = d$.

86.1.1. Primetimo da za proizvoljan prirodan broj n važi

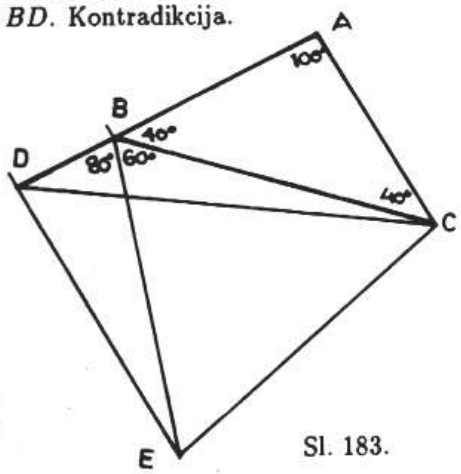
$$n^2 + n^2 = 2n^2, \quad (n-1)^2 + (n+1)^2 = 2n^2 + 2.$$

Zato je dovoljno dokazati da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva n, takvih da za neke cele brojeve a i b važi: $(n-a)^2 + (n-b)^2 = 2n^2 + 1$, odnosno $2n(a-b) = a^2 + b^2 - 1$. Ako za proizvoljan prirodan broj b uzmemo $a = b + 1$ i $n = b(b+1)$, važiće te relacije.

86.1.2. Pretpostavimo da je $AB > AC$. Tada je $AC + BD < AB + BD \leq AC + CD$, pa je $BD < CD$, sl.182. Međutim, iz $AB > AC$ sledi i $\angle DBC < \angle ABC < \angle ACB < \angle DCB$, odakle je $SD < BD$. Kontradikcija.



Sl. 182.



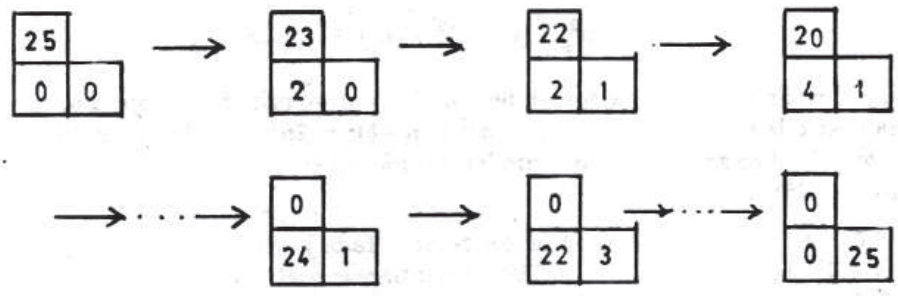
Sl. 183.

86.1.3. Neka je E tačka sa one strane prave BC sa koje nije A, takva da je trougao BCE jednakostraničan, sl.183. Kako je $\angle CAD = \angle ECA = 100°$ i

$AD = BC = EC$, to je četvorougao$DECA$ jednakokraki trapez. Zato je $\angle EDB = 80^\circ = \angle EBD$, pa je $EB = ED$. Dakle, tačka E je centar kruga opisanog oko trougla BCD. Odatle sledi $\angle BCD = \frac{1}{2}\angle BED = \frac{1}{2}20^\circ = 10^\circ$. Uglovi trougla ADC su 100°, 30° i 50°.

86.1.4. Obojimo polja datog kvadrata crno-belo kao na šahovskoj tabli, tako da su ugaona polja crna. Tada ukupno ima 13 crnih i 12 belih polja. Pri svakom pomeranju žetona na susedno polje menja se boja polja na kojem se on nalazi. Zato se pri povlačenju svakog dozvoljenog poteza ne menja parnost broja žetona koji se nalaze, kako na belim, tako i na crnim poljima. Odatle zaključujemo da se svih 25 žetona ne mogu naći ni na jednom belom polju.

Dokažimo da se svi žetoni mogu naći na bilo kom crnom polju. Najpre, svi žetoni se mogu dovesti na centralno polje na sledeći način: svakim potezom neka dva žetona koji su raspoređeni simetrično u odnosu na centar kvadrata premeštaju se na polja bliže centru koja su takođe simetrična u odnosu na centar (polje je bliže centru, ako se iz njega do centralnog polja može stići sa manjim brojem premeštanja).



Sl. 184.

Da bismo dokazali da se svi žetoni mogu premestiti na proizvoljno crno polje, dovoljno je dokazati da se svih 25 žetona sa nekog crnog polja mogu premestiti dozvoljenim potezima na crno polje koje sa prethodnim ima zajedničko teme. To se postiže, na primer, potezima prikazanim na sl. 184.

86.2.1. Iz pretpostavke $2x^2 + x = 3y^2 + y$ sledi

$$x^2 = x - y + 3x^2 - 3y^2 = (x - y)(3x + 3y + 1),$$
$$y^2 = x - y + 2x^2 - 2y^2 = (x - y)(2x + 2y + 1).$$

Kako su brojevi $3x + 3y + 1 = 3(x + y) + 1$ i $2x + 2y + 1 = 2(x + y) + 1$ uzajamno prosti, to odatle dobijamo da je

$$x - y = NZD(x^2, y^2) = [NZD(x, y)]^2.$$

Koristeći ponovo navedene izraze za x^2 i y^2 izvodimo da su i brojevi $3x + 3y + 1$ i $2x + 2y + 1$ potpuni kvadrati.

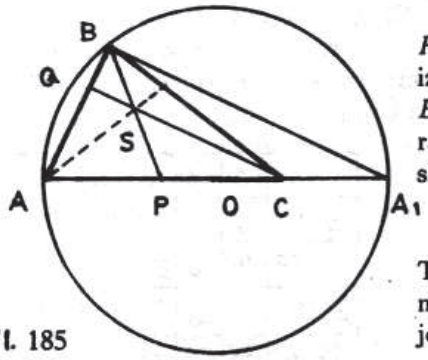
86.2.2. Primetimo najpre da za proizvoljne pozitivne brojeve x i y važi nejednakost $\dfrac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2} \geq \dfrac{x+y}{3}$, pri čemu jednakost važi ako i samo ako je $x = y$. Zaista ta nejednakost se može transformisati u ekvivalentnu nejednakost $2(x+y)(x-y)^2 \geq 0$. S druge strane, lako se proverava da važi

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2}$$
$$= \frac{b^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{c^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{a^3}{c^2+ca+a^2}.$$

Na osnovu ovog identiteta i navedene nejednakosti dobijamo

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3+a^3}{c^2+ca+a^2}\right)$$
$$\geq \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{3} + \frac{b+c}{3} + \frac{c+a}{3}\right) = \frac{a+b+c}{3}.$$

Jednakost važi ako i samo ako je $a = b = c$.



Sl. 185

86.2.3. Neka je O centar datog kruga, P središte stranice CA, Q podnožje visine iz temena C trougla ABC i S presek pravih BP i CQ, sl.185. Prave CQ i A_1B su paralelne, jer su obe normalne na AB. Odatle sledi

$$\frac{PS}{SB} = \frac{PC}{CA_1} = \frac{AP}{AB}.$$

To znači da je prava AS simetrala unutrašnjeg ugla kod temena A trougla ABP, što je i trebalo dokazati.

86.2.4. Neka su to brojevi a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 i neka je $0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$. Pretpostavimo, suprotno tvrđenju zadatka, da su za proizvoljna dva od tih brojeva njihov zbir ili modul razlike jednaki nekom od datih brojeva. Kako za svako $i \in \{1,2,3,4\}$ važi $a_5 + a_i > a_5$, to mora biti $a_5 - a_i \in \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Tačnije, važi $a_5 - a_1 = a_4$ i $a_5 - a_2 = a_3$. Brojevi $a_4 + a_2$ i $a_4 + a_3$ su veći od $a_4 + a_1 = a_5$, pa brojevi $a_4 - a_2$ i $a_4 - a_3$ pripadaju skupu $\{a_1, a_2, a_3\}$. Međutim važi

$$a_4 - a_3 < a_4 - a_2 = (a_5 - a_1) - (a_5 - a_3) = a_3 - a_1 < a_3,$$

pa je $a_4 - a_2 = a_2$, što je kontradikcija.

86.3-4.1. Iz uslova a) sledi da za sve realne brojeve x, y važi

$$f(x + f(y)) = f(x+y) + 1 = f(y+x) + 1 = f(y + f(x)). \qquad (1)$$

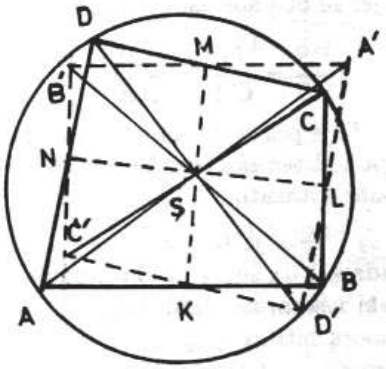
Na osnovu b) funkcija f je injektivna, pa na osnovu (1) sledi $x + f(y) = y + f(x)$. Specijalno, stavljajući $y = 0$, dobijamo da za svaki realan broj x važi $f(x) = x + f(0)$. Ponovo koristeći uslov a) dobijamo $x + f(y) + f(0) = x + y + f(0) + 1$, odnosno $f(y) = y + 1$ za svaki realan broj y. Jasno je da ta funkcija zadovoljava oba uslova zadatka.

86.3-4.2. Ako je $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$, onda iz date relacije sledi $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. Pretpostavimo da je $x_1 + x_2 + \cdots + x_n > 0$. (Slučaj $x_1 + x_2 + \cdots + x_n < 0$ razmatra se analogno.) Dokažimo da je $x_i \geq 0$ za sve $i = 1, 2, \ldots, n$. Pretpostavimo, suprotno, da je, na primer, $x_n < 0$. Primenjujući nejednakost između aritmetičke i kvadratne sredine dobijamo

$$\begin{aligned}(x_1 + \cdots + x_n)^2 &< (x_1 + \cdots + x_{n-1})^2 \\ &\leq (n-1)(x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2) < (n-1)(x_1^2 + \cdots + x_n^2),\end{aligned}$$

što je suprotno datoj relaciji. Dobijena kontradikcija dokazuje tvrđenje zadatka.

86.3-4.3. Neka su K, L, M, N, redom, središta stranica AB, BC, CD, DA tetivnog četvorougla $ABCD$ i neka je S presek dijagonala paralelograma $KLMN$, sl.186. Označimo sa A', B', C', D', redom, tačke simetrične tačkama A, B, C, D u odnosu na tačku S. Tada su prave CD i $C'D'$ paralelne, a tačka K je simetrična središtu M duži CD u odnosu na S, pa se poklapa sa središtem duži $C'D'$. Zato je prava koja sadrži tačku K, a normalna je na CD ujedno simetrala duži $C'D'$. Slično su i ostale tri normale simetrale odgovarajućih stranica četvorougla $A'B'C'D'$. Kako je taj četvorougao tetivni (jer je simetričan tetivnom četvorouglu $ABCD$), to se te četiri normale sěku u središtu kruga koji je oko njega opisan.



Sl. 186.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Sl. 187.

86.3-4.4. Na sl.187. su brojevi $1, 2, \ldots, 64$ upisani u polja date tablice tako da razlika brojeva upisanih u ma koja dva susedna polja nije veća od 9. To znači da je $k \leq 9$.

Dokažimo da je $k = 9$. Ma kako upisali date brojeve u polja tablice, od polja sa brojem 1 do polja sa brojem 64 može da se stigne u najviše 7 koraka, pri čemu se u svakom koraku prelazi na susedno polje. Kako je $(64 - 1)/7 = 9$, to postoje

dva susedna polja, takva da razlika u njih upisanih brojeva nije manja od 9. Odatle sledi da je $k > 8$, dakle i $k = 9$.

87.1.1. Elementarnim transformacijama i primenom nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine dobijamo

$$\frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{4}(a+b) - a\sqrt{b} - b\sqrt{a} = \frac{a+b}{2}\left(a+b+\frac{1}{2}\right) - \sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$$
$$\geq \sqrt{ab}\left(a+b+\frac{1}{2}-\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = \sqrt{ab}\left[\left(\sqrt{a}-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{b}-\frac{1}{2}\right)^2\right] \geq 0.$$

87.1.2. Neka je P površina trougla ABC. Iz uslova zadatka sledi $a > b > h_a$ i $2P = ah_a = bh_b < ab$. Zato je $\frac{2P}{ab}(a-b) < a-b$, odakle sledi $h_b - h_a < a - b$, tj. $b + h_b < a + h_a$.

87.1.3. Neka je $x = k + \alpha$, gde $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, $0 \leq \alpha < 1$. Datu jednačinu možemo zapisati u obliku $k^2 + 2k\alpha = [k^2 + 2k\alpha + \alpha^2]$. Broj $x = k + \alpha$, gde je k fiksiran broj i $0 \leq \alpha < 1$, jeste rešenje te jednačine ako i samo ako je $2k\alpha$ ceo broj, tj. ako i samo ako

$$\alpha \in \left\{0, \frac{1}{2k}, \frac{2}{2k}, \ldots, \frac{2k-1}{2k}\right\}.$$

Prema tome, broj rešenja u intervalu $[k, k+1)$ jednak je $2k$. Kako je $x = n$ rešenje, to je traženi broj jednak

$$1 + 2[1 + 2 + \cdots + (n-1)] = 1 + (n-1)n = n^2 - n + 1.$$

87.1.4. Ako se promeni jedan broj u temenu, menjaju se i tri broja na stranama kocke, a zbir se menja za $+8, +4, 0, -4$ ili -8, dakle za broj koji je deljiv sa 4. Ako su sva temena označena jedinicama, onda je zbir svih 14 dobijenih brojeva jednak 14. Dalje sledi da zbir uvek pri deljenju sa 4 daje ostatak 2, pa ne može biti jednak ni 7, ni 0.

87.2.1. Pretpostavimo da postoji konačno mnogo prostih brojeva koji mogu biti činioci brojeva oblika $x^2 + x + 1$, gde je x ceo broj i neka su $p_1, p_2, \ldots, p_n$ svi takvi brojevi. To je kontradikcija jer broj $(p_1p_2\ldots p_n)^2 + p_1p_2\ldots p_n + 1$ nije deljiv nijednim od brojeva $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

87.2.2. Neka je X presečna tačka duži MN i AC, a Y presečna tačka duži MN i BD i neka je, na primer, $\angle BAD < 90°$, sl.188. (Analogno se razmatra slučaj $\angle BAD > 90°$. Ako je $\angle BAD = 90°$, onda je $M = D$ i $N = B$, pa tvrđenje očigledno važi.) Tada je

$$\frac{MX}{XN} = \frac{P_{AMC}}{P_{ANC}} = \frac{AM \cdot AC \sin\angle MAC}{AC \cdot NC \sin\angle ACN} = \frac{AM}{NC}\frac{\sin(90° + \angle BAC)}{\sin(90° + \angle ACD)}, \tag{1}$$

$$\frac{MY}{YN} = \frac{P_{BMD}}{P_{BND}} = \frac{DM \cdot DB \sin\angle MBD}{BN \cdot BD \sin\angle DBN}$$
$$= \frac{DM}{BN}\frac{\sin(90° - \angle BDC)}{\sin(90° - \angle ABD)} = \frac{DM}{BN}\frac{\sin(90° + \angle BAC)}{\sin(90° + \angle ACD)}, \tag{2}$$

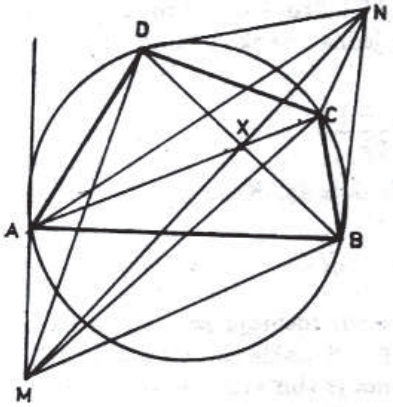
jer je $\angle BAC = \angle BDC$ i $\angle ACD = \angle ABD$. Trouglovi BCN i DAM su slični, jer je

$$\begin{aligned}\angle BCN &= 360^\circ - 90^\circ - \angle DCB = 270^\circ - (180^\circ - \angle BAD)\\ &= 90^\circ + \angle BAD = \angle MAD,\\ \angle CNB &= \angle AMD \quad \text{(uglovi sa paralelnim kracima).}\end{aligned}$$

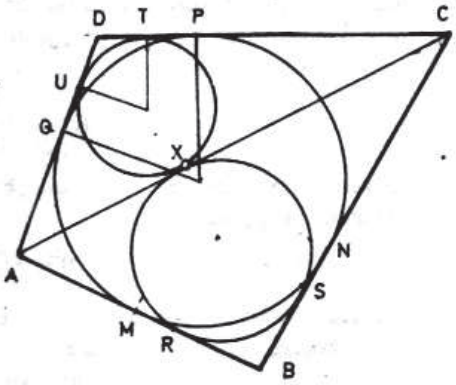
Zato je

$$\frac{NC}{BN} = \frac{AM}{DM}, \quad \text{tj.} \quad \frac{AM}{NC} = \frac{DM}{BN}. \tag{3}$$

Iz (1), (2) i (3) sledi $\dfrac{MX}{XN} = \dfrac{MY}{YN}$, tj. tačke X i Y dele duž MN u istom odnosu. Zato je $X = Y$.



Sl. 188.



Sl. 189.

87.2.3. Neka je $ABCD$ tangentni četvorougao i neka su M, N, P, Q redom dodirne tačke upisanog kruga sa stranicama AB, BC, CD, DA. Neka upisani krug trougla ABC dodiruje stranice AB, BC, CA redom u tačkama R, S, X i neka upisani krug trougla ACD dodiruje stranice AC, CD, DA redom u tačkama X_1, T, U, sl.189.

a) Kako je $ABCD$ tangentni četvorougao, to je $AB + CD = BC + AD$, pa sledi

$$\begin{aligned}XX_1 &= |AX - AX_1| = \left|\frac{AB + AC - BC}{2} - \frac{AC + AD - CD}{2}\right|\\ &= \frac{1}{2}|AB + CD - BC - AD| = 0,\end{aligned}$$

tj. tačke X i X_1 se poklapaju.

b) Kako je $BR = BS$ i $BM = BN$, to je $RS \parallel MN$. Analogno je $UT \parallel QP$. Kako je $AR = AX = AU$ i $AM = AQ$, to je $QM \parallel UR$. Analogno je $PN \parallel TS$.

Pošto je četvorougao $MNPQ$ tetivni, to mu je zbir naspramnih uglova jednak $180°$, a kako četvorougao $RSTU$ ima paralelne stranice sa stranicama četvorougla $MNPQ$, to je i kod četvorougla $RSTU$ zbir naspramnih uglova jednak $180°$. Zato je $RSTU$ tetivni četvorougao.

87.2.4. Neka je $P(x) = Q(x)R(x)$, gde su $Q(x)$ i $R(x)$ polinomi sa celim koeficijentima, pri čemu je stepen polinoma $R(x)$ manji od četiri. Tada i polinom $R(x)$ u svakoj od uočenih sedam tačaka prima vrednosti iz skupa $\{-1, 1\}$, pa u četiri od tih tačaka prima istu vrednost, na primer 1. No, tada polinom $R(x) - 1$ ima četiri realne nule, pa sledi $R(x) \equiv 1$.

87.3-4.1. Kako za pozitivan broj x važi

$$4 + x = 5\,\frac{1+1+1+1+x}{5} \geq 5\sqrt[5]{x},$$

to je $(4+a_1)(4+a_2)\cdots(4+a_n) \geq 5^n\sqrt[5]{a_1a_2\cdots a_n} = 5^n$. Jednakost važi ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$.

87.3-4.2. a) Ako $m \mid ax - 1$, onda za $y = x$ dobijamo

$$a^2y - a = a^2x - a = a(ax-1),$$
$$ay^2 - y = ax^2 - x = x(ax-1),$$

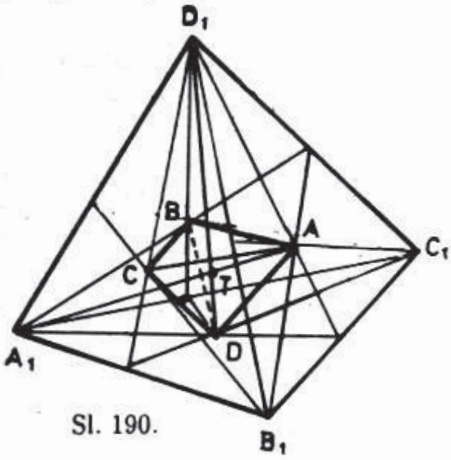
pa sledi $m \mid a^2y - a$ i $m \mid ay^2 - y$.

b) Ako $m \mid a$, onda tvrđenje važi za $y = m$.

c) Ako je $a = km_1$, $ax - 1 = lm_2$ i $m = m_1m_2$, gde su k, l, m_1, m_2 celi brojevi i $m_1 > 1$, $m_2 > 1$, onda su uzajamno prosti sledeći parovi brojeva: a i m_2, m_1 i m_2, am_1 i m_2. Zato postoje celi brojevi r i s, takvi da važi $ram_1 - 1 = sm_2$. Neka je $y = rm_1$. Tada je

$$a^2y - a = a(ay-1) = km_1(arm_1 - 1) = ksm_1m_2 = ksm,$$
$$ay^2 - y = y(ay-1) = rm_1(arm_1 - 1) = rsm_1m_2 = rsm.$$

87.3-4.3. Neka je $ABCD$ tetraedar maksimalne zapremine čija su temena neke četiri od datih tačaka. Neka je T težište tetraedra $ABCD$ i $A_1B_1C_1D_1$ tetraedar homotetičan tetraedru $ABCD$ u odnosu na centar homotetije T i sa koeficijentom homotetičnosti $k = -3$, sl.190. Primetimo da težište tetraedra deli svaku težišnu duž tetraedra na dva dela, tako da je deo od temena do težišta tri puta duži od dela od težišta tetraedra do težišta naspramne strane. Zato su tačke A, B, C, D težišta strana



Sl. 190.

tetraedra $A_1B_1C_1D_1$. Zapremina tetraedra $A_1B_1C_1D_1$ je 27 puta veća od zapremine tetraedra $ABCD$. Dokažimo da tetraedar $A_1B_1C_1D_1$ sadrži sve date tačke. Dovoljno je dokazati da se nikoje dve od datih tačaka ne nalaze sa raznih strana neke od ravni $A_1B_1C_1$, $B_1C_1D_1$, $C_1D_1A_1$, $D_1A_1B_1$. Pretpostavimo suprotno. Neka se, na primer, tačke B i E nalaze sa raznih strana ravni $B_1C_1D_1$. Tada je visina tetraedra $EBCD$ iz temena E veća od visine tetraedra $ABCD$ iz temena A, pa kako ta dva tetraedra imaju zajedničku osnovu BCD, to je zapremina tetraedra $EBCD$ veća od zapremine tetraedra $ABCD$. Kontradikcija.

87.3-4.4. Označimo sa x_n broj parova 00 u nizu

$$f^n(1) = \underbrace{f(f\ldots(f}_{n \text{ puta}}(1))\ldots).$$

S obzirom da važe sledeće jednakosti

$$\begin{aligned}
f(1) &= 01,\\
f^2(1) &= 1001,\\
f^3(1) &= 01101001,\\
f^4(1) &= 1001011001101001,\\
f^5(1) &= 0110100110010110100101100110100 1,
\end{aligned}$$

to neposredno dobijamo $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 3$, $x_5 = 5$. Dalje primetimo da važe sledeća tvrđenja (koja se jednostavno dokazuju matematičkom indukcijom):

a) Niz $f^k(1)$ sadrži 2^k članova.

b) Druga polovina niza $f^{k+1}(1)$ jednaka je nizu $f^k(1)$.

c) Niz $f^{2k}(1)$ je simetričan (prvi član jednak je poslednjem, drugi pretposlednjem itd.), a dva centralna člana su 00.

d) Prva polovina niza $f^{2k+1}(1)$ dobija se iz druge (ili iz niza $f^{2k}(1)$) kada se svaka nula zameni jedinicom, a svaka jedinica nulom. Zato taj niz sadrži jednak broj parova 00 i 11.

e) Broj parova 11 u nizu $f^{2k}(1)$ za jedan je manji od broja parova 00 u tom nizu.

Iz navedenih osobina sledi da za svaki prirodan broj k važi $x_{2k} = 2x_{2k-1} + 1$ i $x_{2k+1} = 2x_{2k} - 1$, pa dalje sledi

$$\begin{aligned}
x_{2n} &= 2x_{2n-1} + 1 = 2^2x_{2n-2} - 2 + 1 = 2^3x_{2n-3} + 4 - 2 + 1\\
&= \cdots = 2^{2n-1}x_1 + (2^{2n-2} - 2^{2n-3} + \cdots + 2^2 - 2 + 1)\\
&= \frac{1-(-2)^{2n-1}}{1-(-2)} = \frac{2^{2n-1}+1}{3},\\
x_{2n+1} &= 2\frac{2^{2n-1}+1}{3} - 1 = \frac{2^{2n}-1}{3}.
\end{aligned}$$

87.MO.1. Primetimo da za svako $n \geq 1$ važi

$$x_{n+1} \equiv 2(x_n - x_{n-1}) \pmod 7. \tag{1}$$

Ako za neki indeks k važi $7 \mid x_{k+1}$, onda iz relacije (1) redom za $n = k$, $n = k-1$, $n = k-2$ dobijamo

$$7 \mid x_k - x_{k-1}, \quad 7 \mid x_{k-1} - 2x_{k-2}, \quad 7 \mid x_{k-3}.$$

Nastavljajući ovaj postupak dobijamo da je tačno bar jedno od sledeća četiri tvrđenja

$$7 \mid a, \quad 7 \mid b, \quad 7 \mid a-b, \quad 7 \mid 2a-b.$$

Lako je videti da je u svakom od tih slučajeva beskonačno mnogo članova datog niza deljivo sa 7.

Napomena: Može se dokazati da za svako $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ važi

$$\begin{aligned} x_n &= a\left[1 - 8\binom{n}{2} + 8^2\binom{n}{4} - \cdots\right] + (b-a)\left[\binom{n}{1} - 8\binom{n}{3} + 8^2\binom{n}{5} - \cdots\right] \\ &= a2^{n/2}\cos\frac{n\pi}{4} + (b-a)2^{n/2}\sin\frac{n\pi}{4}, \end{aligned}$$

odakle lako sledi već dobijeni rezultat.

87.MO.2. Funkciji oblika $f(x) = \dfrac{ax+b}{-bx+a}$, gde su a i b realni brojevi, pridružimo kompleksan broj $z = a + ib$. Primetimo da ako je $f_1(x) = \dfrac{a_1x+b_1}{-b_1x+a_1}$, $f_2(x) = \dfrac{a_2x+b_2}{-b_2x+a_2}$, onda je

$$f_1 \circ f_2(x) = f_1(f_2(x)) = \frac{(a_1a_2 - b_1b_2)x + (a_1b_2 + a_2b_1)}{-(a_1b_2 + a_2b_1)x + (a_1a_2 - b_1b_2)}.$$

Prema tome, ako su funkcijama f_1 i f_2 pridruženi kompleksni brojevi z_1 i z_2, onda je funkciji $f_1 \circ f_2$ pridružen kompleksan broj z_1z_2. Kako je

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}, \quad \sin\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},$$

to je datoj funkciji f pridružen broj $z = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$. Zato je funkciji

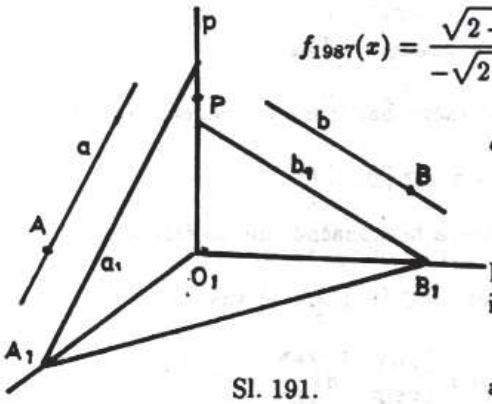
$$\underbrace{f(f(\dots(f}_{1987\text{ puta}}(x))\dots) = f_{1987}(x)$$

pridružen kompleksan broj $\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)^{1987}=\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}$. Lako se dokazuje da je

$$\cos\frac{3\pi}{8}=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},\qquad \sin\frac{3\pi}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

Na osnovu toga konačno dobijamo

$$f_{1987}(x)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}\,x+\sqrt{2+\sqrt{2}}}{-\sqrt{2+\sqrt{2}}\,x+\sqrt{2-\sqrt{2}}}.$$



Sl. 191.

87.MO.3. Pretpostavimo da za ravni α, β i γ važi

$$a\subset\alpha,\ b\subset\beta,\ c\subset\gamma,$$
$$\alpha\perp\beta,\ \beta\perp\gamma,\ \gamma\perp\alpha.$$

Neka su A_1 i B_1 različite tačke prave c, a_1 i b_1 prave određene uslovima

$$A_1\in a_1\parallel a,\quad B_1\in b_1\parallel b,$$

a α_1 i β_1 ravni određene uslovima

$$A_1\in\alpha_1\parallel\alpha,\quad B_1\in\beta_1\parallel\beta,$$

sl.191. Tada su ravni $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$ međusobno normalne, a za zajedničku tačku O_1 tih ravni važi:

a) Tačka O_1 pripada sferi $\mathcal{S}$ sa prečnikom A_1B_1.

b) Tačka O_1 pripada ravnima π_1 i π_2 za koje važi $A_1\in\pi_1\perp b_1$, $B_1\in\pi_2\perp a_1$.

Ravni α, β i γ za koje važe dati uslovi (samim tim i njihovu zajedničku tačku) konstruišemo na sledeći način: Prvo konstruišemo prave a_1 i b_1 koje sadrže redom proizvoljno izabrane tačke A_1 i B_1 prave c, tako da važi $A_1\in a_1\parallel a$ i $B_1\in b_1\parallel b$, a zatim ravni π_1 i π_2 tako da važi $A_1\in\pi_1\perp b_1$ i $B_1\in\pi_2\perp a_1$. Neka je prava n presek ravni π_1 i π_2, a $\mathcal{S}$ sfera sa prečnikom A_1B_1. Označimo sa O_1 zajedničku tačku prave n i sfere $\mathcal{S}$, sa α_1, β_1 i γ_1 ravni za koje važi

$$a_1\subset\alpha_1,\quad \alpha_1\perp\pi_2,\quad b_1\subset\beta_1,\quad \beta_1\perp\pi_1,\quad O_1\in\gamma,\quad c\subset\gamma,$$

sa p presek ravni α_1 i β_1 i sa A, B i P redom proizvoljne tačke pravih a, b i p. Neka su α i β ravni koje se dobijaju translacijom ravni α_1 i β_1 redom za vektore $\overrightarrow{A_1A}$ i $\overrightarrow{B_1B}$. Tada su α, β i γ ravni za koje važe uslovi zadatka.

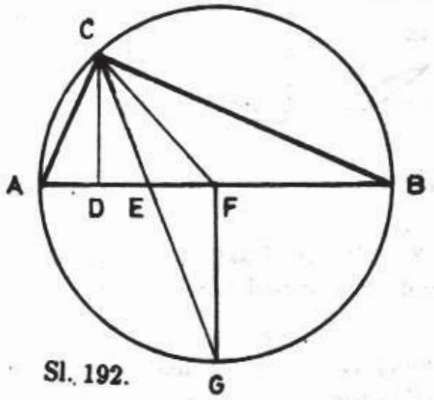
Dokaz: Prema konstrukciji važi $a\subset\alpha$, $b\subset\beta$, $c\subset\gamma$. Kako tačka O_1 pripada sferi $\mathcal{S}$ sa prečnikom A_1B_1, to je $B_1O_1\perp O_1A_1$, a kako prava B_1O_1 pripada ravni π_2, to je $B_1O_1\perp a_1$. Prema tome, važi $B_1O_1\perp\alpha_1$, a pošto $B_1O_1\subset\beta_1$, to je $\beta_1\perp\alpha_1$. Zato je i $\alpha\perp\beta$. Kako je $B_1O_1\perp\alpha_1$ i $p\subset\alpha_1$, to je $BO_1\perp PO_1$. Analogno dobijamo $A_1O_1\perp PO_1$. Prema tome, prava p je normalna na prave A_1O_1 i B_1O_1 ravni γ, pa je $p\perp\gamma$. Konačno, zbog $p\subset\alpha_1$ i $p\subset\beta_1$, sledi $\alpha_1\perp\gamma$, $\beta_1\perp\gamma$, pa važi i $\alpha\perp\gamma$, $\beta\perp\gamma$.

Zadatak ima dva ili jedno rešenje u zavisnosti od toga da li prava n i sfera $\mathcal{S}$ imaju dve ili jednu zajedničku tačku.

88.1.1. Kako je $[n/1] = n$, $[n/n] = 1$ i $[(n-1)/1] = n-1$, to iz date jednakosti sledi

$$\left[\frac{n}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{n-1}\right]=\left[\frac{n-1}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{n-1}{n-1}\right].$$

S obzirom da za svako $k \in \{2,3,\ldots,n-1\}$ važi $[n/k] \geq [(n-1)/k]$, to za sve takve k važi $[n/k] = [(n-1)/k]$. Ako bi n bio složen broj, onda bi za neko $k \in \{2,3,\ldots,n-1\}$ broj n/k bio ceo, pa bi važilo $[n/k] > [(n-1)/k] = [n/k] - 1$. Dakle, n mora biti prost broj.



Sl. 192.

88.1.2. Neka su D, E i F, redom, presečne tačke visine, simetrale ugla i težišne duži iz temena C sa stranicom AB trougla ABC i neka je G presek simetrale ugla BCA i kruga opisanog oko tog trougla, sl.192. Tada tačka G pripada i simetrali duži AB. Po pretpostavci je

$$\begin{aligned}\angle ACD &= \angle DCE\\ &= \angle ECF = \angle FCB.\end{aligned}$$

Dalje, iz $CD \parallel FG$ sledi

$$\angle FCG = \angle DCE = \angle CGF,$$

pa je trougao CGF jednakokrak i tačka F pripada simetrali duži CG. Kako je ona središte duži AB, to sledi da je F centar kruga opisanog oko trougla ABC. Dakle, $\angle BCA = 90°$, $\angle CAB = \angle DCB = 67°30'$ i $\angle ABC = 22°30'$.

88.1.3. Označimo sa Q figuru $T \setminus (R \cup S)$ koja je unija pet trouglova. Od tih trouglova mogu se sastaviti tri trougla koji su slični trouglu T. Označimo sa a, b i c visine tih trouglova. Tada je $a+b+c$ visina trougla T. Zato je

$$\frac{P_R+P_S}{P_T} = 1-\frac{P_Q}{P_T} = 1-\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2} = 2\frac{ab+bc+ca}{(a+b+c)^2} \leq \frac{2}{3},$$

pri čemu jednakost važi ako i samo ako je $a = b = c$. Dakle, tražena maksimalna vrednost je $2/3$. (Koristili smo nejednakost $3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2$ koja je ekvivalentna sa $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$.)

88.1.4. Pretpostavimo da je opisani raspored sedenja mogućan. Numerišimo ljude redom brojevimo $1,2,\ldots,54$. Neka su x_k i y_k, gde je $x_k < y_k$, redni brojevi zemljaka, za $k = 1,2,\ldots,27$. Tada za svako k važi $y_k - x_k = 10$ ili $y_k - x_k = 44$. Označimo

$$x = x_1+x_2+\cdots+x_{27}, \quad y = y_1+y_2+\cdots+y_{27}.$$

Tada za neke cele brojeve p i q važi $y - x = 10p + 44q$ i

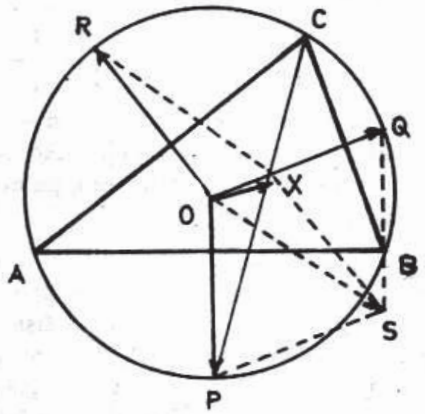
$$y + x = 1+2+\cdots+54 = 27\cdot 55.$$

Odatle sledi $2y = 10p+44q+27\cdot 55$, što nije mogućno, jer je $y+x$ paran, a $27\cdot 55$ neparan broj. Dobijena kontradikcija dokazuje tvrđenje zadatka.

88.2.1. Prave OP, OQ, OR su redom simetrale stranica AB, BC, CA trougla ABC. Neka je S tačka određena sa

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$$

i $\gamma = \angle BCA$, sl.193. Tada je ugao između pravih OQ i CP jednak $\pi/2 - \gamma/2$, pa zbog $PS \parallel OQ$, važi $\angle CPS = \pi/2 - \gamma/2$. Iz $OR \perp CA$ i $OQ \perp BC$ sledi da je $\angle QOR = \pi - \gamma$, pa iz $SX \parallel OR$ i $PS \parallel OQ$ sledi $\angle XSP = \gamma$. Kako je $XS = OR = OQ = SP$, to je trougao XSP jednakokrak, pa je $\angle XPS = \pi/2 - \gamma/2 = \angle CPS$. Dakle, tačka X pripada simetrali CP ugla BCA. Slično se dokazuje da ona pripada simetrali druga dva ugla trougla ABC.



Sl. 193.

88.2.2. Dokazaćemo da je funkcija f injektivna za svaki neparan prirodan broj n. Pretpostavimo da za neka dva racionalna broja x i y važi $f(x) = f(y)$, pri čemu je $x = a/b$, $y = c/d$, $(a,b) = 1$, $(c,d) = 1$ i $b > 0$, $d > 0$. Tada je

$$ad^n(a^{n-1} - 2b^{n-1}) = b^n c(c^{n-1} - 2d^{n-1}). \tag{1}$$

Kako su a i b uzajamno prosti brojevi, to su $a^{n-1} - 2b^{n-1}$ i b uzajamno prosti, pa iz (1) sledi $b^n \mid d^n$. Slično se dokazuje i $d^n \mid b^n$, pa je $b^n = d^n$ i $b = d$. Jednakost (1) se svodi na

$$a^n - c^n = 2b^{n-1}(a - c). \tag{2}$$

Pretpostavimo da je $x \neq y$. Tada je i $a \neq c$, pa (2) postaje

$$a^{n-1} + a^{n-2}c + \cdots + c^{n-1} = 2b^{n-1}. \tag{3}$$

Na levoj strani jednakosti (3) ima neparno mnogo sabiraka, pa se lako dokazuje da oba broja a i c moraju biti parni. No, onda i b mora biti paran broj, što je suprotno pretpostavci $(a,b) = 1$. Znači, važi $a = c$ i $x = y$, pa je funkcija f injektivna.

88.2.3. Pretpostavimo da nijedan od skupova $A_1, A_2, \ldots, A_{1988}$ nije „dobar". Tada za svako $i \in \{1, 2, \ldots, 1988\}$ svaka od jednačina

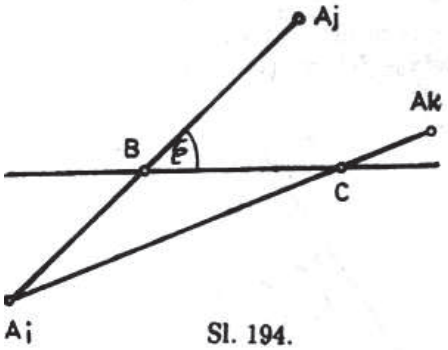
$$x - y = 1, \quad x - y = 2, \quad \ldots, \quad x - y = 1988$$

ima konačno mnogo rešenja (x, y), takvih da $x, y \in A_i$. Neka je y_0 maksimalno y koje se pojavljuje u nekom od tih rešenja. Među 1989 brojeva $y_0 + 1$, $y_0 + 2$, $\ldots$,

y_0+1989 postoje dva koja pripadaju istom podskupu A_i. Neka su to y_0+k i y_0+l, pri čemu je $k<l$. Tada je

$$(y_0+l)-(y_0+k)=l-k, \quad \text{i} \quad 1\le l-k\le 1988,$$

što je kontradikcija sa izborom broja y_0.



Sl. 194.

88.2.4. Neka unutar konveksnog poligona $A_1A_2\ldots A_{2n}$ postoje tačke B i C, tako da kroz svaku od njih prolazi po n njegovih dijagonala. Među svim dijagonalama koje prolaze bilo kroz B, bilo kroz C, izaberimo onu koja sa pravom BC gradi najmanji ugao različit od nule. Označimo taj ugao sa φ. Neka je to dijagonala A_iA_j; neka ona prolazi kroz B i neka je, na primer, $\angle A_jBC=\varphi$, sl.194. S obzirom da kroz tačku C prolazi n različitih dijagonala $2n$-tougla, to iz svakog temena polazi jedna dijagonala koja prolazi kroz C. Neka je A_iA_k dijagonala koja sadrži C. Jasno je da je $k\ne j$. Takođe je

$$\varphi=\angle A_jBC=\angle BA_iC+\angle A_iCB>\angle A_iCB,$$

pa dijagonala A_iA_k (koja sadrži C) gradi sa pravom BC ugao manji od φ. Ova kontradikcija dokazuje da tačke B i C sa pomenutim osobinama ne mogu da postoje.

88.3-4.1. Pretpostavimo najpre da je $c=0$ i $a\ge d$. Neka su x_1 i x_2 prirodni brojevi, takvi da je $x_1<x_2$. Tada je $x_2-x_1\ge 1$, pa je

$$\frac{ax_2+b}{d}-\frac{ax_1+b}{d}=\frac{a}{d}(x_2-x_1)\ge 1,$$

što znači da je $f(x_2)>f(x_1)$. Dakle, funkcija f je injektivna.

Da bismo dokazali obrnuto, dokažimo da bilo koji od uslova

$$1^\circ \quad c\ne 0, \qquad 2^\circ \quad c=0,\ a<d,$$

povlači da funkcija f nije injektivna.

U slučaju 1° možemo pisati

$$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c(cx+d)}.$$

Ako je $a/c=\alpha$ ceo broj, onda će se u jednom od intervala $(\alpha-1,\alpha]$, $[\alpha,\alpha+1)$ (u zavisnosti od znaka $bc-ad$) nalaziti svi brojevi $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ za dovoljno veliko x. Za

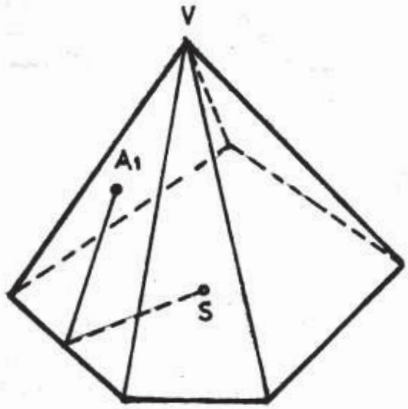
sve takve x biće $f(x) = \alpha - 1$ (odnosno $f(x) = \alpha$), pa funkcija f nije injektivna. Slično, ako α nije ceo broj i $[\alpha] = \beta$, svi brojevi $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ za dovoljno veliko x pripadaće intervalu $[\beta, \beta+1)$, pa će za takve x biti $f(x) = \beta$.

U slučaju 2° označimo $y_n = \dfrac{an+b}{d}$, za $n \in \mathrm{N}_0$ i izaberimo prirodan broj k, takav da je $\dfrac{a}{d} < 1 - \dfrac{1}{k}$. Kako za $n \in \mathrm{N}_0$ važi $y_{n+1} - y_n = \dfrac{a}{d}$, to je $y_k - y_0 = k\dfrac{a}{d} < k-1$. No, to znači da za neko $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ brojevi y_i i y_{i+1} pripadaju istom intervalu oblika $[\alpha, \alpha+1)$ za neko $\alpha \in \mathrm{N}_0$. Tada je $f(i) = f(i+1)$, pa prema tome ni u ovom slučaju funkcija f nije injektivna.

88.3-4.2. Neka je V vrh date n-tostrane piramide i neka u nju upisana sfera dodiruje osnovu u tački S, a bočne strane u tačkama $A_1, A_2, \ldots, A_n$, sl.195. Prilikom opisanih rotacija svaka od tačaka $A_1, A_2, \ldots, A_n$ prelazi u tačku S. Kako je

$$VA_1 = VA_2 = \cdots = VA_n,$$

to su sve slike vrha V pri tim rotacijama podjednako udaljene od tačke S, te pripadaju jednom krugu.



Sl. 195.

88.3-4.3. Iz uslova zadatka sledi

$$a_3a_5 = a_{15} < a_{18} = a_2a_9 = 2a_9 < 2a_{10} = 2a_2a_5 = 4a_5.$$

Prema tome je $a_3 = 3$.

Dokažimo sada indukcijom da za svaki prirodan broj $n > 3$ važi $a_n = n$. Pretpostavimo da to važi za sve prirodne brojeve manje ili jednake n. Kako su $n-1$ i n uzajamno prosti, to iz date veze sledi $a_{(n-1)n} = a_{n-1}a_n = (n-1)n$. S obzirom da je niz (a_n) strogo rastući, to odatle odmah dobijamo da je $a_k = k$ za sve k za koje je $n < k \le (n-1)n$, specijalno i za $k = n+1$, čime je tvrđenje zadatka dokazano.

88.3-4.4. Pretpostavimo da postoji mreža jednosmernih puteva među gradovima $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n > 7)$, tako da važe uslovi a), b) i c). Označimo sa A_iA_j put sa početkom A_i i krajem A_j, a skup svih puteva označimo sa P. Za svako $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ neka je

$$B_k = \{A_i \mid A_kA_i \in P\}, \quad C_k = \{A_j \mid A_jA_k \in P\}.$$

Ako za neko i važi $A_i \in B_k$, onda iz uslova c) sledi da postoji tačno jedan grad A_j, takav da važi $A_jA_i \in P$ i $A_jA_k \in P$, pa za taj grad A_j važi $A_j \in C_k$. Prema tome, $|B_k| \le |C_k|$ ($|X|$ označava broj elemenata skupa X.) Na sličan način se korišćenjem uslova b) dokazuje da je $|C_k| \le |B_k|$. Prema tome, za svako $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ važi

$|B_k| = |C_k|$. Iz uslova a) sledi da je $n = 1+|B_k|+|C_k| = 1+2|B_k|$, tj. n je neparan broj, $n = 2r+1$, i za svako $k \in \{1,2,\dots,n\}$ važi $|B_k| = |C_k| = r$.

Neka je sada

$$P_k = \{(i,j) \mid i < j,\ A_kA_i \in P,\ A_kA_j \in P\}.$$

Iz uslova c) sledi da za svaki par (i,j), $i < j$, postoji tačno jedan broj $k \in \{1,2,\dots,n\}$, takav da važi $(i,j) \in P_k$. Prema tome skupovi $P_1, P_2, \dots, P_{2r+1}$ su međusobno disjunktni i, na osnovu uslova a), njihova unija je istobrojna sa skupom P. Kako je $|B_k| = r$, tj. kako se iz grada A_k može direktno stići u r drugih gradova, to je $|P_k| = \binom{r}{2}$. Dalje je $|P| = \binom{2r+1}{2}$, pa sledi

$$\binom{2r+1}{2} = |P| = |P_1| + |P_2| + \cdots + |P_{2r+1}| = (2r+1)\binom{r}{2}.$$

Iz poslednje jednakosti dobijamo $r = 3$, tj. $n = 7$, što je isključeno pretpostavkom zadatka. (Za državu sa 7 gradova može se konstruisati mreža puteva koja zadovoljava uslove zadatka.)

89.1.1. Koristeći jednakost $x+y+z = 1$ i nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine dobijamo

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) = \frac{x+x+y+z}{x}\,\frac{y+x+y+z}{y}\,\frac{z+x+y+z}{z}$$
$$\geq \frac{1}{xyz}\cdot 4\sqrt[4]{x^2yz}\cdot 4\sqrt[4]{xy^2z}\cdot 4\sqrt[4]{xyz^2} = 64.$$

Jednakost važi ako i samo ako je $x = y = z = 1/3$.

89.1.2. a) Pretpostavimo da su svi dati brojevi neparni. Primetimo da ako je n neparan broj, tj. $n = 2k+1$, onda je

$$n^2 = 4k(k+1)+1 \equiv 1 \pmod 8,$$

jer je bar jedan od brojeva k i $k+1$ paran. Zato je $x_{1990}^2 \equiv 1 \pmod 8$ i

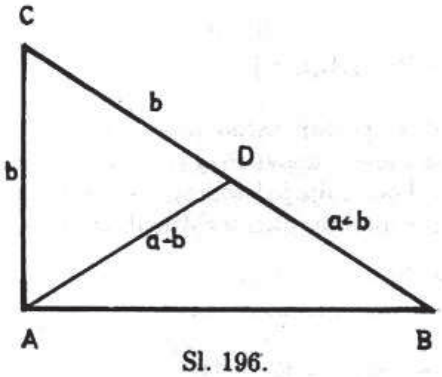
$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{1989}^2 \equiv 1989 \equiv 5 \pmod 8,$$

a to je kontradikcija.

b) Pretpostavimo da je tačno jedan od brojeva $x_1, x_2, \dots, x_{1990}$ paran. Ako je to x_{1990}, onda je svaki od brojeva $x_1, x_2, \dots, x_{1989}$ neparan, pa lako sledi da je neparan i zbir njihovih kvadrata, što je kontradikcija. Ako je neki od brojeva $x_1, x_2, \dots, x_{1989}$ paran, na primer x_1, onda je paran broj x_1^2 jednak broju

$$x_{1990}^2 - x_2^2 - \cdots - x_{1989}^2,$$

koji je očigledno neparan, što je opet kontradikcija.



Sl. 196.

89.1.3. Neka je ABC trougao takav da je $BC = a$, $CA = b$, $\angle CAB = 3\angle ABC$. Tada je $a > b$. Označimo sa D tačku na duži BC, takvu da važi

$$\angle DAB = \frac{1}{3}\angle CAB = \angle ABC.$$

Tada je $DA = DB$, a kako je

$$\begin{aligned}\angle CAD &= 2\angle ABC \\ &= \angle ABC + \angle BAD = \angle ADC,\end{aligned}$$

to je i $CD = CA = b$. Zato je $DA = DB = a - b$.

Konstrukcija: Konstruišemo trougao ADC tako da je $CA = CD = b$ i $AD = a - b$. Zatim na pravoj CD konstruišemo tačku B, tako da je $DB = a - b$ i da se tačka B nalazi s one strane tačke D sa koje nije tačka C. Trougao ABC je traženi.

Dokaz i diskusiju prepuštamo čitaocu.

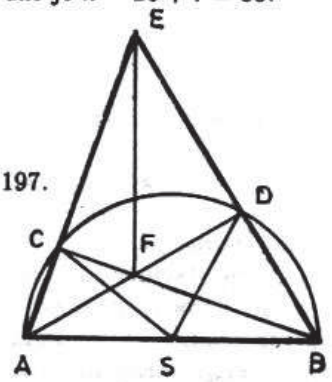
89.1.4. Neka je $a_k = [\sqrt[3]{k}] - 2$, za $k = 1, 2, 3, \ldots$. Treba odrediti sve prirodne brojeve n za koje važi $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$. Primetimo da je

$$\begin{aligned} a_k &= -1 \quad \text{za} \quad 1 \le k \le 7, \\ a_k &= 0 \quad \text{za} \quad 8 \le k \le 26, \\ a_k &= 1 \quad \text{za} \quad 27 \le k \le 63, \\ a_k &\ge 2 \quad \text{za} \quad k \ge 64. \end{aligned}$$

Zbir $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ jednak je nuli ako i samo ako je $n = 26 + 7 = 33$.

89.2.1. Kako tačke C i D pripadaju polukrugu nad prečnikom AB, to je

$$AD \perp BD, \quad BC \perp AC.$$



Sl. 197.

Zato je tačka F ortocentar trougla ABE, sl.197. Prema tome $EF \perp AB$. Kako je $\angle CSD = 90°$, to je $\angle CAD = 45°$. Prema tome trougao ACF je jednakokrako-pravougli, pa je $AC = CF$. Osim toga $\angle ECF = \angle BCA = 90°$ i $\angle EFC = \angle BAC$ (uglovi sa normalnim kracima). Prema tome, trouglovi ECF i BCA su podudarni, pa sledi $EF = AB$.

89.2.2. Dokažimo sledeću lemu: Ako je $x \geq 1$ i $y \geq 1$, onda je $\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} \leq \sqrt{xy}$. Pri tome jednakost važi ako i samo ako je $xy = x + y$. Zaista, iz tačne nejednakosti $(\sqrt{x-1}\sqrt{y-1} - 1)^2 \geq 0$ redom dobijamo

$$\begin{aligned} &xy - x - y + 2 - 2\sqrt{x-1}\sqrt{y-1} \geq 0, \\ &xy \geq x - 1 + 2\sqrt{x-1}\sqrt{y-1} + y - 1, \\ &xy \geq (\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1})^2, \\ &\sqrt{xy} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1}. \end{aligned}$$

Jednakost važi ako i samo ako je $\sqrt{x-1}\sqrt{y-1} = 1$, a ova jednakost je ekvivalentna sa $xy = x + y$ (pri uslovu $x \geq 1$, $y \geq 1$). Koristeći dokazanu lemu dobijamo

$$\begin{aligned} \sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1} &\leq \sqrt{ab} + \sqrt{c-1} \\ &= \sqrt{(ab+1)-1} + \sqrt{c-1} \leq \sqrt{c(ab+1)}. \end{aligned}$$

Jednakost važi ako i samo ako je $ab = a + b$ i $(ab+1)c = ab + 1 + c$, tj. ako i samo ako je $abc - 1 = ab = a + b$.

89.2.3. Neka je (x, y, z) trojka celih brojeva za koje važi $x^y - 2^z = 1$. Lako dobijamo da ne može biti $y \leq 0$ i da je za $y = 1$ svaka trojka

$$(2^z + 1, 1, z), \quad \text{gde} \quad z \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

rešenje date jednačine. Neka je $y > 1$. Tada je $|x| > 1$, $z > 1$, a osim toga x je neparan broj i važi

$$(x-1)(x^{y-1} + x^{y-2} + \cdots + x + 1) = 2^z.$$

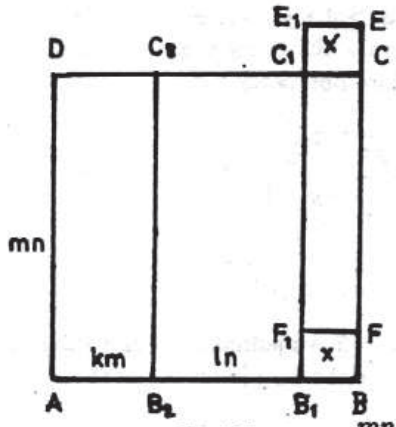
Kako je $x^{y-1} + x^{y-2} + \cdots + x + 1$ paran broj, to je $y - 1 = 2k + 1$, gde je k nenegativan ceo broj, pa sledi

$$(x-1)(x+1)(x^{y-2} + x^{y-4} + \cdots + 1) = 2^z.$$

Broj $(x-1)(x+1)$ je stepen dvojke sa prirodnim eksponentom, ako i samo ako $x \in \{-3, 3\}$. Za $x = 3$ dobijamo

$$\begin{aligned} 9^k + 9^{k-1} + \cdots + 1 &= 2^{z-3}, \\ 2^z = 9^{k+1} - 1 &= (3^{k+1} - 1)(3^{k+1} + 1), \end{aligned}$$

odakle sledi $k = 0$, $y = 2$, $z = 3$, tj. rešenje je trojka $(3, 2, 3)$. Za $x = -3$ dobijamo rešenje $(-3, 2, 3)$.



Sl. 198.

89.2.4. Kako su m i n uzajamno prosti brojevi, to se pri deljenju brojeva

$$m,\ 2m,\ \ldots,\ (n-1)m$$

sa n dobijaju svi ostaci $1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$. Prema tome za neko

$$k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$$

broj $km+1$ deljiv je sa n, pa je i broj $mn-(km+1)$ deljiv sa n, tj.

$$mn - 1 = km + ln,$$

gde je l prirodan broj.

Uvedimo na šahovskoj tabli pravougli koordinatni sistem, tako da su tačke sa celim koordinatama temena polja te table. Kvadrat $ABCD$, gde je $A(0,0)$, $B(mn,0)$, $C(mn,mn)$, $D(0,mn)$, sl.198, može se razbiti na pravougaonike dimenzije $m \times n$ ili $n \times m$. Zato je zbir brojeva koji su zapisani unutar kvadrata $ABCD$ jednak nuli. Uvedimo sledeće oznake

$$B_1(mn-1,0), \quad B_2(km,0), \quad C_1(mn-1,mn), \quad C_2(km,mn).$$

Tada se svaki od pravougaonika AB_2C_2D i $B_2B_1C_1C_2$ može razbiti na pravougaonike dimenzije $m \times n$ ili $n \times m$. Zato je zbir svih brojeva koji su zapisani unutar pravougaonika $AB_1C_1D_1$ jednak nuli, a to dalje znači da je zbir brojeva koji su zapisani unutar pravougaonika B_1BCC_1 jednak nuli. Analogno dokazujemo da isto svojstvo ima i pravougaonik FEE_1F_1, gde je

$$F(mn,1), \quad F_1(mn-1,1), \quad E(mn,mn+1), \quad E_1(mn-1,mn+1).$$

Prema tome, u poljima BFF_1B_1 i CEE_1C_1 je zapisan isti broj.

89.3-4.1. Neka je četvorka (x_1,x_2,x_3,x_4) pozitivnih brojeva rešenje datog sistema jednačina.

a) Pretpostavimo da su bar dva od brojeva x_1,x_2,x_3,x_4 jednaki 1. Pošto se svake dve promenljive pojavljuju istovremeno bar u jednoj od jednačina, to lako dobijamo da su i druge dve promenljive jednake 1. Rešenje je četvorka $(1,1,1,1)$.

b) Pretpostavimo da je tačno jedan od brojeva x_1,x_2,x_3,x_4 jednak 1. Neka je, na primer, $x_1 = 1$. Ako je $x_2 < 1$, onda iz prve jednačine sledi $x_3 > 1$, zatim iz treće sledi $x_4 < 1$ i na kraju iz četvrte sledi $x_4 > 1$, što je kontradikcija. Ako je $x_2 > 1$, onda iz prve, treće i četvrte jednačine redom dobijamo $x_3 < 1$, $x_4 > 1$ i $x_2 < 1$, što je opet kontradikcija.

c) Pretpostavimo da nijedan od brojeva x_1,x_2,x_3,x_4 nije jednak 1. Neka je, na primer, $x_1 < 1$. Razmotrimo sledeća četiri slučaja:

c1) $x_2 > 1$, $x_3 > 1$. Tada iz druge jednačine sledi $x_4 < 1$, pa je

$$3 = x_3 + x_4^2 + x_1^3 < x_3^3 + x_2^2 + x_1 = x_1 + x_2^2 + x_3^3 = 3,$$

što je kontradikcija.

c2) $x_2 > 1$, $x_3 < 1$. Iz treće jednačine sledi $x_4 > 1$. Neka je $x_1 = 1 - a$, $x_2 = 1 + b$, $x_3 = 1 - c$, $x_4 = 1 + d$, gde je $0 < a < 1$, $0 < c < 1$, $b > 0$, $d > 0$. Tada je

$$\begin{aligned} 0 &= x_2 + x_3^2 + x_4^3 + x_4 + x_1^2 + x_2^3 - x_1 - x_2^2 - x_3^3 - x_3 - x_4^2 - x_1^3 \\ &= (a^3 - 2a^2 + 2a) + (b^3 + 2b^2 + 2b) + (c^3 - 2c^2 + 2c) + (d^3 + 2d^2 + 2d) > 0, \end{aligned}$$

(jer je $2a > 2a^2$ i $2c > 2c^2$) što je kontradikcija.

c3) $x_2 < 1$, $x_3 > 1$. Iz četvrte jednačine sledi $x_4 > 1$. Dalje je

$$3 = x_4 + x_1^2 + x_2^3 < x_4^3 + x_3^2 + x_2 = x_2 + x_3^2 + x_4^3 = 3,$$

što je kontradikcija.

c4) $x_2 < 1$, $x_3 < 1$. Tada je $x_1 + x_2^2 + x_3^3 < 3$ što je kontradikcija.

Prema tome, jedino rešenje datog sistema u skupu pozitivnih brojeva je četvorka $(1, 1, 1, 1)$.

89.3-4.2. Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sve različite realne nule polinoma $P(x)$, a z_1, z_2, $\ldots$, z_m sve kompleksne nule polinoma $P(x)$ sa pozitivnim imaginarnim delom, pri čemu je svaka nula zapisana onoliko puta kolika je njena višestrukost. Pošto polinom $P(x)$ ne menja znak na skupu realnih brojeva, to je višestrukost svake realne nule paran broj. Zato je

$$\begin{aligned} P(x) &= Q_1^2(x)(x - z_1)\cdots(x - z_m)(x - \overline{z_1})\cdots(x - \overline{z_m}) \\ &= Q_1^2(x)(u + iv)(u - iv) = Q_1^2(x)(u^2 + v^2) = (uQ_1)^2 + (vQ_1)^2. \end{aligned}$$

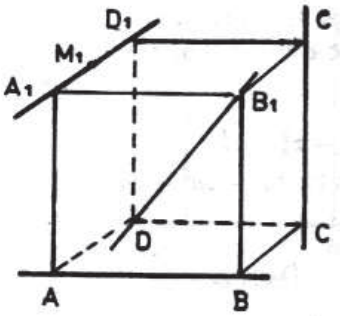
89.3-4.3. Ako za uređenu trojku (A, B, C) važe dati uslovi, onda se svaki od elemenata $1, 2, \ldots, n$ nalazi u nekom od sledećih šest disjunktnih skupova:

$$A \cap \overline{B} \cap \overline{C}, \quad \overline{A} \cap B \cap \overline{C}, \quad \overline{A} \cap \overline{B} \cap C, \quad A \cap B \cap \overline{C}, \quad A \cap \overline{B} \cap C, \quad \overline{A} \cap B \cap C,$$

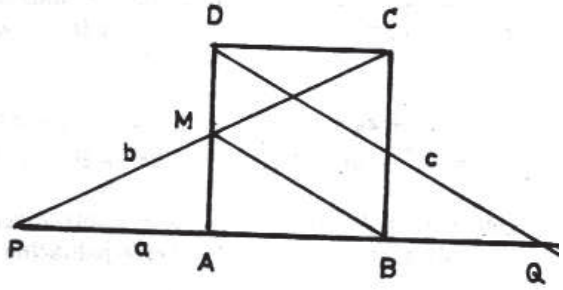
pri čemu se bar jedan od tih elemenata nalazi u skupu $A \cap B \cap \overline{C}$ ($\overline{X}$ je oznaka za komplement skupa X). Broj rasporeda n elemenata u šest navedenih disjunktnih skupova jednak je 6^n. Broj rasporeda kod kojih je $A \cap B \cap \overline{C} = \emptyset$ je 5^n. Zato je traženi broj jednak $6^n - 5^n$.

89.3-4.4. Pretpostavimo da postoji prava koja seče svaku od pravih AB, CC_1, A_1D_1 i DB_1, sl.199. Označimo sa n tu pravu, sa M_1 njen presek sa pravom A_1D_1, a sa M normalnu projekciju tačke M_1 na ravan $ABCD$. Tada je prava n zajednička za ravni M_1AB, M_1CC_1 i M_1DB_1, pa presečne prave $a = AB$, $b = MC$ i c, redom, tih ravni sa ravni $ABCD$ imaju zajedničku tačku. Ta tačka je presek

prave n i ravni $ABCD$. Prava c određena je uslovima $D \in c$, $c \parallel M_1B_1 \parallel MB$, jer su c i M_1B_1 preseci ravni MDB_1 sa paralelnim ravnima $ABCD$ i $A_1B_1C_1D_1$.



Sl. 199.



Sl. 200.

Međutim, lako je dokazati da prave a, b i c nemaju zajedničku tačku: Označimo sa P i Q redom preseke prave a sa pravama b i c. Ako je $A - M - D$, tj. ako je tačka M između tačaka A i D, onda je $P - A - Q$, sl. 200. Ako je $A - D - M$, onda je $Q - B - P$. Ako je $D - A - M$, onda je $Q - A - P$. Ako je $M = D$, onda je $a \parallel b$, a ako je $M = A$, onda je $c = CD \parallel AB = a$. Prema tome, ne postoji prava koja seče svaku od pravih AB, CC_1, A_1D_1, DB_1.

SADRŽAJ