Zahvaljujem Društvu matematičara Srbije (http://www.dms.org.rs/) i njegovom predsjedniku dr. Zoranu Kadelburgu na dopuštenju da iz časopisa "Matematički list za učenike osnovne škole" skeniram stranice koje sadrže zadatke i rješenja s republičkih natjecanja (SR Hrvatke) i saveznih natjecanja (SFRJ) i skenove objavim na web stranici http://public.carnet.hr/mat-natj .

Antonija Horvatek
http://public.carnet.hr/~ahorvate/

VAŽNA OBAVEŠTENJA

1. Uredništvo poziva nastavnike i profesore matematike kao i ostale čitaoce da šalju svoje priloge za list: članke, odabrane zadatke, zadatke sa prijemnih ispita i matematičkih takmičenja, razne zanimljivosti. Poželjno je da svi rukopisi (osim učeničkih rešenja zadataka) budu pisani pisaćom mašinom s proredom, a crteži izrađeni na posebnoj čvršćoj hartiji. Rukopisi se ne vraćaju.

2. „Matematički list" namenjen je *svim učenicima* V—VIII raz. osnovne škole. List izlazi 5 puta u toku školske godine.

3. Prodajna cena pojedinom broju je 2 dinara. Godišnja pretplata (za svih 5 brojeva) iznosu 10 dinara. Naručiocima za više od 10 kompleta odobravamo rabat (20%, 15%, 10%), zavisno od roka do kojeg se uplati celokupna pretplata (1.11, 1.2, 1.5). Nikakvi drugi odbici ne uvažavaju se.

Narudžbe se šalju na adresu lista, a novac na **žiro-račun „Matematičkog lista" broj 608-8-1433-10.** Pri tome **obavezno** treba navesti *tačnu adresu* na koju list treba dostavljati i jasno naznačiti na šta se narudžbina odnosno uplata odnosi (na koje brojeve i po koliko primeraka od svakog broja). Uplatnica sa navedenim podacima takođe može služiti kao narudžbenica.

4. Raspolažemo kompletima lista iz školske 1967/68. god. (br. II. 1—5), šk. 1968/69. god. (br. III.1—5) i 1969/70. (IV. 1—5) i isporučujemo ih odmah.

5. Mole se poverenici „Mat. lista" da izmire sva zaostala dugovanja.

6. Sve priloge, primedbe i narudžbe slati *isključivo* na adresu:

Matematički list, Beograd, p.p. 728.

S A D R Ž A J

1. *Др М. Илић-Дајовић:* О сличности 1
2. *B. Marinković:* Azbuka kibernetike, III. Računanje sa iskazima (nastavak). Implikacija. Ekvivalencija 6
3. *К. Костић:* Тражење што бољег начина решавања 21
4. Priče o rešavanju zadataka. Uvod. Priča prva. 22
5. Zadaci sa prijemnih ispita za upis u srednje škole 28
6. Одабрани задаци 29
7. Konkursni zadaci 39
8. Rešenja konkursnih zadataka 90—100 40
9. Rešili konkursne zadatke iz „Mat. lista" IV.4 i IV.5 49
10. Nagrade rešavateljima konkursnih zadataka 51
11. Matematička takmičenja — Prvo savezno takmičenje mladih matematičara osnovnih škola 53
12. Matematička razonoda (Zanimljivosti o brojevima. Da li ste dosetljivi? Matematičke igre. Matematička ukrštenica) 57
13. Rezultati konkursa za nagradni zadatak br. 16 65
14. Nagradni zadatak br. 17 66
15. Nagradni zadatak br. 18 67
16. Зрнца — ситне занимљивости 67
17. Nagradni konkurs 70
18. Priznanja školama 71
19. Nagradni fond ML 72

CENA 4 DINARA

MATEMATIČKI LIST

ZA UČENIKE OSNOVNE ŠKOLE

V

1—2

BEOGRAD
1970.

SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATIČARA, FIZIČARA I ASTRONOMA JUGOSLAVIJE

MATEMATIČKI LIST

za učenike osnovne škole

God. V, broj 1—2 (1970/71)
Izlazi pet puta godišnje

IZDAJE DRUŠTVO MATEMATIČARA, FIZIČARA I ASTRONOMA SR SRBIJE
Beograd, Knez Mihailova 35/IV, p. p. 791

Štampa: Beogradski grafički zavod, Beograd, Bul. vojvode Mišića br. 17

MATEMATIČKA TAKMIČENJA

Prvo savezno takmičenje mladih matematičara osnovnih škola SFRJ

Inicijativu da se održi Prvo savezno takmičenje mladih matematičara — osnovaca pokrenuo je *MATEMATIČKI LIST* još krajem 1969. godine, a podržala su je sva republička društva matematičara, fizičara i astronoma. Posle potrebnih priprema ova zamisao bila je i realizovana. Organizator takmičenja bio je *MATEMATIČKI LIST.*

Takmičenje je održano 14.6.1970. godine na Prirodno-matematičkom fakultetu u Beogradu. Zadaci su rađeni pre podne, a posle podne bilo je saopštavanje rezultata, te podela nagrada, diploma i pohvala. Učestvovali su samo učenici VIII razreda i to oni koje su odredila republička društva MFA (na osnovu rezultata na prethodnim stupnjevima takmičenja). Bilo je ukupno 28 takmičara (SR Srbija — 9, SR Hrvatska — 6, SR BiH — 5, SR Slovenija — 4 i SR CG — 4). Nisu učestvovali predstavnici iz SR Makedonije, mada je bilo najavljeno njihovo učešće.

Zadatke za ovo takmičenje odabrala je Savezna komisija koju su sačinjavali: predstavnik *ML* i po jedan predstavnik svakog republičkog društva MFA čiji su takmičari učestvovali. Predloge zadataka uputile su republičke komisije za mlade matematičare. Savezna komisija je izvršila konačan izbor. Ova komisija takođe je izvršila i pregled radova takmičara, te podelu nagrada iz *Nagradnog fonda ML.*

Takmičari su zadatke radili pod šifrom i na svom maternjem jeziku. Izrada zadataka trajala je 120 minuta. Bilo je 5 zadataka i za svaki urađeni zadatak takmičar je mogao dobiti najviše 5 bodova. Posle pregleda zadataka i utvrđivanja rang-liste takmičara, izvršeno je dešifrovanje — otvaranje koverata sa imenima takmičara.

Prema oceni Komisije, postignuti rezultati su veoma dobri. Takmičarima koji su postigli 16 ili više bodova (od 25 mogućih), dodeljene su diplome i pohvalnice. Nosiocima diploma pripale su i vredne nagrade: električni štednjak („Electric"-Sloboda), ručni časovnici (»Darwil« i »Zenith«), zlatna naliv pera (»Pelikan«, »Mont Blanc«), kompleti pribora za crtanje (Original »Rihter«) i dr. Nagrade je obezbedio *MATEMATIČKI LIST* iz svog *Nagradnog fonda.* (Električni štednjak namenski je ovom fondu priložilo Preduzeće »Sloboda« — Čačak). Ukupni troškovi ovog takmičenja iznosili su 10000,00 dinara.

O takmičenju je javnost bila informisana putem štampe, radia i televizije.

Rezultati I saveznog takmičenja mladih matematičara — učenika VIII razreda osnovne škole. — Nagrađenih i pohvaljenih bilo je ukupno 14 takmičara (10 nagrađenih i 4 pohvaljena), tj. nagrađen je ili pohvaljen u proseku svaki drugi takmičar, jer je učestvovalo svega 28 takmičara. Nagrađene i pohvaljene takmičare navodimo i poimenično (u zagradi je broj osvojenih bodova — od 25 mogućih).

I nagrada

1. *Mladenović Pavle*, OŠ »I. L. Ribar«, Grdelica, SR Srbija (25)
2. *Liščević Vladimir*, OŠ »Ž. J. Španac«, N. Beograd, SR Srbija (25)
3. *Dimitrić Radoslav*, OŠ »Kadinjača«, Loznica, SR Srbija (25)

II nagrada

1. *Adžić Jovan*, OŠ »I. Gundulić«, N. Beograd, SR Srbija (24)

III nagrada

1. *Budimić Ljiljana*, OŠ »M. M. Burzan«, Titograd, SR CG (21)
2. *Koprivnjak Ivica*, OŠ »August Šenoa«, Zagreb, SRH (21)
3. *Vasilić Milovan*, OŠ »NH Čajka«, Trstenik, SR Srbija (21)
4. *Levstek Andrej*, OŠ »Zvonko Runko«, Ljubljana, SR Slovenija (20)
5. *Čordić Mileta*, OŠ »Mih. Pupin«, Idvor (Banat), SR Srbija (20)
6. *Duplančič Zvonko*, OŠ »F. Prešeren«, Kranj, SR Slovenija (20).

Pohvale

1. *Šuput Milka*, I OŠ Križanićeva, Zagreb, SRH (19)
2. *Sabo Rajko*, OŠ »Majda Vrhovnik«, Ljubljana, SR Slovenija (19)
3. *Jovanović Miroslav*, OŠ »Sveti Sava«, Beograd, SR Srbija (19)
4. *Tomšič Marjan*, OŠ »Majda Vrhovnik«, Ljubljana, SR Slovenija (16).

Zadaci na I saveznom takmičenju

Beograd, 14. VI 1970.

1. Dešifrovati jednakost:

$$\overline{abcd}=(5c+1)^2,$$

tj. naći takav četvorocifreni broj $\overline{abcd}$, koji je jednak kvadratu broja $5c+1$. Slova a, b, c, d ovde znače nepoznate cifre. Postupak obrazložiti!

2. Avion je leteo iz A u B i to prvo brzinom 180 km na sat, a kada mu je još preostalo da preleti 320 km manje nego što je već bio preleteo, povećao je brzinu na 250 km na sat. Na taj način je srednja (prosečna) brzina aviona na celom putu AB bila 200 km na sat. Odrediti dužinu (duljinu) puta od A do B.

3. Milan je nacrtao paralelogram $ABCD$, zatim je označio tačkom M središte stranice BC, a tačkom N središte stranice CD, pa je onda izašao iz sobe. Tada je njegova sestra Nada prišla stolu i na crtežu izbrisala sve osim tačaka A, M i N. Pomognite Milanu da rekonstruiše ceo crtež, tj. da nađe i tačke B, C, D.

4. Kraci trapeza su 39 mm i 45 mm, a dijagonala koja je normalna (okomita) na dužem kraku ima dužinu (duljinu) 60 mm.
Konstruisati taj trapez, pa mu izračunati obim (opseg) i površinu.

5. Površina (oplošje) pravilne četvorostrane piramide je $5a^2$, gde je a — dužina osnovne ivice (brida) te piramide.

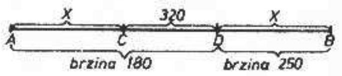
a) Izraziti zapreminu (volumen) te piramide u funkciji od a.

b) Izračunati tu zapreminu za $a=6$ dm!

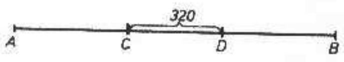
Rezultati, uputstva, rešenja

1. Prema uslovu zadatka treba da bude $1000a+100b+10c+d=25c^2+10c+1$, odakle je $25\cdot(40a+4b-c^2)=1-d$. Leva strana je deljiva sa 25, pa mora biti deljivo sa 25 i $1-d$, a to je mogućesamo za $1-d=0$, tj. $d=1$. Tada je $40a+4b-c^2=0$, tj. $4\cdot(10a+b)=c^2$, što znači da je c^2 deljivo sa 4, a pošto su a, b, c — cifre $(a\neq 0)$ to odmah izlazi da je: $c^2=64$ i $10a+b=16$, tj. $c=8$, $b=6$, $a=1$. Prema tome, traženi broj je $\overline{abcd}=1681$.

2. *Algebarsko rešenje.* — V. sl. desno! Vreme da se pređe put AD je $\frac{x+320}{180}$, a vreme da se pređe put DB je $\frac{x}{250}$. Pošto je *pređ. put* $AB=$ *=sred. brzina · ukupno utroš. vreme*, to je: $2x+320=$ $=200\cdot\left(\frac{x+320}{180}+\frac{x}{250}\right)$, odakle se dobija $x=400$. Dakle: $AB=2x+320=800+320=1120$(km). Ima i drugih varijanti. Na primer: Ceo pređeni put podeljen sa ukupno utrošenim vremenom daje srednju brzinu, tj. $(2x+320):\left(\frac{x+320}{180}+\frac{x}{250}\right)=200$, odakle je $x=400$, itd. Za nepoznatu se takođe može uzeti i bilo koji od puteva AB, AD, CD.

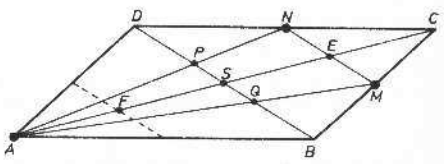


Aritmetičko rešenje. — Prema uslovu zadatka, AB se može podeliti na tri dela, gde je $AC=DB$ i $CD=320$ km (sl. desno). Zamislimo da iz A istovremeno s prvim avionom poleće drugi avion brzinom 200 km/h. On će u B stići istovremeno sa prvim avionom. Da pređe deo CD prvi avion je utrošio $\frac{320}{180}-\frac{320}{200}=\frac{8}{45}$ (časa) više od drugog aviona. Na svakih 10 km dela AC prvi avion zaostaje iza drugoga za $\frac{10}{180}-\frac{10}{200}=\frac{1}{180}$ (časa), a na svakih 10 km dela DB prvi aviona izmiče drugome za $\frac{10}{200}-\frac{10}{250}=\frac{1}{100}$ (časa). Prema tome, na svakih 20 km (10 km dela AC i 10 km dela BD) prvi avion izmiče drugome prosečno za $\frac{1}{100}-\frac{1}{180}=\frac{1}{225}$ (časa). Da bi nadokanadio zakašnjenje od $\frac{8}{45}$ časa, učinjeno na delu CD, prvi avion mora preletiti takvih etapa (od po 20 km) toliko koliko se puta $\frac{1}{225}$ sadrži u $\frac{8}{45}$, tj. $\frac{8}{45}:\frac{1}{225}=40$, što čini $20\cdot 40=800$ (km). Prema tome, razdaljina $AB=800\text{ km}+320\text{ km}=1120$ km.



3. *Prvi način.* — Iskoristiti činjenicu da sredina E duži MN leži na dijagonali AC i deli je u odnosu 3 : 1 (v. sliku! $CE=ES=SF=$ $=FA$, tj. $AE=3\cdot EC$).

Drugi način. — Ideja slična prethodnoj: P — težište $\triangle ACD$ (v. istu sliku!), $AP:PN=2:1$, te se tačka P lako odredi. Slično se dobije i Q — težište $\triangle ABC$. Time su određeni pravci dijagonala paralelograma, kao i S — presek dijagonala. Dalje: $SC=AS$; CN u preseku sa PQ daje D, a CM u preseku sa PQ daje B. Itd.



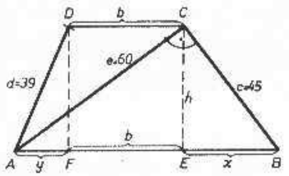
Treći način. — Najpre pokazati da duži AN i AM dele dijagonalu BD na 3 jednaka dela, a takođe je $AP:PN=2:1$ i slično $AQ:QN=2:1$. Time su određene tačke P i Q. Dalje: $PD=QP=QB$. Itd.

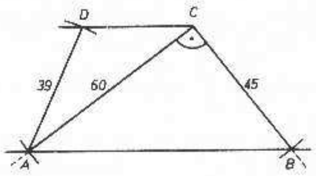
1970. - savezno natjecanje - 8. razred
Matematički list za učenike osnovne škole
http://www.dms.org.rs/index.php?action=matematicki_list
http://public.carnet.hr/mat-natj

Treći način. — Najpre pokazati da duži AN i AM dele dijagonalu BD na 3 jednaka dela, a takođe je $AP : PN = 2 : 1$ i slično $AQ : QN = 2 : 1$. Time su određene tačke P i Q. Dalje: $PD = QP = QB$. Itd.

4. Posmatrajmo pomoćnu skicu (sl. levo).

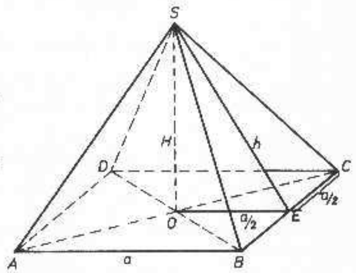
Konstrukcija — redosled: 1) konstruiše se pravougli trougao ABC pomoću kateta; 2) kroz C se povuče prava $p \parallel AB$; 3) iz A se opiše luk poluprečnika 39; 4) presek ovog luka sa p biće D — četvrto teme trapeza; $ABCD$ — traženi trapez.





Obim i površina. — Izračunavanje $AB = a$: Po P.T. $a^2 = 60^2 + 45^2 = 5625$, $a = 75$ (mm). — Izračunavanje visine trapeza (ona je istovremeno i visina na hipotenuzu pravouglog trougla ABC): iz $\frac{75 \cdot h}{2} = \frac{60 \cdot 45}{2}$ dobijamo $h = 36$ (mm). — Izračunavanje projekcija krakova na AB i osnovice CD: po P.T. je: $x^2 = c^2 - h^2 = (c+h)(c-h) = 81 \cdot 9$, $x = 27$ (mm); $y^2 = d^2 - h^2 = 39^2 - 36^2 = 225$, $y = 15$ (mm); tada $b + x + y = a$, tj. $b + 27 + 15 = 75$, odakle $b = 33$ (mm). — Prema tome, obim trapeza je: $o = a + b + c + d = 75 + 33 + 45 + 39 = 192$ (mm); površina mu je: $P = \frac{1}{2}(a+b)h = \frac{1}{2} \cdot 108 \cdot 36 = 1944$ (mm^2) ili $P = 19{,}44$ cm^2.

5. a) $P = a^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} ah = a^2 + 2ah$ (v. sliku). Iz $a^2 + 2ah = 5a^2$ dobijamo $h = 2a$. Po P. T. je $H^2 = h^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 4a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{15a^2}{4}$, odakle $H = \frac{a}{2}\sqrt{15}$; tada je $V = \frac{1}{3} a^2 \cdot H = \frac{1}{3} a^2 \cdot \frac{a}{2}\sqrt{15}$, tj. $V = \frac{1}{6} a^3 \sqrt{15}$.



b) Za $a = 6$ dm je $V = \frac{1}{6} \cdot 6^3 \cdot \sqrt{15} = 36\sqrt{15}$ (dm^3) ili $V \approx 139{,}427$ dm^3.

● Nema nijedne oblasti matematike, ma koliko apstraktna ona bila, koja se jednom ne bi mogla primeniti na pojave stvarnog sveta.

N. I. Lobačevski, veliki ruski matematičar

● U glavi Arhimeda bilo je više mašte nego u glavi Homera.

Volter

1970. - savezno natjecanje - 8. razred
Matematički list za učenike osnovne škole
http://www.dms.org.rs/index.php?action=matematicki_list
http://public.carnet.hr/mat-natj