Zahvaljujem Društvu matematičara Srbije (http://www.dms.org.rs/) i njegovom predsjedniku dr. Zoranu Kadelburgu na dopuštenju da iz časopisa "Matematički list za učenike osnovne škole" skeniram stranice koje sadrže zadatke i rješenja s republičkih natjecanja (SR Hrvatke) i saveznih natjecanja (SFRJ) i skenove objavim na web stranici http://public.carnet.hr/mat-natj .

Antonija Horvatek
http://public.carnet.hr/~ahorvate/

MATEMATIČKI LIST

ZA UČENIKE OSNOVNE ŠKOLE

VI

1—2

BEOGRAD
1971.

(6)

SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATIČARA, FIZIČARA I ASTRONOMA JUGOSLAVIJE

MATEMATIČKI LIST

za učenike osnovne škole

God. VI, broj 1—2 (1971/72)
Izlazi pet puta godišnje

IZDAJE DRUŠTVO MATEMATIČARA, FIZIČARA I ASTRONOMA SR SRBIJE
Beograd, Knez Mihailova 35/IV, p. p. 791.

Štampa: Beogradski izdavačko-grafički zavod, Beograd, Bul. vojvode Mišića br. 17

Zadaci na II saveznom takmičenju

VIII RAZRED

1. Šest učenika (nazovimo ih A, B, C, D, E, F) rešavali su neki zadatak. Zadatak su rešila dvojica. Na pitanje: *ko je rešio*, oni su dali pet odgovora, izjavivši da su zadatak rešili:

1) A i C;
2) B i F;
3) F i A;
4) B i E;
5) D i A.

U četiri od ovih pet odgovora jedan deo je tačan, a drugi netačan, dok su u jednom odgovoru oba dela netačna.

Koji učenici su rešili zadatak?

2. Učenik je zamislio jedan broj, sdesna mu je dopisao 2 i tako dobijenom broju dodao je 14. Broju koji je tako dobijen dopisao je sdesna 3 i onom što je dobio dodao je 52. Kada je tako dobijeni broj podelio sa 60, dobio je kao količnik broj za 6 veći od zamišljenog broja, a kao ostatak — dvocifreni broj napisan jednakim ciframa i to takvim da je broj desetica bio jednak upravo zamišljenom broju.

Naći zamišljeni broj.

3. Visina jednakokrakog trapeza jednaka je h, a njegova površina iznosi h^2. Pod kojim uglom se seku dijagonale tog trapeza?

4. U četvorouglu $ABCD$ neka su M i N središta suprotnih stranica AB i DC; zatim, neka se duži MD i AN seku u tački P, a MC i CN u tački Q. Dokazati da je površina četvorougla $MQNP$ jednaka zbiru površina trouglova APD i BCQ.

5. Osnova (baza) prave prizme je pravougaonik sa stanicama 5 cm i 8 cm, a površina omotača ove prizme iznosi 408,2 cm². Naći površinu omotača onog valjka čiji poluprečnik osnove (baze) iznosi 4 cm, ako zapremina tog valjka čini 64% zapremine date prizme. (Uzeti $\pi \approx 3,14$).

Rezltati, uputstva, rešenja

1. Radi kratkoće izražavanja i pisanja uvedimo neke oznake. Izjavu »učenik A je rešio zadatak« kratko ćemo zapisivati sa $A=1$; ako »A nije rešio« pisaćemo $A=0$. Slično i kad je reč o drugim učenicima.

Prema smislu zadatka, u jednom od pet odgovora oba slova su »jednaka nuli« (jer oba učenika nisu rešila zadatak), a u ostala četiri odovora jedno slovo je 0, drugo 1 (jedan učenik je rešio, drugi nije).

1° Pretpostavimo da su netačna oba dela prvog odgovora, tj. $A=0$, $C=0$. Tada iz trećeg i petog odgovora izlazi $F=1$ i $D=1$, a onda iz drugog odgovora imamo $B=0$, a iz četvrtog $E=1$. Tako smo dobili da su tri učenika (F, D i E) rešila zadatak, što je protivurečno uslovu da su zadatak rešila dvojica. Znači, pretpostavka $A=0$ i $C=0$ nije moguća.

2° Pretpostavimo zato da su netačna oba dela u drugom odgovoru, tj. $B=0$, $F=0$. Tada iz trećeg i četvrtog izlazi $A=1$ i $E=1$, a onda iz prvog odgovora sledi da je $C=0$, a iz petog $D=0$. Izlazi da su od šest učenika zadatak rešila samo dvojica: A i E.

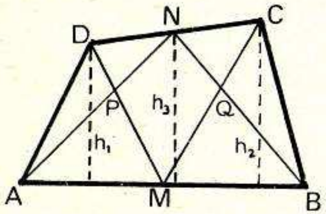
Sve druge pretpostavke dovode do protivrečnog zaključka da su zadatak rešila više od dva učenika. Dakle: zadatak su rešili učenici A i E.

2. Neka je x zamišljeni broj. Kad je učenik sdesna dopisao 2 dobio je $10x+2$; kad je tome dodao 14 imao je $10x+16$; tome je sdesna dopisao 3 pa je dobio $10(10x+16)+3$; na kraju, kad je ovome dodao (sabrao) 52 imao je $10(10x+16)+3+52$. Kad je poslednji broj podelio sa 60, količnik je bio $x+6$, a ostatak $10x+x$. Na osnovu zavisnosti između deljenika, delitelja i ostatka, imamo jednačinu: $10(10x+16)+55=60(x+6)+11$. Rešivši ovu jednačinu, dobija se $x=5$ (zamišljeni broj).

1971. - savezno natjecanje - 7. i 8. razred
Matematički list za učenike osnovne škole
http://www.dms.org.rs/index.php?action=matematicki_list
http://public.carnet.hr/mat-natj

3. Neka je $ABCD$ jednakokraki trapez ($AD=BC$), CE—normala iz C na osnovicu AB, tj. $CE=h$. (Sliku nacrtajte sami). Prema uslovu zadatka $\frac{1}{2}(a+b)\,h=h^2$, odakle izlazi da je $\frac{1}{2}(a+b)=h$ — srednja linija trapeza. Tada $AE=AB-BE=a-\frac{1}{2}(a-b)=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b=\frac{1}{2}(a+b)=h=CE$, pa je zato $\sphericalangle EAC=\sphericalangle ABD=45°$. Ugao između dijagonala kao treći ugao trougla ABO (O—presek dijagonala) iznosiće tada 90°. Dijagonale se seku pod pravim uglom.

4. Videti 583. zadatak u rubrici *Odabrani zadaci* (*ML IV.* 5). Dokaz se može izvesti, na primer, ovako. Neka su h_1, h_2, h_3 visine trouglova AMD, MBC, ABN. Tada je $h_3=\frac{1}{2}(h_1+h_2)$ — srednja linija pravouglog trapeza $ECDF$. Neka je $AB=a$. Imaćemo redom (gledaj sliku):



$$P_{MQNP}=P_{ABN}-P_{AMP}-P_{MBQ}=P_{ABN}-(P_{AMD}-$$
$$-P_{APD})-(P_{MBC}-P_{BCQ})=\frac{1}{2}ah_3-\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}h_1+P_{APD}-$$
$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}h_2+P_{BCQ}=\frac{a}{2}\left(h_3-\frac{1}{2}h_1-\frac{1}{2}h_2\right)+P_{APD}+P_{BCQ}.$$

Pošto smo već utvrdili da je $h_3=\frac{1}{2}h_1+\frac{1}{2}h_2$, to je izraz u zagradi jednak nuli, te imamo da je $P_{MQNP}=P_{APD}+P_{BCQ}$, što je i trebalo dokazati.

5. Iz poznate površine omotača prizme ($M_P=408{,}2$ cm^2) i obima njene osnove ($O=26$ cm) naći ćemo visinu prizme. Pošto je $M_P=O\cdot H$, imaćemo $408{,}2=26\,H$, odakle je $H=\frac{408{,}2}{26}$ (cm). Onda će zapremina prizme biti $V_P=B\cdot H=8\cdot 5\cdot\frac{408{,}2}{26}$ (cm^3), pa je zapremina valjka $V_V=\frac{64}{100}V_P=$ $=\frac{64}{100}\cdot\frac{8\cdot 5\cdot 408{,}2}{26}$ (cm^3). Ali $V_V=\pi r^2 H_V=\pi\cdot 16\cdot H_V$, pa je $16\pi\cdot H_V=\frac{64\cdot 8\cdot 5\cdot 408{,}2}{100\cdot 26}$, odakle $H_V=\frac{64\cdot 8\cdot 5\cdot 408{,}2}{100\cdot 26\cdot 16\pi}$ (cm). Površina omotača ovog valjka biće $M_V=2\pi r\cdot H_V=2\pi\cdot 4\cdot\frac{64\cdot 8\cdot 5\cdot 408{,}2}{100\cdot 26\cdot 16\pi}=$ li, posle izračunavanja $M_V=200{,}96$ (cm^2).

VII RAZRED

1. U sobi se nalazi nekoliko ljudi koji znaju bar jedan od tri jezika. Šestorica od njih znaju engleski, šestorica nemački, sedmorica francuski, četvorica znaju engleski i nemački, trojica znaju nemački i francuski, dvojica francuski i engleski, a jedan zna sva tri pomenuta jezika. Koliko ljudi ima u sobi? Koliko njih zna samo englenski?

2. Dvocifreni broj sabran sa brojem napisanim istim ciframa ali u obrnutom redosledu, daje broj koji je kvadrat nekog prirodnog broja.
Naći sve takve dvocifrene brojeve?

3. Nastavnik dade učeniku da podeli jedan broj drugim. Učenik dobije količnik 74 i ostatak 22. Onda izvrši probu (proveru): pomnoži količnik deliocem (divizorom) i dobijenom proizvodu doda ostatak, pa tako dobije 30214. Nije se složilo. Učenik je pri ovom množenju (prilikom kontrole) u deliocu (divizoru) na mestu desetica jednu šesticu pročitao kao nulu.
Koliku su deljenik i delilac (divizor)?

4. Dat je četvorougao $ABCD$. Konstruisan je paralelogram $DBCM$. Dokazati da je površina trougla ACM jednaka površini datog četvorougla $ABCD$.

5. Dat je trougao ABC. Konstruisati pravu p paralelnu stranici AB, tako da bude $AD+EB=DE$, gde je D tačka preseka tražene prave p sa AC, a E presečna tačka prave p sa stranicom BC datog trougla. Obrazložiti!

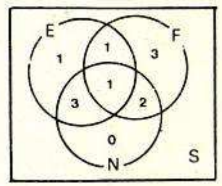
Rezultati, uputstva, rešenja

1. *Prvi način.* — Oznake: E-engleski, F-francuski, N-nemački, EN-engleski i nemački, NF-nemački i francuski, FE-francuski i engleski, ENF-sva tri jezika. Sledeća tabela pokazuje koliko je pojedinih ljudi bilo u sobi ako su iz nje postepeno izlazili oni koji su znali više od jednog jezika:

E	N	F	EN	NF	FE	ENF	jezici →
6	6	7	4	3	2	1	→ stanje u početku
5	5	6	3	2	1	0	→ kad izađe onaj koji zna sva tri jezika
2	2	6	0	2	1	0	→ kad izađu 3 č. koji istovr. znaju E i N
2	0	4	0	0	1	0	→ kad izađu 2 č. koji istovr. znaju N i F
1	0	3	0	0	0	0	→ kad izađe 1 č. koji zna istovr. F i E

Kao što se vidi, ostao je 1 čovek koji zna samo E. Pošto su u sobi ostala još 3 č. koji znaju samo F, a svega je iz sobe izašlo 7, izlazi da ih je u početku ukupno bilo 11.

Drugi način. — Zadatak se jednostavnije rešava pomoću *Ojler-Venovih d*ijagrama (v. sl..). Krugovi E, N, F znače skupove ljudi koji govore pomenute jezike: engleski (E), nemački (N), francuski (F). Pazi: u E su kako oni koji govore samo E tako i oni koji osim E govore još ili N ili F, pa i oni koji govore istovremeno E, N, F! Slično za ostale. Zato krugovi imaju zajedničke delove. Krugove smo smestili u pravougaonik S (soba). Pojedinim delovima dijagrama dodelićemo odgovarajući broj ljudi prema uslovu zadataka. U deo koji je unutar svih krugova upisujemo 1 (jer samo 1 čovek zna sva tri jezika). Zatim u delove zajedničke za po dva kruga upisujemo koliko ljudi zna samo po dva jezika: 3 (EN), 2 (NF) i 1 (FE), jer: $4-1=3$, $3-1=2$ i $2-1=1$. Na kraju utrđujemo (i u odgovarajuće delove dijagrama upisujemo) koliko ljudi zna samo po jedan jezik. Imamo: $6-(3+1+1)=1$ — **zna samo engleski** (naime, ukupno 6 ljudi znaju engleski, ali od toga moramo oduzeti one koji znaju i neki drugi jezik); slično, $6-(3+2+1)=0$—nijedan ne zna nemački i $7-(2+1+1)=3$ — znaju samo francuski. Tako smo dosad uračunali 11 ljudi ($1+1+3+2+1+0+3=11$). Pošto u sobi (S) nije bilo ljudi koji nisu znali nijedan od pomenutih jezika, to znači da je u njoj **ukupno bilo 11 ljudi.**



2. Traženi dvocifreni broj: $10a+b$ (a — desetice, b—jedinice). Broj s istim ciframa, ali obrnutim redom: $10b+a$. Zbir ovih brojeva: $10a+b+10b+a=11a+11b=11(a+b)$. Ako je $11(a+b)$ kvadrat nekog prirodnog broja, onda mora biti $a+b=11$. Pošto $a+b=11$, moguće je sledeće: $a=2$, $b=9$; $a=3$, $b=8$; $a=4$, $b=7$; $a=5$, $b=6$. Traženi brojevi: 29 i 92, 38 i 83, 47 i 74, 56 i 65.

3. Označimo deljenik sa x, a delilac sa y. Deljenik sa dobije kad se količnik pomnoži deliocem i tome doda ostatak, tj. $x=74y+22$. Pri proveravanju, tj. vršeći radnju $74\cdot y+22$, učenik je pogrešio; dobijeni broj 30214 nije tačan, treba ga popraviti. Kako? Uzimajući pri množenju $74\cdot y$ u y šesticu na mestu desetica kao nulu, učenik kao da nije ni množio sa 6 desetica, pa je njegov probni rezultat manji za $74\cdot 60=4440$. Znači, rezultat treba povećati za 4440, pa je $74y+22=30214+4440$, odakle $y=468$. Delilac je 468, a deljenik 34654. Izvrši proveru!

4. Neka prava provučena kroz A normalno na pravu CM, seče ovu u tački L, a pravu BD u tački K (v. sliku!). Tada

$$P_{ABCD}=P_{ABD}+P_{BCD}=\frac{1}{2}BD\cdot KL=\frac{1}{2}BD\cdot KL=\frac{1}{2}BD\cdot(AK+KL)=$$
$$=\frac{1}{2}BD\cdot AL=\frac{1}{2}CM\cdot AL=P_{ACM}.$$

1971. - savezno natjecanje - 7. i 8. razred
Matematički list za učenike osnovne škole
http://www.dms.org.rs/index.php?action=matematicki_list
http://public.carnet.hr/mat-natj

5. Pretpostavimo da je zadatak rešen, tj. da je $DE \parallel AB$ i $AD+EB=DE$ (v. sliku!). Prenesimo $DO=AD$; tada $OE=EB$. U $\triangle ADO$ je $\sphericalangle DAO=\sphericalangle DOA=\sphericalangle OAB$ (osobina jednakokr. trougla, zatim: naizmenični uglovi—uglovi sa paralelnim kracima). Prema tome, AO je simetrala ugla BAC. Analogno: BO — simetrala ugla ABC. Odatle, *konstrukcija*: povuku se simetrale unutraš. uglova A i B datog trougla do njihovog preseka O, a zatim se kroz O povuče prava p paralelno sa AB, tj. $DE \parallel AB$. — Lako je *dokazati* da je DE tražena prava. Zaista, $AD=DO$ (jer $\sphericalangle DOA=\sphericalangle OAB=\sphericalangle DAO$) i $EB=OE$ (jer $\sphericalangle EOB==\sphericalangle OBA=\sphericalangle OBE$). Znači, $AD+EB=DO+$ $+OE=DE$. — Zadatak ima jedno rešenje i uvek je moguć.