Zahvaljujem Društvu matematičara Srbije (http://www.dms.org.rs/) i njegovom predsjedniku dr. Zoranu Kadelburgu na dopuštenju da iz časopisa "Matematički list za učenike osnovne škole" skeniram stranice koje sadrže zadatke i rješenja s republičkih natjecanja (SR Hrvatke) i saveznih natjecanja (SFRJ) i skenove objavim na web stranici http://public.carnet.hr/mat-natj .

Antonija Horvatek
http://public.carnet.hr/~ahorvate/

VAŽNA OBAVEŠTENJA

1. Uredništvo poziva nastavnike i profesore matematike kao i ostale čitaoce da šalju svoje priloge za list: članke, odabrane zadatke, zadatke sa prijemnih ispita i matematičkih takmičenja, razne zanimljivosti. Poželjno je da svi rukopisi (osim učeničkih rešenja zadataka) budu pisani pisaćom mašinom s proredom, a crteži izrađeni na posebnoj čvršćoj hartiji. Rukopisi se ne vraćaju.

2. „Matematički list" namenjen je *svim učenicima* V—VIII raz. osnovne škole. List izlazi 5 puta u toku školske godine.

3. Godišnja pretplata (za svih 5 brojeva) iznosi 20 dinara. Naručiocima za više od 10 kompleta odobravamo rabat (20%, 15%, 10%), zavisno od roka do kojeg se uplati celokupna pretplata (1.11, 1.2, 1.5). Nikakvi drugi odbici ne uvažavaju se.

Narudžbine se šalju na adresu lista, a novac na **žiro-račun „Matematičkog lista" broj 60806-678-14627.** Pri tome **obavezno** treba navesti *tačnu adresu* na koju list treba dostavljati i jasno naznačiti na šta se narudžbina odnosno uplata odnosi.

4. Raspolažemo kompletima lista iz školske 1968/69. god. (br. III. 1—5), šk. 1969/70. god. (br. IV. 1—5), šk. 1970/71. god. (br. V. 3—5), šk. 1971/72. god. (VI. 1—5). Isporučujemo ih odmah po **sniženoj** ceni od 5 dinara za komplet, a komplet iz šk. 1971/72. god. (VI. 1—5) po 7 dinara.

5. Mole se poverenici „Mat. lista" da izmire sva zaostala dugovanja.

6. Sve priloge, primedbe i narudžbe slati *isključivo* na adresu:

Matematički list, p.p. 728, 11001 Beograd

S A D R Ž A J

CENA 8 DINARA

MATEMATIČKI LIST

ZA UČENIKE OSNOVNE ŠKOLE

VII

4—5

BEOGRAD
1973.

SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATIČARA, FIZIČARA I ASTRONOMA JUGOSLAVIJE

MATEMATIČKI LIST

za učenike osnovne škole

God. VII, broj 4—5 (1972/73)

Izlazi pet puta godišnje

IZDAJE: DRUŠTVO MATEMATIČARA, FIZIČARA I ASTRONOMA SR SRBIJE

11000 Beograd, Knez Mihailova 35/IV

Oslobođeno plaćanja poreza na promet na osnovu rešenja Republičkog sekretarijata za kulturu SR Srbije br. 413-186/72-03 od 11. 1. 1973. godine

Štampa: Beogradski izdavačko-grafički zavod, Beograd, Bul. vojvode Mišića br. 17

1972. - savezno natjecanje - 7. i 8. razred
Matematički list za učenike osnovne škole
http://www.dms.org.rs/index.php?action=matematicki_list
http://public.carnet.hr/mat-natj

MATEMATIČKA TAKMIČENJA

Treće savezno takmičenje mladih matematićara osnovnih škola Jugoslavije, 18. 6. 1972.

Kao i prethodna dva, tako je — uz saglasnost Saveza društva matematičara, fizičara i astronoma Jugoslavije — i Treće savezno takmičenje mladih matematičara iz osnovnih škola sprovedeno u ogranizaciji *MATEMATIČKOG LISTA*, a u skladu sa *Dogovorom o organizovanju i finansiranju saveznih takmičenja mladih matematičara* koji su sklopila republička društva matematičara, fizičara i astronoma.

Takmičenje je održano 18. 6. 1972. godine na Prirodno-matematičkom fakultetu u Beogradu. Učestvovali su **učenici VII i VIII razreda** osnovne škole i to oni koje su, shodno pomenutom Dogovoru, odredila republička društva matematičara i fizičara na osnovu rezultata na prethodnim stupnjevima matematičkih takmičenja i to: SR Srbija — 18, SRH —11, SR BiH — 9, SR Slovenija — 6, SR Crna Gora — 2; **ukupno 46 takmičara.**

Zadatke je pripremila i radove takmičara pregledala Savezna komisija koju su sačinjavali: predstavnik *ML* i po jedan delegat svakog republičkog društva čiji su takmičari učestvovali: [*B. Marinković*, (urednik *ML*), *V. Brkić-Devčić* (SRH), *K. Mijatović* (SR BiH), *B. Kolenko* (SR Slovenija), *D. Popović* (SR CG), *D. Bogdanović* (SR Srbija)].

Takmičari su zadatke radili poš šifrom i na svom maternjem jeziku. Izrada zadataka trajala je 120 minuta. Saopštavanje rezultata i podela priznanja izvršeno je po podne istog dana.

Takmičarima koji su postigli 18—25 bodova dodeljene su diplome, a takmičarima sa 15—17 bodova — pohvalnice. Pored skromnog poklona svim takmičarima, nosioci diploma dobili su vredne nagrade koje je obezbedio *MATEMATIČKI LIST* iz svog *Nagradnog fonda*. Nastavnicima nagrađenih učenika takođe su dodeljene nagrade (matematičke knjige). Ukupna vrednost svih nagrada iznosila je oko 6000 dinara.

Za takmičare, koji nisu bili iz Beograda, bio je u Beogradu obezbeđen smeštaj i ishrana, te razgledanje grada — sve na teret *ML*.

Rezultati III saveznog takmičenja

Navodimo samo nagrađene i pohvaljene učenike. Od ukupno 46 takmičara bilo je 12 nagrađenih i 9 pohvaljenih.

VIII RAZRED

I nagrada

1. *Tamar Čefarin*, OŠ Grm — Novo Mesto

II nagrada

2. *Abazi Ćerim*, OŠ »3. oktobar«, Bor
2. *Cvetković Žarko*, OŠ »P. Dokić«, Sarajevo
3. *Ćalasan Rajko*, OŠ »Savo Pejanović«, Titograd

1972. - savezno natjecanje - 7. i 8. razred
Matematički list za učenike osnovne škole
http://www.dms.org.rs/index.php?action=matematicki_list
http://public.carnet.hr/mat-natj

III nagrada

1. *Becze Tibor*, OŠ »Petefi Šandor«, Novi Savd
2. *Đorđević Zorica*, OŠ »Ivan Gundulić«, Novi Beograd
3. *Košir Sonja*, OŠ »Milojka Štrukelj«, Nova Gorica
4. *Dragaš Nikola*, OŠ »Stevo Opačić«, Golubić kod Knina
5. *Zavrl Nevenka*, OŠ »Prežihov Voranc«, Ljubljana

Pohvale

1. *Perić Milan*, OŠ »Maršal Tito«, Medveđa kod Trstenika
2. *Kovačević Marjan*, OŠ »Goce Delčev«, Zemun
3. *Muratović Miodrag*, OŠ »Branko Božović«, Titograd
4. *Oblak Marko*, OŠ »Prežihov Voranc«, Ljubljana
5. *Balen Mario*, OŠ »Hasan Kikić«, Sanski Most
6. *Živčić Ivanka*, OŠ »Vežica«, Rijeka
7. *Lovrić Miroslav*, OŠ »7 sekretara SKOJ-a«, Zagreb
8. *Lazović Ljiljana*, OŠ »Vuk Karadžić«, Vranje

VII RAZRED

II nagrada

1. *Ljubić Nina*, OŠ »August Šenoa«, Zagreb
2. *Dostanić Milutin*, OŠ »Ratko Mitrović«, Čačak

III nagrada

1. *Ilić Dragan*, OŠ »Ratko Mitrović«, Čačak

Pohvala

1. *Jablanović Slavica*, OŠ »Despot Stevan Visoki«, Despotovac

Zadaci na III saveznom takmičenju

VII RAZRED

1. Članovi matematičke sekcije u jednoj školi dogovorili su se da za vrijeme praznika svaki od njih napiše po jednu razglednicu ostalim članovima. Koliko je svega bilo članova u toj sekciji ako je bilo napisano ukupno 342 razglednice?

2. Prilikom pismenog rada iz matematike 12% učenika u razredu nije riješilo zadatak, 32% učenika je djelimično rijehilo, a ostatak od 14 učenika zadatak je tačno riješilo. Koliko je učenika bilo u razredu?

3. Primenjujući odgovarajuće formule, uprosti (pojednostavi) izraz:

$$A=[(4a+5b)^2]^2-[(4a-5b)^2]^2-160ab\,(4a-5b)^2.$$

Izvrši proveravanje (pokus) za $a=1$, $b=-2$.

4. Zadana je prava (pravac) MN i tačke A i B (sa iste strane te prave). Na zadanoj pravoj naći tačku P tako da ugao (kut) MPA bude 2 puta veći od ugla NPB.

5. U kvadrat stranice a upisan je drugi kvadrat čiji vrhovi (temena) leže na stranicama prvog, ali tako da stranice zadanog i upisanog kvadrata čine uglove od 30°. Koji dio površine datog kvadrata čini površina upisanog kvadrata? Izrazi taj odnos i u procentima (%).

VIII RAZRED

1. Popuniti prazna polja ove tablice tako da suma (zbir) brojeva u *svaka* tri susedna polja — kako horizontalno, tako i vertikalno — bude 12.

	5						
					1		
6							
			2				

2. Poletjevši istovremeno, helikopter i avion lete susret jedan drugom. U trenutku susreta helikopter je preletio 100 km manje od aviona i na mjesto polijetanja aviona stigao 3 sata poslije susreta. Avion je stigao na uzletište helikoptera 1 sat i 20 minuta poslije susreta. Naći brzinu aviona i helikoptera i udaljenost između njihovih uzletišta.

3. Konveksni šestougao (izbočeni šesterokut) $ABCDEF$ sastavljen je od jednakokrakog trapeza $ACDF$ i dva jednakokraka trougla ABC i FDE jednakih visina ($h=12$ cm). Stranice tog mnogougla (mnogokuta) su: $AB=15$ cm, $AF=25$ cm i $FE=20$ cm. Konstruišite (konstruirajte) ga u razmeri 1 : 5 i izračunajte mu površinu (u dm^2).

4. Brigada traktorista treba da poore dve njive, pri čemu je jedna njiva po površini dva puta veća od druge. Ceo prvi dan svi traktoristi su orali prvu njivu, a onda su se podelili, pa je drugoga dana polovina brigade dovršila oranje prve (veće) njive, a druga polovina brigade orala je drugu njivu (koja je, ne zaboravite, dva puta manja od prve). Ova druga polovina brigade nije mogla da dovrši oranje druge njive, pa je — da bi dovršio ostatak manje njive — jedan traktorista morao orati još dva dana. Koliko je bilo traktorista u brigadi? (Pretpostavlja se da svi traktoristi rade pod istim uslovima i imaju istu produktivnost).

5. Zadana je prava pravilna jednakoivična (jednakobridna) trostrana prizma čija baza ima površinu $6{,}25\sqrt{3}\ cm^2$.

a) Izračunaj osnovnu ivicu (brid) tog tijela.

b) Odredi omjer (odnos) volumenâ (zapreminâ) zadanoj prizmi opisanog i upisanog valjka (s istom visinom kao prizma). Da li taj omjer važi za svaku pravu jednakoivičnu trostranu prizmu?

1972. - savezno natjecanje - 7. i 8. razred
Matematički list za učenike osnovne škole
http://www.dms.org.rs/index.php?action=matematicki_list
http://public.carnet.hr/mat-natj

Rezultati, uputstva i rešenja

VII RAZRED

1. Neka je bilo n članova matematičke sekcije. Svaki član poslao je $(n-1)$ razglednicu, a svi su poslali $n(n-1)$ razglednica, pa je

$$n(n-1)=342, \text{ tj. } n(n-1)=2\cdot 3\cdot 3\cdot 19.$$

Od mogućih kombinacija, $2\cdot(3\cdot 3\cdot 19)$, $(2\cdot 3)\cdot(\cdot 19)$, $(2\cdot 3\cdot 3\cdot 3)\cdot 19$ i $(3\cdot 3)\cdot(2\cdot 19)$, biramo onu koja predstavlja proizvod dvaju uzastonpih prirodnih brojeva; biće $n(n-1)=19\cdot 18$, odakle $n=19$.

U sekciji je bilo 19 članova.

2. U razredu je bilo **25 učenika.**

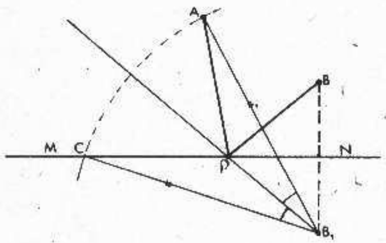
Uputstvo. — Broj učenika koji su tačno riješili zadatak čini 100%—(32%+12%)=56% broja svih učenika u razredu, što iznosi 14, te lako dobijamo ukupan broj učenika (100%), naime, $14:0{,}56=25$.

3. $$\begin{aligned}A&=[(4a+5b)^2]-[(4a-5b)^2]^2-160ab(4a-5b)^2=\\&=[(4a+5b)^2+(4a-5b)^2][(4a+5b)^2-(4a-5b)^2]-160ab(4a-5b)^2=\\&=(16a^2+40ab+25b^2+16a^2-40ab+25b^2)(4a+5b+4a-5b)(4a+5b-4a+5b)-\\&-160ab(4a-5b)^2=(32a^2+50b^2)\cdot 8a\cdot 10b-160ab(4a-5b)^2=\\&=160ab(16a^2+25b^2)-160ab(16a^2-40ab+25b^2)=\\&=160ab(16a^2+25b^2-16a^2+40ab-25b^2)=160ab\cdot 40ab=\mathbf{6400a^2b^2}.\end{aligned}$$

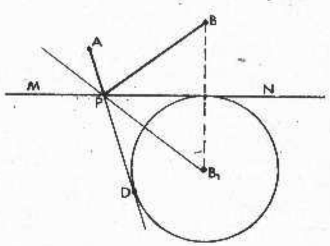
Za $a=-1$, $b=-1$, zadani izraz ima vrednost
$[(-14^2]^2-[(-4+10)^2]^2-160\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot(-4+10)^2=196^2-36^2-320\cdot 6^2=196^2-6^2(6^2+320)=$
$=196^2-36\cdot 356=\mathbf{25600}$; dobijeni izraz $6400a^2b^2$ ima istu vrednost, jer $6400\cdot 1\cdot 4=\mathbf{25600}$.

4. *Prvi način.* — Konstruiše se tačka B_1 simetrična sa tačkom B u odnosu na zadanu pravu MN (sl. 1), pa se na pravoj MN nađe tačka C tako da bude $B_1C=B_1A$ (oko B_1 se opšte kružni luk poluprečnikom $r=AB_1\ldots$). Zatim se povuče simetrala $\sphericalangle CB_1A$. Neka ona seče pravu MN u tački P.

Tačka P je tražena tačka.



Sl. 1



Sl. 2

Drugi način. — Konstruše se, kao i u prvom varijanti, tačka B_1, simetrična sa tačkom B u odnosu na radu pravu MN. Zatim se opiše kružnica k s centrom u tački B_1 tako da dodiruje pravu MN. Iz date tačke A povučemo dirku AD na kružnicu k (sl. 2). Tačka P u kojoj ta dirka seše pravu MN je tražena tačka, jer $\sphericalangle MPA=\sphericalangle NPD=2\cdot\sphericalangle NPB_1=2\cdot\sphericalangle NPB$.

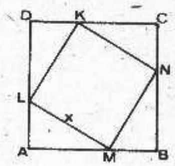
Neka čitalac u oba razmotrena slučaja dokaže ispravnost konstrukcije i ispita mogućnost konstrukcije (broj rešenja).

5. Približno 54%.

Rešenje. — Neka je x stranica upisanog kvadrata (sl. 3). Pošto je $\sphericalangle LMA=30°$, pravougli trougao LAM je polovina jednakostraničnog trougla stranice $LM=x$, te ćemo imati $AL=\frac{x}{2}$ i $AM=\frac{x}{2}\sqrt{3}$. Tada:

$$AB=AM+MB=AM+AL, \text{ tj. } a=\frac{x}{2}\sqrt{3}+\frac{x}{2}=\frac{x}{2}(\sqrt{3}+1),$$

odakle je $x=\frac{2a}{\sqrt{3}+1}$. Površina datog kvadrata $P_1=a^2$, a površina upisanog $P_2=x^2=\frac{4a^2}{(\sqrt{3}+1)^2}$. Odnos površine kvadrata $KLMN$ prema površini kvadrata $ABCD$ je



Sl. 3

$$P_2:P_1=\frac{4a^2}{(\sqrt{3}+1)^2}:a^2, \text{ tj. } P_2:P_1=\frac{4}{(\sqrt{3}+1)^2}=\frac{4}{(3+2\sqrt{3}+1)}=\frac{2}{2+\sqrt{3}}=$$

$$\frac{2(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=\frac{2(2-\sqrt{3})}{4-3}=2(2-\sqrt{3}).$$

Dakle, $P_2=2(2-\sqrt{3})P_1\approx 0{,}54\cdot P_1$. Drugim rečima, površina upisanog kvadrata čini približno 54% površine datog kvadrata.

VIII RAZRED

1. Neka su a, b, c, d četiri broja koji su jedan iza drugog u jednom redu (tj. sa četiri uzastopna polja tablice bilo po horizontali, bilo po vertikali). Prema uslovu je $a+b+c=b+c+d$, odakle $a=d$, što znači da se brojevi u jednom redu ponavljaju posle svaka dva preskočena polja, pa kad shodno tome popunimo horizontale, imaćemo situaciju kao na levoj tablici (sl. 1). Na isti način popunićemo i vertikale, pa ćemo posle toga imati situaciju kao na desnoj tablici (sl. 2).

	5			5			5
		1			1		
6			6			6	
2			2			2	

Sl. 1

2	5		2	5		2	5
		1			1		
6			6			6	
2	5		2	5		2	5

Sl. 2

Ostale bojeve nalazimo iz uslova da suma svaka tri susedna (uzastopna) broja u svakom redu iznosi 12. Konačno imamo popunjenu tablicu (sl. 3). Brojevi koji su bili dati istaknuti su polucrno.

2	5	5	2	5	5	2	5
4	7	1	4	7	1	4	7
6	0	6	6	0	6	6	0
2	5	5	2	5	5	2	5

Sl. 3

1972. - savezno natjecanje - 7. i 8. razred
Matematički list za učenike osnovne škole
http://www.dms.org.rs/index.php?action=matematicki_list
http://public.carnet.hr/mat-natj

2. **Udaljenost između uzletišta je 500 km, brzina helikoptera je 100 km/h, a aviona 150 km/h.**

R e š e n j e. — Neka je helikopter do susreta preleteo x km; tada je avion do susreta preleteo $(x+100)$ km. Brzina helikoptera je $\frac{x+100}{3}$ km/h, a brzina aviona $\frac{x}{1\frac{1}{3}}$ km/h. Od svog uzletišta do mesta susreta helikopter je leteo $x : \frac{x+100}{3} = \frac{3x}{x+100}$ (sati); avion je leteo od svog uzletišta do susreta $\frac{1\frac{1}{3}(x+100)}{x}$ sati. Prema tome, možemo postaviti jednačinu

$$\frac{3x}{x+100} = \frac{\frac{4}{3}(x+100)}{x}, \quad \text{tj.} \quad \left(\frac{x}{x+100}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

Odatle dobijamo $\frac{x}{x+100} = \frac{2}{3}$ ili $\frac{x}{x+100} = -\frac{2}{3}$, jer $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$. Pošto su x i $x+100$ pozitivne veličine, to dolazi u obzir samo prava mogućnost, tj. da je $\frac{x}{x+100} = \frac{2}{3}$, odakle je $x=200$. Znači, helikopter je do susreta preleteo 200 km, a avion 300 km. Itd.

3. **Bilo je 8 traktorista.**

R e š e n j e. — Neka je u brigadi bilo x traktorista. Ako rad merimo »traktor-danima« (rad 1 traktora u toku 1 dana), onda je:

$x \cdot 1 + \frac{x}{2} \cdot 1$ — rad na oranju I njive,

$\frac{x}{2} \cdot 1 + 2$ — rad na oranju II njive.

Tada (pošto je prva njiva dva puta veća od druge):

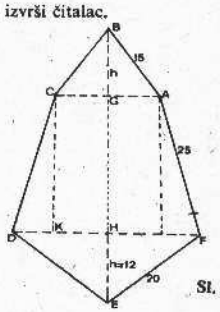
$$x + \frac{x}{2} = 2 \cdot \left(\frac{x}{2} + 2\right),$$

odakle se dobija $x=8$ (borj traktorista u brigadi).

P r i m e d b a. — Uporedi sa zadatkom o koscima (Zadatak Lava Tolstoja) u ML V. 4 (str. 142—145) i ML V. (str. 205—206).

4. Skica (sl. 4). Geometrijsku konstrukciju u datoj razmeri neka izvrši čitalac.

Površina šestougla sa datim podacima (ne umanjenog) iznosi 900 cm², odnosno **9 dm²**.



Sl. 4

U p u t s t v o. — Primenjujući Pitagorinu teoremu, dobija se $DH=16$ cm, $CG+9$ cm, $CK=24$ cm. Tada: $DF=32$ cm, $AC=18$ cm. Tražena površina
$P=P_{ABC}+P_{ACDF}+P_{FDE}=9 \cdot 12+25 \cdot 24+16 \cdot 12=900$ (cm²). Itd.

5. a) Iz $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}=6{,}25\sqrt{3}$, dobijamo $a=5$ (cm).

b) Poluprečnik upisanog valjka je $r=\frac{1}{3}h=\sqrt{3}$, a poluprečnik opisanog valjka je $R=\frac{2}{3}h=\frac{a}{3}\sqrt{3}=2r$ (gde je h visina baze). Posmatrani valjci su jednakih visina, pa se njihovi volumeni odnose kao kvadrati pripadajućih poluprečnika, tj. $V_1 : V_2 = R^2\pi H : r^2\pi H \Rightarrow$ $\Rightarrow V_1 : V_2 = R^2 : r^2 \Rightarrow V_1 : V_2 = 4r^2 : r^2 \Rightarrow V_1 : V_2 = 4 : 1$, pri čemu je V_1 volumen (zapremina) prizmi opisanog valjka, a V_2 — upisanog. Za sve ovakve prizme ovaj odnos je isti.

B. M.