Zahvaljujem Društvu matematičara Srbije (http://www.dms.org.rs/) i njegovom predsjedniku dr. Zoranu Kadelburgu na dopuštenju da iz časopisa "Matematički list za učenike osnovne škole" skeniram stranice koje sadrže zadatke i rješenja s republičkih natjecanja (SR Hrvatke) i saveznih natjecanja (SFRJ) i skenove objavim na web stranici http://public.carnet.hr/mat-natj .

Antonija Horvatek
http://public.carnet.hr/~ahorvate/

VAŽNA OBAVEŠTENJA

1. Uredništvo poziva nastavnike i profesore matematike kao i ostale čitaoce da šalju svoje priloge za list: članke, odabrane zadatke, zadatke sa prijemnih ispita i matematičkih takmičenja, razne zanimljivosti. Poželjno je da svi rukopisi (osim učeničkih rešenja zadataka) budu pisani pisaćom mašinom s proredom, a crteži izrađeni na posebnoj čvršćoj hartiji. Rukopisi se ne vraćaju.

2. „Matematički list" namenjen je *svim učenicima* V—VIII raz. osnovne škole. List izlazi 5 puta u toku školske godine.

3. Godišnja pretplata (za svih 5 brojeva) iznosi 25 dinara. Naručiocima za više od 10 kompleta odobravamo rabat (20%, 15%, 10%), zavisno od roka do kojeg se isplati celokupna pretplata (1.XII, 1.II, 1.IV). Nikakvi drugi odbici ne uvažavaju se.

Narudžbine se šalju na adresu lista, a novac na **žiro-račun „Matematičkog lista" broj 60806-678-14627**. Pri tome **obavezno** treba navesti *tačnu adresu* na koju list treba dostavljati i jasno naznačiti na šta se narudžbina odnosno uplata odnosi.

4. Raspolažemo kompletima lista iz školske 1968/69. god. (br. III. 1—5), šk. 1969/70. god. (br. IV. 1—5), šk. 1970/71. god. (br. V. 3—5), šk. 1971/72. god. (br. VI. 1—5) i šk. 1972/73 god. (br. VII. 1—5). Od ovih godišta prodaju se III, IV, VI i VII po **sniženoj** ceni od 6 dinara za komplet, a godište III po ceni od 3 dinara.

5. Mole se poverenici „Mat. lista" da izmire sva zaostala dugovanja.

6. Sve priloge, primedbe i narudžbe slati *isključivo* na adresu:

Matematički list, p.p. 728, 11001 Beograd

S A D R Ž A J

CENA 5 DINARA

5-15

P- 609 (23. XI 73)

MATEMATIČKI LIST

ZA UČENIKE OSNOVNE ŠKOLE

VIII

1

BEOGRAD
1973.

1973. - savezno natjecanje - 7. i 8. razred
Matematički list za učenike osnovne škole
http://www.dms.org.rs/index.php?action=matematicki_list
http://public.carnet.hr/mat-natj

SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATIČARA, FIZIČARA I ASTRONOMA
JUGOSLAVIJE

MATEMATIČKI LIST

za učenike osnovne škole

God. VIII, broj 1 (1973/74)

Izlazi pet puta godišnje

IZDAJE DRUŠTVO MATEMATIČARA, FIZIČARA I ASTRONOMA
SR SRBIJE

Beograd, Knez Mihajlova 35/IV, p. p. 728.

Oslobođeno plaćanja poreza na promet na osnovu rešenja Republičkog sekretarijata za kulturu SR Srbije br. 413-186-03 od 11. 1. 1973. godine

Štampa: Beogradski izdavačko-grafički zavod, Beograd, Bul. vojvode Mišića br. 17

ČETVRTO SAVEZNO TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA OSNOVNIH ŠKOLA JUGOSLAVIJE

Na dan 17. 6. 1973. g. održano je u Beogradu četvrto savezno takmičenje mladih matematičara osnovnih škola Jugoslavije. Takmičenje je organizovao, kao i prethodnih godina, Matematički list za učenike osnovnih škola, prema dogovoru o organizaciji i finansiranju saveznih takmičenja mladih matematičara, sklopljenom među republičkim društvima matematičara, fizičara i astronoma Jugoslavije.

U takmičenju su učestvovali učenici VII i VIII razreda osnovne škole, i to oni koji su, shodno pomenutom dogovoru, odredila republička društva matematičara i fizičara na osnovu rezultata na prethodnim stupnjevima takmičenja. Njih je bilo: iz SR Slovenije — 7, iz SR Hrvatske — 10, iz SR BiH — 9, iz SR Srbije — 22. Ukupno 48.

Zadatke je pripremila i radove takmičara je pregledala savezna komisija, sastavljena od odgovornog urednika ML, Bogoljuba Marinkovića, i po jednog delegata svakog republičkog društva koje je uputilo učenike na takmičenje. Delegati su bili: Višnja Brkić-Devčić (SR Hrvatska), Bogumila Kolenko (SR Slovenija), Kosta Mijatović (SR BiH) i Dušan Bogdanović (SR Srbija). Izrada zadataka je trajala 120 minuta. Takmičari su zadatke radili na svom maternjem jeziku i predavali ih pod šifrom. Za svaki od 5 zadataka svaki takmičar je mogao dobiti najviše po 5 bodova, što znači da je mogao osvojiti najviše 25 bodova.

Takmičarima koji su osvojili najmanje po 19 bodova dodeljene su nagrade sa diplomama, a onima koji su osvojili po 16 do 19 bodova dodeljene su pohvale. Sem toga svakom od učesnika takmičenja od strane ML bila je dodeljena po jedna matematička knjiga, a nagrađenim učenicima bili su dodeljeni i drugi pokloni. Naposletku, i svakom od nastavnika matematike onih učenika koji su došli na takmičenje upućena je na poklon po jedna matematička knjiga.

Za takmičare koji nisu bili iz Beograda ML je obezbedio u Beogradu dvodnevni smeštaj i ishranu, kao i prevoz za razgledanje grada.

Nagrađeni i pohvaljeni su sledeći učenici:

VII razred

1. *Jovanović Moma*, OŠ „Ratko Vukićević“, Niš (I nagrada)
2. *Todorović Branislav*, OŠ „Svetozar Miletić“, Zemun (II nagrada)
3. *Grujić Ljubomir*, OŠ „Vuk Karadžić“, Negotin (II nagrada)
4. *Tucaković Kristina*, OŠ „Dositej Obradović“, Beograd (II nagrada)
5. *Janičić Biljana*, OŠ „Nada Popović“, Kruševac (pohvala)
6. *Bobot Vladimir*, OŠ „2 oktobar“, Zrenjanin (pohvala)
7. *Kaljević Miloš*, OŠ „Andra Savčić“, Valjevo (pohvala)
8. *Lončar Predrag*, OŠ „8 maj“, Varaždin (pohvala)

VIII razred

1. *Vidmar Matjaš*, OŠ „Milojka Štrukelj“, Nova Gorica (I nagrada)
2. *Zakošek Zlatko*, OŠ „12 septembar)“, Majdanpek (I nagrada)
3. *Šević Dragutin*, OŠ „Dositej Obradović“, Zrenjanin (II nagrada)
4. *Kovačević Srđan*, OŠ „Miljenko Cvitković“, Sarajevo (II nagrada)
5. *Čejović Miloš*, OŠ „Četvrti kraljev. bataljon“ Kraljevo (II nagrada)
6. *Dostanić Milutin*, OŠ „Ratko Mitrović“, Čačak (II nagrada)
7. *Jenčič Igor*, OŠ „Prežihov Voranc“, Ljubljana (II nagrada)
8. *Pleško Janez*, OŠ „Majda Vrhovnik“, Ljubljana (II nagrada)
9. *Lavtižer Janez*, OŠ „Prežihov Voranc“, Ljubljana (III nagrada)
10. *Agošton Ištvan*, OŠ „Petefi Šandor“, Novi Sad (III nagrada)
11. *Ljubić Nina*, OŠ „Avgust Šenoa“, Zagreb (pohvala)
12. *Ilić Dragan*, OŠ „Ratko Mitrović“, Čačak (pohvala)
13. *Šakotić Snježana*, OŠ „Avgust Šeno“, Zagreb (pohvala)
14. *Jakopović Željko*, OŠ „Božidar Adžija“, Zagreb (pohvala)
15. *Lelić Izubin*, OŠ „J. Jakubović“, Tuzla (pohvala)
16. *Lazić Aleksandar*, OŠ „Nada Purić“, Valjevo (pohvala)

ZADACI NA IV SAVEZNOM TAKMIČENJU

VII razred

1. Odredi najmanji prirodan broj kojim treba pomnožiti broj 8316 da se dobije broj koji je kvadrat jednog prirodnog broja. Kojeg broja?

2. Posle sniženja cena za 20%, za iznos od 240 dinara može se kupiti 1 metar platna više nego što se pre sniženja moglo kupiti za 270 dinara. Kolika je bila cena tog platna pre sniženja?

3. Iz gradova A i B, čija je udaljenost 250 km, istovremeno su jedan drugom u susret krenula dva motociklista. Brzina jednog od njih je za 10 km/h veća od brzine drugog. Posle dva sata putovanja ostalo im je još 30 km do susreta. Kolika je brzina svakog motocikliste?

4. U jednakokrakom trapezu srednja linija (srednjica) je s, a dijagonala je dva puta duža od srednje linije (srednjice). Kolika je površina tog trapeza?

5. Zadana je kružnica s centrom O i prečnikom (dijametrom) $AB = 4$ cm.

a) Konstruiši tri tangente te kružnice, od kojih dve u tačkama A i B, a treću tako da joj deo (odsečak) CD između prave dve tangente bude dugačak 5 cm.

b) Koliki je ugao (kut) $\sphericalangle COD$?

c) Izračunaj površinu ograničenu konstruisanim tangentama i datom kružnicom.

VIII razreo

1. Uzeta su dva proizvoljna prirodna broja, pa su sastavljeni njihova suma, razlika i proizvod (produkt). Dokazati da je bar jedan od ova tri nova broja deljiva sa 3.

2. Posle sniženja cena za 20% za iznos 240 dinara može se kupiti 1 m platna više nego što se pre sniženja moglo kupiti za 270 dinara. Kolika je bila cena tog platna pre sniženja?

3. U ravni (ravnini) pravouglog (pravokutnog) koordinatnog sistema XOY konstruiši pravougaonik (pravokutnik) $ABCD$, ako su poznate koordinate triju njegovih temena (vrhova): $A(-3, -1)$, $C(5, -1)$, $C(5, 3)$.

Odredi: a) koordinate četvrtog vrha D tog pravougaonika;

b) koordinate presečene tačke duži AC i BD;

c) jednačine pravih (pravaca) kojima pripadaju stranice dijagonale tog pravokutnika.

4. Osnovice AB i CD trapeza $ABCD$ produžene su na obe strane. Simetrale spoljašnjih uglova (vanjskih kutova) trapeza kod temena A i D seku se u tački M, a simetrale spoljašnjih uglova B i C seku se u tački N. Naći obim (opseg) trapeza $ABCD$, ako je $MN = 2k$.

5. Vrh prave kupe (uspravnog stošca) je u centru jedne baze (osnove) valjka. Druga baza valjka i baza kupe (stošca) leže u istoj ravni (ravnini) i imaju isti centar. Volumeni (zapremine) ove kupe i valjka su jednake. Poluprečnik (radijus) baze valjka je r, a visina valjka h.

a) Koliki je poluprečnik baze kupe (izražen pomoću r)?

b) Koliki je volumen onog dela valjka koji je u kupi (izražen pomoću r i h)?

Rezultati, uputstva, rešenja

VII razred

1. Kako je $8316 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11$, najmanji prirodan broj sa kojim ga treba pomnožiti da se dobije kvadrat prirodnog broja je $3 \cdot 7 \cdot 11$. Tako će se dobiti: $8316 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 7^2 \cdot 11^2 = (2 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 11)^2 = 1386^2$.

2. Neka je x broj metara koji su bili kupljeni po ceni od y dinara po metru za 270 dinara. Tada, prema onom što nam je dato, imamo:

$$xy = 270, \quad (x+1)\frac{80y}{100} = 240; \quad \text{sledi:} \quad x = 9, \quad y = 30.$$

3. Neka je brzina prvog motocikliste v km/h. Tada se drugi od njih kreće brzinom $(v-10)$ km/h. Usled toga imamo:

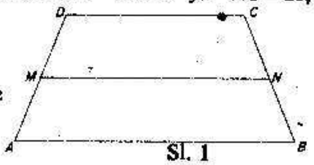
$$2v + 2(v-10) = 250, \quad v = 60 \text{ km/h}.$$

4. Neka je $ABCD$ (v. sl. 1) dati trapez i neka su M i N krajnje tačke njegove srednje linije. Visina trapeza je $CD = \sqrt{AC^2 - AD^2}$. Kako je $AC = 2s$,

$$AD = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} = s,$$

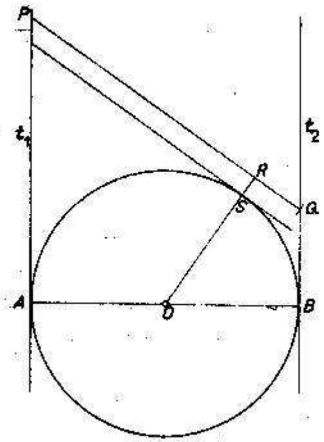
to je visina trapeza $CD = \sqrt{4s^2 - s^2} = s\sqrt{3}$. Sleduje

$$P = \frac{s^2\sqrt{3}}{2}.$$



Sl. 1

5. Neka su t_1 i t_2 tangente, konstruisane u tačkama A i B date kružnice (v. sl. 2). Oko proizvoljne tačke P tangente t_1 treba opisati krug sa poluprečnikom $r_1 = 5$, pa njegovu presečenu tačku Q sa tangentom t_2 treba spojiti sa tačkom P. Iz tačke Q treba spustiti normalu OR na PQ i u njenoj presečenoj tački S sa datom kružnicom treba konstruisati normalu CD na OS. Ta će normala biti tražena tangenta date kružnice.



Sl. 2

b) $\sphericalangle COD = \sphericalangle COS + \sphericalangle SOD = \frac{1}{2}(\sphericalangle AOS + \sphericalangle TOB)$.

c) Tražena površina je $P = P_1 - P_2$ gde je P_1 površina trapeza $ABCD$, a P_2 površina polovine kruga.

$$P_1 = \frac{AD+BC}{2} \cdot AB = \frac{DS+SC}{2} \cdot AB = \frac{CD \cdot AB}{2} = 10,$$

$$P_2 = \frac{4\pi}{2} = 2, \quad P = 10 - 2\pi.$$

VIII razred

1. Svaki prirodan broj može se izračunati u jednom od sledećih oblika: $3k$, $3k+1$, $3k+2$ $(k = 1, 2, 3 \ldots)$.

Ako se predpostavi da je makar jedan od brojeva a i b oblika $3k$, njihov proizvod je svakako deljiv sa 3; ako su i a i b oblika $3k+1$, ili obilka $3k+2$, njihova razlika je deljiva sa 3; a ako je jedan od njih oblika $3k+1$, a drugi oblika $3k+2$, njihov je zbir deljiv sa 3.

2. V. rešenje zad. br. 2 za VII razred.

3. a) Koordinate četvrtog temena su $(-3, 4)$.

b) Koordinate presečne tačke dnži AC i BD su:

$$x_s = \frac{-3+5}{2} = 1, \quad y_s = \frac{-1+3}{2} = 1.$$

c) Jednačine pravih kojima pripadaju stranice pravougaonika su $x = -3$, $x = 5$; $y = -1$, $y = 3$.

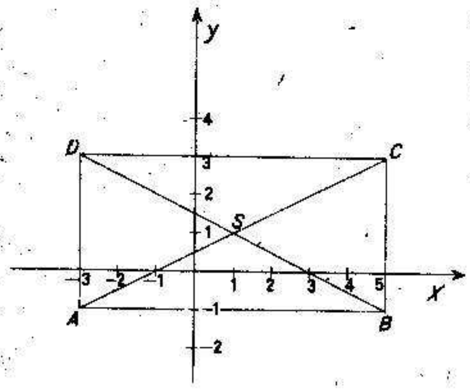
Jednačine pravih kojima pripadaju dijagonale pravougaonika su:

$$y+1 = \frac{3+1}{5+3}(x+3), \quad y+1 = \frac{3+1}{-3-5}(x-5),$$

$$x - 2y + 1 = 0, \quad x + 2y - 3 = 0.$$

1973. - savezno natjecanje - 7. i 8. razred
Matematički list za učenike osnovne škole
http://www.dms.org.rs/index.php?action=matematicki_list
http://public.carnet.hr/mat-natj

4. Pošto se tačka M nalazi istovremeno i na simetrali spoljašnjeg ugla kod A (v. sl. 3), i na simetrali spoljašnjeg ugla kod D, tačka M je podjednako udaljena od prave AB i prave CD. Na sličan način se dokazuje da je i tačka N podjednako udaljena od pravih AB i CD. Usled toga MN leži na srednjoj liniji datog trapeza.

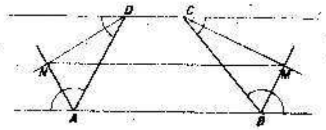


Sl. 3

Pošto su uglovi kod A i kod M u trouglu APM međusobno jednaki, imamo: $AP = MP$. Analogno je $DP = MP$, $BQ = NQ$, $CQ = NQ$. Usled toga je:

$$MN = MP + PQ + QN = \frac{AD}{2} + \frac{AB + CD}{2} + \frac{BC}{2} = \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DA) = 2k,$$

$$O = 4k.$$



Sl. 4

5. Neka je poluprečnik osnove kupe R. Kako je $V_k = V_v$, to je

$$\frac{R^2 h}{3} = r^2 k, \quad R = r\sqrt{3}.$$

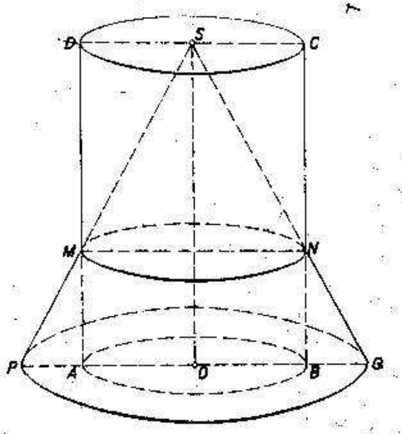
Iz sličnosti trouglova $\triangle BQN$ i $\triangle OQS$ sleduje:

$$\frac{BN}{OS} = \frac{R - r}{R}, \quad BN = OS\,\frac{r\sqrt{3} - r}{r\sqrt{3}},$$

$$h_1 = h \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}}, \quad h_1 = h\,\frac{3 - \sqrt{3}}{3}.$$

Stoga je zapremina onog dela valjka koji se nalazi u kupi:

$$V = \pi r^2 h\,\frac{3 - \sqrt{3}}{3} = 0{,}42\,r^2 h.$$



Sl. 5

1973. - savezno natjecanje - 7. i 8. razred
Matematički list za učenike osnovne škole
http://www.dms.org.rs/index.php?action=matematicki_list
http://public.carnet.hr/mat-natj