IV. SAVEZNO NATJECANJE ZA UČENIKE OSNOVNIH ŠKOLA
SFRJ
17. 6. 1973.

VII RAZRED

1. Odredi najmanji prirodni broj kojim treba pomnožiti broj 8316 da se dobije broj koji je kvadrat jednog prirodnog broja. Kojeg broja?

2. Poslije sniženja cijene za 20%, za iznos od 240 kn može se kupiti 1 metar platna više nego što se prije sniženja moglo kupiti za 270 kn. Kolika je bila cijena tog platna prije sniženja?

3. Iz gradova A i B, čija je udaljenost 250 km, istovremeno su jedan drugom u susret krenula dva motociklista. Brzina jednog od njih je za 10 km/h veća od brzine drugog. Poslije dva sata putovanja, ostalo im je još 30 km do susreta. Kolika je brzina svakog motocikliste?

4. U jednakokračnom trapezu srednjica je s, a dijagonala je dva puta duža od srednjice. Kolika je površina tog trapeza?

5. Zadana je kružnica s središtem O i promjerom(dijametrom) $|AB| = 4cm$.
   a) Konstruiraj tri tangente te kružnice, od kojih dvije u točkama A i B, a treću tako da joj odsječak $|CD|$ između prve dvije tangente bude dugačak 5 cm.
   b) Koliki je kut COD?
   c) Izračunaj površinu omeđenu konstruiranim tangentama i danom kružnicom.

IV. SAVEZNO NATJECANJE ZA UČENIKE OSNOVNIH ŠKOLA
SFRJ
17. 6. 1973.

VIII RAZRED

1. Uzeta su dva proizvoljna prirodna broja, pa su sastavljeni njihov zbroj, razlika i umnožak. Dokazati da je bar jedan od ova tri nova broja djeljiv sa 3.

2. Poslije sniženja cijene za 20%, za iznos od 240 kn može se kupiti 1 metar platna više nego što se prije sniženja moglo kupiti za 270 kn. Kolika je bila cijena tog platna prije sniženja?

3. U ravnini pravokutnog koordinatnog sistema XOY konstruiraj pravokutnik ABCD ako su poznate koordinate triju njegovih vrhova: A(–3, –1), B(5, –1), C(5,3). Odredi:
   a) koordinate četvrtog vrha D tog pravokutnika
   b) koordinate točke presjeka dužina $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$,
   c) jednadžbe pravaca kojima pripadaju stranice i dijagonale tog pravokutnika.

4. Osnovice $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ trapeza ABCD produžene su na obje strane. Simetrale vanjskih kutova trapeza kod vrhova A i D sijeku se u točki M, a simetrale vanjskih kutova B i C sijeku se u točki N. Naći opseg trapeza ABCD ako je $|MN| = 2k$.

5. Vrh uspravnog stošca je u središtu jedne osnovice (baze) valjka. Druga osnovica valjka i osnovica stošca leže u istoj ravnini i imaju isto središte. Volumeni ovih stošca i valjka su jednaki. Radijus osnovice valjka je r, a visina valjka je h.
   a) Koliki je radijus osnovice stošca (izražen pomoću r)?
   b) Koliki je volumen onog dijela valjka koji je u stošcu (izražen pomoću r i h)?

Rješenja zadataka

IV. SAVEZNO NATJECANJE ZA UČENIKE OSNOVNIH ŠKOLA
SFRJ
17. 6. 1973.
VII RAZRED

1. Dani broj rastavimo na proste faktore: $8316 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11$. Da bi neki prirodni broj bio kvadrat drugog prirodnog broja moraju se njegovi faktori javljati paran broj puta (tj. u parnim potencijama). Prema tome, broj 8316 treba pomnožiti sa $3 \cdot 7 \cdot 11 = 231$. Time će se dobiti broj $2^2 \cdot 3^4 \cdot 7^2 \cdot 11^2 = 1920996$, koji je kvadrat broja $2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11 = 1386$.

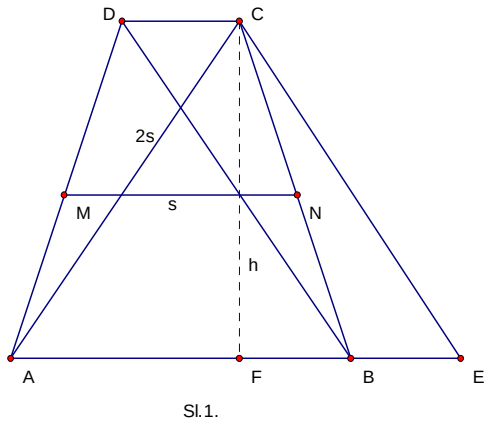
2. *Prvi način (aritmetički – zaključivanjem):* Prije sniženja za platno bi se platilo 270 kn. Poslije sniženja za 20% ovaj iznos postaje manji za 54 kn, tj. platilo bi se 216 kn. Pošto smo platili 240 kn, tj. 24 kn više nego što bi trebalo, to smo za to dobili 1 m platna više. To znači da 1 m platna poslije sniženja košta 24 kn. To je 80% prvobitne cijene, pa izlazi da je prije sniženja cijena platna bila 30 kn.

   Drugi način : Neka je prije sniženja cijena 1 m platna bila x kn. Tada se za 270 kn moglo kupiti $\frac{270}{x}$ metara platna. Poslije sniženja cijena 1 m platna iznosi 80% prvobitne cijene, tj. iznosi 0,80x kn, pa se za 240 kn po toj cijeni može kupiti $\frac{240}{0{,}8x}$ metara platna. Međutim znamo da je $\frac{240}{0{,}8x}$ veće od $\frac{270}{x}$ za 1, te imamo $\frac{240}{0{,}8x} - \frac{270}{x} = 1$, ili, kad prvi razlomak pojednostavimo, $\frac{300}{x} - \frac{270}{x} = 1$, odakle je $\frac{30}{x} = 1$, što znači da je x =30. Prema tome, prije sniženja cijena 1 m platna bila je 30 kn, te se za 270 kn moglo kupiti 9m platna.

   Treći način: Neka smo prije sniženja mogli kupiti y m platna za iznos od 270 kn; u tom slučaju cijena bi bila $\frac{270}{y}$ kn. Poslije sniženja može se kupiti (y +1)m platna za iznos od 240 kn, što znači da je u tom slučaju cijena $\frac{240}{y+1}$ kn. Pošto je sniženje iznosilo 20%, to cijena poslije sniženja iznosi 80% (ili $\frac{4}{5}$) cijene prije sniženja, te imamo:
   $\frac{240}{y+1} = \frac{4}{5} \cdot \frac{270}{y}$, odakle je y =9. Prema tome, prije sniženja mogli smo za 270 kn kupiti 9m platna, što znači da je tada cijena platna bila 30kn.

3. Ako jedan motociklist prelazi x km na sat, onda drugi prelazi (x + 10) km na sat. Za 2 sata putovanja ukupno su obojica prešla 2(x + x + 10= km, što iznosi 220 km. Znači: $2(2x+10) = 220$. Odatle je x = 50. Prema tome, jedan motociklist kretao se brzinom 50 km/h, a drugi brzinom 60 km/h.

4. *Prvi način:* Neka je ABCD (sl.1.) dani jednakokračni trapez u kome je $|MN| = s$ -srednjica i $|AC| = |BD| = 2|MN| = 2s$.



Sl.1.

Povucimo $\overline{CE} \parallel \overline{BD}$. Tada: $|CE| = |BD| = 2s$,

$|AE| = |AB| + |BE| = |AB| + |DC| = 2 \cdot |MN| = 2s$.

Znači, $|AE| = |CE| = |AC|$, tj. ΔAEC je jednakostraničan.

$P_{ABCD} = |MN| \cdot |CP| = |MN| \cdot \frac{1}{2}|AE|\sqrt{3} =$

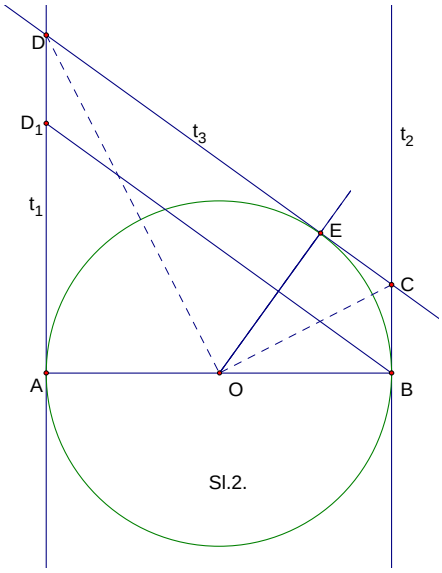
$= |MN| \cdot |MN|\sqrt{3} = |MN|^2 \sqrt{3} = s^2\sqrt{3}$.

Drugi način: Neka je ABCD dani trapez (Sl.1.). Pošto je

$|AC| = 2s$ i $|AF| = |AB| - |BF| = |AB| - \frac{|AB| - |DC|}{2} = \frac{|AB| + |DC|}{2} = s$, to je

$|CF|^2 = |AC|^2 - |AF|^2 = 4s^2 - s^2 = 3s^2$, odakle $|CF| = h = s\sqrt{3}$ (visina trapeza), pa će površina trapeza biti $P = sh = s^2\sqrt{3}$.

5. Neka je dana kružnica k s promjerom $|AB| = 4cm$ (*Sl.*2.).



Sl.2.

a) Konstruirajmo tangente t_1 i t_2 dane kružnice u točkama A i B. Iz točke B opišimo kružni luk, polumjerom (radijusom) 5cm. Neka je D_1 jedna od točaka u kojoj taj luk siječe tangentu t_1. Spojimo točke B i D_1, a zatim konstruirajmo okomicu kroz točku O na dužinu $\overline{BD_1}$. Neka je E jedna od točaka presjeka ove okomice i dane kružnice. Kroz točku E konstruirat ćemo tangentu t_3 dane kružnice (tako da kroz E povučemo pravac paralelan sa $\overline{BD}$ ili pravac okomit na $\overline{CE}$). Odsječak $\overline{CD}$ zaista je dugačak 5 cm, jer je $BCDD_1$ paralelogram; $|CD| = |BD_1| = 5cm$.

b) Ako točke C i D spojimo sa O, imat ćemo: $\angle DOE = \angle DOA$ (zbog sukladnosti trokuta DEO i DOA) i $\angle COE = \angle COB$ (jer $\Delta COE \cong \Delta COB$), pa je

$$\angle COD = \angle COE + \angle DOE = \frac{\angle BOE}{2} + \frac{\angle AOE}{2} = \frac{\angle BOE + \angle AOE}{2} = \frac{180°}{2} = 90°.$$

c) Tražena površina jednaka je razlici između površine trapeza BCDA i površine polovice kruga tj.

$$P = \frac{1}{2}\left(|BC| + |AD|\right) \cdot |AB| - \frac{1}{2}\left(\frac{|AB|}{2}\right)^2 \pi = \frac{1}{2}\left(|CE| + |DE|\right) \cdot |AB| - \frac{1}{2}\left(\frac{|AB|}{2}\right)^2 \pi =$$

$$= \frac{1}{2}|CD| \cdot |AB| - \frac{1}{2}\left(\frac{|AB|}{2}\right)^2 \pi = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \pi = (10 - 2\pi)(cm^2).$$

Prema tome, tražena površina je $P = (10 - 2\pi)\ cm^2 \approx 3{,}72\ cm^2$.

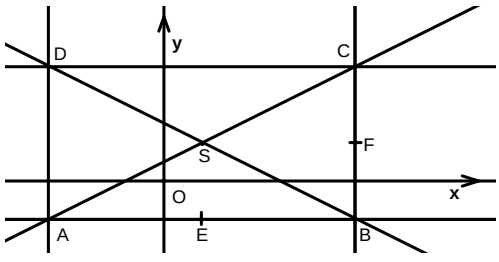
Rješenja zadataka

IV. SAVEZNO NATJECANJE ZA UČENIKE OSNOVNIH ŠKOLA
SFRJ
17. 6. 1973.
VIII RAZRED

1. Pri dijeljenju prirodnog broja sa 3 može nastupiti samo jedna od sljedeće tri mogućnosti: ili je broj djeljiv sa 3 (tj. ima oblik 3k, k-prirodan broj), ili pri dijeljenju sa 3 daje ostatak 1 (tj. ima oblik 3k+1), ili daje ostatak 2 (tj. ima oblik 3k+2).
   1) Ako su u našem slučaju oba dana broja djeljiva sa 3, onda će i sva tri nova broja (zbroj, razlika i umnožak danih brojeva) biti djeljiva sa 3. Zaista: ako je a = 3k i b = 3n, onda je
      a + b = 3k + 3n = 3(k + n); a – b = 3k – 3n = 3(k – n);
      ab = 3k·3n = 9kn.
   2) Ako je jedan od danih brojeva djeljiv sa 3, tj. ima oblik 3k, onda će njihov umnožak sigurno biti djeljiv sa 3. Zaista, ab = 3k·b = 3kb.
   3) Ako nijedan od danih brojeva nije djeljiv sa 3, onda oni mogu biti samo oblika 3k + 1 ili 3k + 2.
      Ako oba broja imaju oblik 3k + 1, ili oblik 3k + 2, onda je njihova razlika djeljiva sa 3; zaista, a – b = (3k + 1) – (3n + 1) = 3(k – n); slično je kad brojevi imaju oblik 3k + 2.
      Ako jedan od brojeva ima oblik 3k + 1, a drugi oblik 3k + 2, onda će njihov zbroj biti djeljiv sa 3; zaista, a + b = 83k + 1) + (3n + 2) = 3(k + n + 1).

2. Vidi rješenje 2. zadatka za VII razred. (gore)

3. a) Koordinate četvrtog vrha D(–3, 3).
   b) Točka presjeka dijagonala je točka S (1,1). Ove koordinate dobijemo tako da odredimo apscisu točke E koja je jednako udaljena od A i B i ordinatu točke F koja je jednako udaljena od B i C.
   c) Jednadžbe pravca kojima pripadaju stranice $\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{BC}$ i $\overline{AD}$ pravokutnika su redom: y = –1, y = 3, x = 5 i x = –3.
      Odredimo jednadžbe pravaca kojima pripadaju dijagonale $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$. Za pravac AC znamo dvije njegove točke: A(–3, –1) i C(5, 3). Treba naći linearnu zavisnost oblika Y = kx + b u kojoj će za x = –3 biti
      y = –1, a za x = 5 biti y = 3. Imat ćemo: –1 = –3k + b i 3 = 5k + b. Rješavanjem ovog sustava jednadžbi dobivamo : $k = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$.
      Prema tome, jednadžba pravca AC glasi $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ ili x – 2y + 1 = 0. Na isti način za pravac BD dobivamo jednadžbu $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ ili x + 2y –3 = 0.

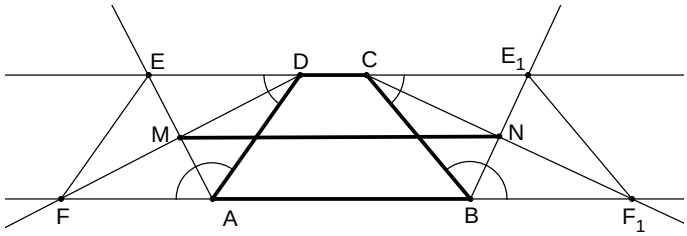


Sl. 3.

4. Točka M , kao točka u kojoj se sijeku simetrale vanjskih kutova trapeza kod vrhova A i D (Sl. 4.), jednako je udaljena od pravaca AB i CD; uz to, trokut ADM je pravokutni (jer su AM i DM simetrale suplementarnih kutova). Isto važi i za točku N i trokut BCN. Prema tome, odsječak $\overline{EF}$ je srednjica trapeza ABCD. Dužina $\overline{MN}$ sastavljena je od srednjice trapeza i težišnica koje odgovaraju hipotenuzi u pravokutnim trokutima ADM i BCN. Težišnica koja odgovara hipotenuzi pravokutnog trokuta jednaka je polovini hipotenuze, pa je $|AD| = 2|ME|$ I $|BC| = 2|FN|$. Opseg trapeza ABCD je tada:

$$O = |AB| + |BC| + |CD| + |DA| = (|AB| + |DC|) + (|DA| + |BC|) =$$
$$= 2|EF| + (2|ME| + 2|FN|) = 2(|EF| + |ME| + |FN|) = 2 \cdot |MN| = 2 \cdot 2k = 4k.$$

Napomena: Moguće je postupiti i ovako: Simetrale vanjskih kutova kod A i D sijeku pravce AB i CD, određujući romb koji ima krak $\overline{AD}$ za svoju stranicu; stoga je točka M, kao presjek dijagonala romba, jednako udaljena od pravaca AB i DC (ova udaljenost jednaka je polovini visine trapeza). Sve ovo vrijedi i za točku N. Trokuti ADM i CBN su pravokutni. Itd. (kao gore).



Sl. 4.

5. a) Neka je R polumjer osnovice stošca. Pošto valjak i stožac imaju jednake visine i jednake volumene (V_s=V_v), to je: $\frac{1}{3}\pi R^2 h = \pi r^2 h$, odakle $R = r\sqrt{3}$.

b) Dio valjka koji je u stošcu je tijelo sastavljeno od valjka visine h_1 i stošca visine $h_2 = h - h_1$ i istog polumjera osnovice kao i kod valjka (r), pa je volumen tog dijela valjka:

$$V = V_1 + V_2 = \pi r^2 h_1 + \frac{1}{3}\pi r^2 h_2 .$$

Visinu h_1 izračunavamo na osnovu sličnosti trokuta PAM i POS:

$|PA| : |PO| = |AM| : |OS|$, tj. $(R - r) : R = h_1 : h$,odakle

$$h_1 = h \cdot \frac{R - r}{R} \quad \Rightarrow \quad h_1 = h\left(1 - \frac{r}{R}\right) = h\left(1 - \frac{r}{r\sqrt{3}}\right) = h\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = h\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right);$$

tada $h_2 = h - h_1 = \frac{h\sqrt{3}}{3}$.

Traženi volumen je: $V = \pi r^2 h\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{1}{3}\pi r^2 h\left(1 - \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$ ili $V \approx 1{,}932\ r^2 h$.