Zahvaljujem Društvu matematičara Srbije (http://www.dms.org.rs/) i njegovom predsjedniku dr. Zoranu Kadelburgu na dopuštenju da iz časopisa "Matematički list za učenike osnovne škole" skeniram stranice koje sadrže zadatke i rješenja s republičkih natjecanja (SR Hrvatke) i saveznih natjecanja (SFRJ) i skenove objavim na web stranici http://public.carnet.hr/mat-natj .

Antonija Horvatek
http://public.carnet.hr/~ahorvate/

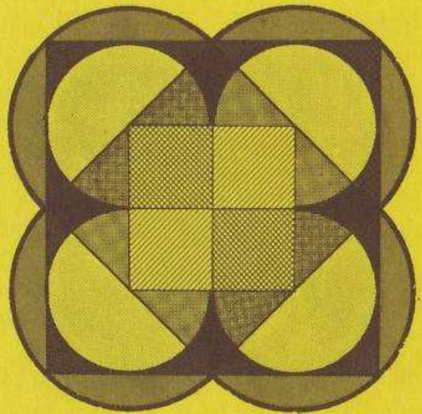
19

MATEMATIČKI LIST

ZA UČENIKE OSNOVNE ŠKOLE

X

1



BEOGRAD
1975.

SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATIČARA, FIZIČARA I ASTRONOMA
JUGOSLAVIJE

MATEMATIČKI LIST

za učenike osnovne škole

God. X, broj 1 (1975/76)

Izlazi šest puta godišnie

**IZDAJE DRUŠTVO MATEMATIČARA, FIZIČARA I ASTRONOMA
SR SRBIJE**
Beograd, Knez Mihajlova 35/IV, p. p. 728.

Oslobođeno plaćanja poreza na promet na osnovu rešenja Republičkog sekretarijata
za kulturu SR Srbije br. 413-186-03 od 11. 1. 1973. godine

1975. - savezno natjecanje - 7. i 8. razred
Matematički list za učenike osnovne škole
http://www.dms.org.rs/index.php?action=matematicki_list
http://public.carnet.hr/mat-natj

ZADACI SA VI SAVEZNOG TAKMIČENJA

VII RAZRED

1. Zbir (zbroj) šest uzastopnih prirodnih brojeva, od kojih ni jedan nije deljiv sa 7, deljiv je sa 21, a nije deljiv sa 42. Dokazati.

Odrediti šest takvih brojeva, tako da njihov zbir bude četvorocifren (četvoroznamenkast) broj i da predstavlja kvadrat nekog prirodnog broja.

2. Odrediti onaj dvocifreni (dvoznamenkast) broj koji je jednak zbiru kuba vrednosti cifre (znamenke) desetice i kvadrata vrednosti cifre jedinice tog dvocifrenog broja.

3. Pet duži (dužina) konstruisane su iz zajedničke tačke A. Zatim je iz nekih od slobodnih krajeva ovih duži (ne iz tačke A) konstruisano pet novih duži i tako je ponovljeno više puta. Na kraju je neko izbrojao slobodne krajeve i našao da ih ima 700. Utvrditi i obrazložiti da li je u brojanju načinjena greška.

4. Dat je romb $ABCD$ sa uglom (kutom) $\sphericalangle BAD = 60°$. Simetrale uglova između dijagonala seku stranice romba u tačkama M, N, P i Q.

a) Kojoj klasi četvorouglova (četverokutova) pripada četvorougao $MNPQ$? Zaključak obrazložiti (dokazati).

b) Ako tačka M pripada stranici AB, izračunati razmeru $AM:MB$.

c) Naći razmeru onih odsečaka veće i manje dijagonale romba, koji leže van četvorougla $MNPQ$.

5. Duž $AC = a$ svojom unutrašnjom tačkom B podeljena je u odnosu 3:2. Nad dužima AB i BC, sa raznih strana u odnosu na duž AC, konstruisani su kvadrati $ABDE$ i $CBFG$. Neka su O i O_1 preseci dijagonala ovih kvadrata. U kojoj razmeri stoje površina četvorougla OO_1CD i površina kvadrata kome je stranica duž AC?

VIII RAZRED

1. Elementi tročlanog skupa $A = \{a, b, c\}$ su ma koji stepeni nekih (ma kojih) prostih dvocifrenih brojeva manjih od 20. Dokazati da među elementima skupa A postoje dva broja, takva da je zbir (zbroj) ili razlika (diferencija) ta dva broja deljiva sa 5.

2. Odrediti brojeve x, y i z za koje je

$$4x^2 + 9y^2 + 16z^2 - 4x - 6y - 8z + 3 = 0.$$

3. Pri izradi jednog metalnog klina otpaci čine 12,5% od upotrebljenog materijala. Na taj način, od jednog komada metala načinjeno je tačno 100 000 komada takvih klinova. Svi dobijeni otpaci su ponovo izliveni u jedan komad i od njega su na isti način izrađeni potpuno isti takvi klinovi. Ovaj postupak se ponavlja sve dotle dok je moguće od otpadaka izraditi bar jedan klin.

Koliko je ukupno dobijeno klinova (računajući i prvih 100 000 klinova)?

4. Posmatrač vidi stijenu (duž — dužinu) AB iz dvije tačke C i D, među kojima je rastojanje 300 m, pod uglovima od 30°. Pravci (prave) AD i BC okomiti (normalni) su međusobno.

Izračunati duljinu (dužinu) stijene AB.

5. Osnovne ivice (bridovi) kvadra (pravouglog paralelepipeda) odnose se kao 4:3, dijagonale bočnih strana odnose se međusobno kao $\sqrt{20} : \sqrt{13}$, a površina dijagonalnog preseka odnosi se prema zapremini (volumenu) kvadra kao 2:1.

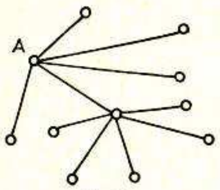
Izračunati površinu (oplošje) i zapreminu (volumen) ovog kvadra.

Rešenja zadataka

VII RAZRED

1. Traženi brojevi su: $7n+1$, $7n+2$, $7n+3$, $7n+4$, $7n+5$ i $7n+6$. Njihov zbir (zbroj) $S = 42n + 21 = 21(2n+1)$ očigledno je deljiv sa 21, a pri deljenju sa 42 daje ostatak 21, tj. nije deljiv sa 42. Da bi zbir bio kvadrat prirodnog broja, mora biti $2n+1 = 21k^2$, gde je k neparan broj. Da bi ovaj zbir bio četvorocifren (četvoroznamenkast) broj, mora biti k^2 veće od 2 i manje od 23. To je moguće jedino ako je $k^2=9$. Sada dobijamo: $2n+1=21k^2=189$, pa je $n=94$. Traženi brojevi su: 659, 660, 661, 662, 663 i 664.

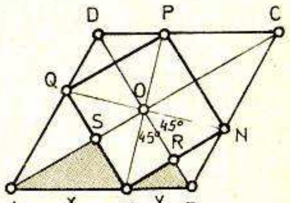
2. Neka je traženi broj $\overline{ab}$ $(a\neq 0)$. Tada je $10a+b=a^3+b^2$, odakle dobijamo: $10a-a^3=b^2-b$, odnosno: $a(10-a^2)=b(b-1)$. Očigledno je $a\in\{1,2,3\}$. Za $a=1$ dobijamo: $9=b(b-1)$ i za $a=3$ dobijamo: $3=b(b-1)$. Kako je $b(b-1)$ proizvod dva uzastopna prirodna broja, a 9 i 3 to ne mogu biti, zaključujemo da je $a\neq 1$ i $a\neq 3$. Za $a=2$ dobijamo: $12=b(b-1)$, što je moguće jedino za $b=4$. Traženi broj je **24**.



Sl. 1

3. Neka je iz bilo kojeg slobodnog kraja konstruisano novih 5 duži (dužina) (sl. 1). Tada umesto jednog slobodnog kraja dobijamo 5 novih slobodnih krajeva, pa se broj slobodnih krajeva povećao za 4. Svakim novim konstruisanjem duži iz nekoliko slobodnih krajeva (nije bitno koliko), broj slobodnih krajeva povećava se za $4k$ (k je prirodan broj). Dakle, ukupan broj slobodnih krajeva iznosiće $4n+5$, a to ne može biti 700 ni za jedan prirodan broj n. Prema tome, u brojanju je načinjena greška.

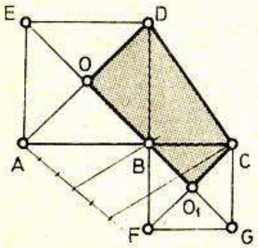
4. a) Iz podudarnosti (sukladnosti, kongruentnosti), trouglova (trokuta) OBM i OBN sleduje da je $OM=ON$, a iz podudarnosti trouglova OAM i OAQ sleduje da je $OM=OQ$ (sl. 2). Na isti način je i $OQ=OP$. Na osnovu toga zaključujemo da je $MP=NQ$ i pošto je ugao (kut) MON prav $(2\cdot 45^\circ)$, sleduje da je četvorougao (četverokut) $MNPQ$ kvadrat (ima jednake dijagonale, koje se polove pod pravim uglom).



Sl. 2

b) Trougao (trokut) AMQ je jednakostraničan. Označimo stranicu AM tog trougla (a ujedno i stranicu kvadrata) sa x. Tada trougao BRM, koji predstavlja polovinu jednakostraničnog trougla, ima visinu $MR=x/2$. Otuda je: $MR=MB\sqrt{3}/2$, pa ako stavimo $MB=y$, dobićemo: $x/2=y\sqrt{3}/2$, te je $x=y\sqrt{3}$. Prema tome je: $AM:MB=x:y=y\sqrt{3}:y=\sqrt{3}:1$.

c) Iz trougla AMQ je: $AS=x\sqrt{3}/2=y\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}/2=3y/2$, a iz trougla BRM je $BR=y/2$. Dobijamo razmeru $AS:BR=3y/2:y/2=3:1$.



Sl. 3

5. Četvorougao OO_1CD sastavljen je od tri pravougla (pravokutna) trougla, od kojih su OBD i O_1BC četvrtine odgovarajućih kvadrata (sl. 3). Tražena površina je $P=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{5}a\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}a\right)^2+\frac{13a}{25}\cdot\frac{2a}{5}=\frac{9a^2}{100}+\frac{4a^2}{100}+\frac{6a^2}{50}=\frac{1}{4}a^2$, a to je četvrtina površine kvadra stranice $AC=a$. Tražena razmera je **1:4**.

VIII RAZRED

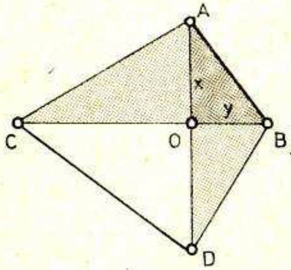
1. Elementi skupa A su neki stepeni prostih brojeva 11, 13, 17 i 19. Svi stepeni ovih brojeva završavaju se jednom od cifara (znamenki): 1, 3, 7 ili 9. Pošto se skup A sastoji od tri broja, onda se među ovim brojevima nalaze bar dva broja sa istom krajnjom cifrom, ili su sva tri broja sa različitim krajnjim ciframa. U prvom slučaju razlika (diferencija), a u drugom zbir (zbroj) dva odgovarajuća broja $(3+7$ ili $1+9)$ završava se nulom, a to je deljivo sa 5.

2. Datu jednakost možemo dovesti na sledeći oblik: $4x^2-4x+1+9y^2-6y+1+16z^2-8z+1=0$, odnosno: $(2x-1)^2+(3y-1)^2+(4z-1)^2=0$. Pošto su kvadrati uvek pozitivni brojevi, zaključujemo da je ovaj zbir jednak nuli samo ako su svi sabirci nule. Tako dobijamo: $2x-1=0$, $3y-1=0$ i $4z-1=0$, odakle je: $x=1/2$, $y=1/3$ i $z=1/4$

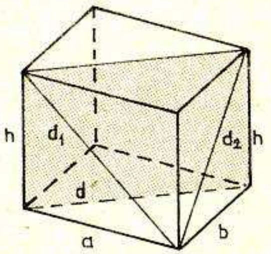
3. *I Rešenje:* Otpaci iznose $12{,}5/100=1/8$ upotrebljenog materijala. Prema tome, od otpadaka dobijenih izradom 100 000 klinova može se izraditi $100\,000:8=12\,500$ novih klinova, sa 1/8 otpadaka. Od novih otpadaka dobijamo $12\,500:8=1562$ klina, sa ostatkom koji iznosi 4/8 jednog klina. Sada imamo 1566/8 ostatka $(1562+4)$, pa daljom izradom dobijamo 195 klinova sa ostatkom 6/8. Dalje računamo: $201:8=25$ (ostatak je 1); $26:8=3$ (ostatak je 2). Sada je ostalo nedovoljno materijala da bi se mogla nastaviti proizvodnja. Izrađeno je ukupno: $100\,000+12\,500+1562+195+25+3=114\,285$ klinova (sa ostatkom 5/8 materijala potrebnog za izradu jednog klina).

II rešenje. Od otpadaka dobijenih izradom prvih 100 000 klinova (1/8 ukupno potrebnog materijala) izrađuju se novi klinovi sve dotle dok je moguće od otpadaka izraditi bar jedan nov klin. Stoga se može smatrati da 100 000 klinova predstavljaju 7/8 od ukupnog broja klinova (sa korekturom za neiskorišćeni ostatak materijala). Prema tome, ukupan broj klinova je: $100\,000\cdot 8/7=800\,000:7=114\,285$ (sa ostatkom 5/7 klina, što predstavlja 5/8 materijala potrebnog za izradu jednog klina).

4. Neka je O presečna tačka pravih AD i BC (sl. 4). Pravougli trouglovi ACO i BOD predstavljaju polovine odgovarajućih jednakostraničnih trouglova (imaju unutrašnje uglove od 30°, 60° i 90°). Ako uvedemo oznake $OA=x$ i $OB=y$, dobićemo: $OC=x\sqrt{3}$ i $OD=y\sqrt{3}$. Iz pravouglog trougla CDO imamo: $(x\sqrt{3})^2+(y\sqrt{3})^2=300^2$ odnosno: $3x^2+3y^2=90\,000$, odakle izlazi: $x^2+y^2=30\,000$. Međutim, iz pravouglog trougla AOB je $x^2+y^2=AB^2$, pa je $AB=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{30\,000}=100\sqrt{3}$.



Sl. 4



Sl. 5

5. Neka su a i b osnovne ivice, d_1 i d_2 odgovarajuće dijagonale bočnih strana, d dijagonala osnove i h visina kvadra (sl. 5). Iz datih razmera dobijamo proporcije: $a:b=4:3$, $d_1:d_2=\sqrt{20}:\sqrt{13}$ i $dh:abh=2:1$. Odavde je $d_1{}^2:d_2{}^2=20:13$, odnosno $(a^2+h^2):(b^2+h^2)=20:13$ i $d:ab=2:1$, odakle dobijamo $\sqrt{a^2+b^2}:ab=2:1$ ili $(a^2+b^2):a^2b^2=4:1$. Osnovne ivice dobijamo iz prve i poslednje proporcije, koje posle sređivanja daju jednačine: $4b=3a$ i $a^2+b^2=4a^2b^2$. Smenjujući b dobijamo; $a^2+9a^2/16=9a^4/4$. Posle skraćivanja sa a^2 dobijamo: $a^2=25/36$, odnosno $a=5/6$. Samim tim je $b=5/8$. Sada iz $(a^2+h^2):(b^2+h^2)=20:13$ dobijamo: $(25/36+h^2):(25/64+h^2)=20:13$, odakle je $h^2=25/144$ odnosno $h=5/12$.

Sada izračunamo: $P=2ab+2ah+2bh=325/144$ i $V=abh=125/576$.