Zahvaljujem Društvu matematičara Srbije (http://www.dms.org.rs/) i njegovom predsjedniku dr. Zoranu Kadelburgu na dopuštenju da iz časopisa "Matematički list za učenike osnovne škole" skeniram stranice koje sadrže zadatke i rješenja s republičkih natjecanja (SR Hrvatke) i saveznih natjecanja (SFRJ) i skenove objavim na web stranici http://public.carnet.hr/mat-natj .

Antonija Horvatek
http://public.carnet.hr/~ahorvate/

5-15
P-609 (1. XI 77)

OBAVEŠTENJE PRETPLATNICIMA

1. Uredništvo poziva nastavnike i profesore matematike kao i ostale čitaoce da šalju svoje priloge za list: članke, odabrane zadatke, zadatke sa prijemnih ispita i matematičkih takmičenja, razne zanimljivosti. Poželjno je da svi rukopisi (osim učeničkih rešenja zadataka) budu pisani pisaćom mašinom, s proredom. **Rukopi se ne vraćaju.**

2. *Matematički list* namenjen je *svim učenicima* IV—VIII raz. osnovne škole. List izilazi 6 puta u toku školske godine, i to 1. X, 15. XI, 1. I, 15. II, 1. IV i 15. V.

3. Godišnja pretplata (za svih 6 brojeva, iznosi 35 dinara. Naručiocima za više od 10 kompleta odobravamo rabat (20%, 15%, 10%), zavisno od roka do kojeg se isplati celokupna pretplata (1. XII, 1. III, 1. VI). Nikakvi drugi odbici ne uvažavaju se.

Narudžbine se šalju samo neposredno na adresu lista, a novac na **žiro-račun „Matematičkog lista" broj 60806-678-14627.** Pri tome treba **obavezno** navesti *tačnu adresu* na koju list treba dostaviti i jasno naznačiti na šta se narudžbina odnosno uplata odnosi.

Narudžbine primamo i direktno preko telefona redakcije, br. **011-638-263.**

4. Raspolažemo kompletnima lista iz školske 1968/69, god. (br. III, 1—5), šk. 1969/70. god. (br. IV, 1—5), šk. 1970/71. god. (br. V, 3 i 4), šk. 1971/72. god. (br. VI, 1—5), šk. 1972/73. god. (br. VII, 1—5), šk. 1973/74. god. (br. VIII, 1—5), šk. 1974/75. god. (br. IX, 1—6), šk. 1975/76. god. (br. X, 1—6) i šk. 1976/77 god. (br. XI, 1—6). Od ovih godišta prodaju se: godišta III, IV, VI i VII po sniženoj ceni od 10 dinara za komplet, godište V po ceni od 4 dinara i godište VIII, IX, X i XI po ceni od 15 din. Zbirka rešenih zadataka sa matematičkih takmičenja učenika osnovne škole može se dobiti po ceni od 10 din.

5. Mole se poverenici *Matematičkog lista* da izmire sva zaostala dugovanja.

6. Sve priloge, primedbe i narudže slati *isključivo* na adresu:

Matematički list, p.p. 728, 11001 Beograd

SADRŽAJ

1. *M. Živković*: Određivanje najmanjeg zajedničkog sadržaoca 1
2. O radu Letnje škole mladih matematičara 3
3. *J. Tomakić*: Neke zanimljivosti dijeljenja brojem 7 4
4. *M. Mrmak*: Reč-dve o skupovima 6
5. *D. Milošević*: Jedna primena međusobnog odnosa aritmetičke i geometrijske sredine brojeva 8
6. *B. Đerasimović*: Geometrijsko određivanje nekih ekstremnih vrednosti
7. Nagradni zadatak 13
8. Grčki matematičar Euklid 14
9. Zadaci za proveravanje stečenog znanja iz matematike 15
10. Osmo savezno takmičenje iz matematike za učenike osnovne škole 19
11. Zadaci sa pokrajinskog takmičenja učenika osnovnih škola AP Vojvodine 25
12. Odabrani zadaci 29
13. Konkursni zadaci 31
14. Matematička razonoda ..... 3 str. korica

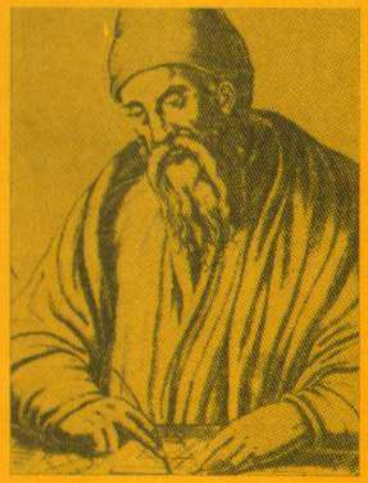
MATEMATIČKI INSTITUT ZAGREB J. P. HRVATSKE

MATEMATIČKI LIST

ZA UČENIKE OSNOVNE ŠKOLE

XII

1



EUKLID

BEOGRAD
1977.

1977. - savezno natjecanje - 7. i 8. razred
Matematički list za učenike osnovne škole
http://www.dms.org.rs/index.php?action=matematicki_list
http://public.carnet.hr/mat-natj

SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATIČARA, FIZIČARA I ASTRONOMA JUGOSLAVIJE

MATEMATIČKI LIST

za učenike osnovne škole

God. XII, broj 1 (1977/78)

Izlazi šest puta godišnje

IZDAJE DRUŠTVO MATEMATIČARA, FIZIČARA I ASTRONOMA SR SRBIJE
Beograd, Knez Mihajlova 35/IV, p. p. 728.

Urednici:

Platon Dimić i *Miroslav Živković*

Redakcioni odbor:

Bogumila Kolenko (Ljubljana), *dr Željko Pauše* (Zagreb), *Kosta Mijatović* (Sarajevo), *Danilo Šćepanović* (Titograd), *Duško Kovačev* (Skopje), *Velimir Sotirović* (Novi Sad), *Vladimir Stojanović* (Beograd)

Glavni i odgovorni urednik: *Miroslav Živković*

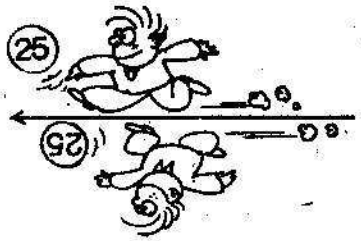
Sva prava umnožavanja, preštampavanja i prevođenja zadržava Društvo matematičara, fizičara i astronoma SR Srbije

Oslobođeno plaćanja poreza na promet na osnovu rešenja Republičkog sekretarijata za kulturu SR Srbije br. 413-186-03 od 11. 1. 1973. godine

Šampa: Beogradski izdavačko-grafički zavod, Beograd, Bul. vojvode Mišića br. 17

1977. - savezno natjecanje - 7. i 8. razred
Matematički list za učenike osnovne škole
http://www.dms.org.rs/index.php?action=matematicki_list
http://public.carnet.hr/mat-natj

MATEMATIČKA TAKMIČENJA



OSMO SAVEZNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE ZA UČENIKE OSNOVNE ŠKOLE

Osmo savezno takmičenje održano je 6. juna 1977. godine. Ovog puta učenici su se nadmetali na crnogorskom primorju, u Sutomoru. Po već tradicionalnoj obavezi, organizator je bio *Matematički list* za učenike osnovne škole.

Vreme je bilo lepo i toplo i većina učesnika je iskoristila priliku da se malo osveži na divnoj plaži kod hotela „Nikšić", u kome su inače bili smešteni učesnici i njihovi pratioci.

Takmičilo se ukupno 76 učenika, koji su prema utvrđenom međurepubličkom dogovoru odabrani kao najbolji na republičkim i pokrajinskim takmičenjima. Učestvovali su učenici iz svih naših krajeva, izuzev sa AP Kosova. Bilo je 45 učenika VIII razreda i 31 učenik VII razreda.

Takmičari su, svaki na svom maternjem jeziku, rešavali u toku 120 minuta po 5 zadataka koje je sastavila i ocenila Savezna komisija. Ovu komisiju sačinjavali su predstavnici Društvava matematičara, fizičara i astronoma SR Crne Gore, SR Slovenije, SR Hrvatske, SR Bosne i Hercegovine SR Srbije (bez pokrajina), SR Makedonije i AP Vojvodine. Članovi komisije su vršili i nadzor za vreme izrade zadataka.

Takmičenje se odvijalo u osnovnoj školi „Kekec" u Sutomoru, u školi koja je podignuta zahvaljujući solidarnosti dece iz čitave Jugoslavije. Naime, stara škola se porušila u toku zemljotresa, koji je pre desetak godina zahvatio ovaj kraj. Na poziv „*Kekeca*", odazvala su se deca širom naše zemlje i svojim prilozima omogućili izgradnju nove škole.

Domaćini, predstavnici ove škole i predstavnici Društva matematičara, fizičara i astronoma SR Crne Gore, trudili su se da učenici ponesu što više prijatnih utisaka sa ovog takmičenja.

U prostranoj auli škole saopšteni su rezultati, bolji nego na svim dosadašnjim takmičenjima, iako su zadaci bili veoma ozbiljni. Najuspešniji takmičari dobili su vredne nagrade, diplome i pohvale, a oni koji nisu nagrađeni dobili su knjige i priznanja. Sve ove poklone obezbedio je *Matematički list*. Između ostalog, svi nosioci I nagrade upućeni su na besplatan desetodveni boravak u *Letnjoj školi* mladih matematičara, koju je od 1. jula organizovalo Društvo matematičara, fizičara i astronoma SR Srbije u dečjem odmaralištu „Šuplja stena" na Avali.

Nagrađeni su i pohvaljeni sledeći učenici:

VII RAZRED

1. **Vukotić Dragan**, uč. OŠ „Dr J. Cvijić", Smederevo (I nagrada)
2. **Danilović Dejan**, uč. OŠ „20. oktobar", Beograd (I nagrada)
3. **Mulahasanović Besim**, uč. OŠ „M. Merdžić", Tuzla (I nagrada)
4. **Šuvaković Dušan**, uč. OŠ „Đ. Natošević", N. Sad (II nagrada)
5. **Pandžić Pavle**, uč. OŠ „Križanićeva", Zagreb (II nagrada)

1977. - savezno natjecanje - 7. i 8. razred
Matematički list za učenike osnovne škole
http://www.dms.org.rs/index.php?action=matematicki_list
http://public.carnet.hr/mat-natj

6. **Mandrino Đoko**, uč. OŠ „V. Vodnik", Ljubljana (II nagrada)
7. **Todorić Dragana**, uč. OŠ „N. Matić", T. Užice (III nagrada)
8. **Mudri Tatjana**, uč. OŠ „J. Preradović", Zagreb (III nagrada)
9. **Džalto Slobodan**, uč. OŠ „A. Šantić", Hrasnica (III nagrada)
10. **Tomanović Aleksandra**, uč. OŠ „V. Karadžić", Čačak (III nagrada)
11. **Vidaković Aleksandra**, uč. OŠ „22. decembar", Beograd (III nagrada)
12. **Čajić Boris**, uč. OŠ „Đ. Natošević", Novi Sad (pohvala)
13. **Petrović Dubravka**, uč. OŠ „Đ. Jakšić", Pančevo (pohvala)
14. **Dimić Ljubodrag**, uč. OŠ „31. maj", Niš (pohvala)
15. **Crepulja Gordana**, uč. OŠ „H. Pinki", Futog (pohvala)
16. **Tavčar Mojca**, uč. OŠ „P. Voranc", Ljubljana (pohvala)
17. **Bervida Darija**, uč. OŠ „17. travnja", Našice (pohvala)

VIII RAZRED

1. **Marjanović Zorica**, uč. OŠ „A. Savčić", Valjevo (I nagrada, 100 poena)
2. **Damjanović Aleksandar**, uč. OŠ „I. Gundulić", Beograd (I nagrada)
3. **Elez Nebojša**, uč. OŠ „M. Pijade", Vogošća (I nagrada)
4. **Jevtić Radovan**, uč. OŠ „M. Glišić", Valj. Kamenica (I nagrada)
5. **Pavišić Ivan**, uč. OŠ „Sutjeska", Titograd (II nagrada)
6. **Timčenko Aleksandar**, uč. OŠ „I. Gundulić", Beograd (II nagrada)
7. **Cokan Tomaž**, uč. OŠ „Prule", Ljubljana (II nagrada)
8. **Boltin Uroš**, uč. OŠ „P. Voranc", Ljubljana (III nagrada)
9. **Krčmar Slobodan**, uč. OŠ „M. Pupin", Veternik (III nagrada)
10. **Jurlin Tomislav**, uč. OŠ „A. Šenoa", Zagreb (III nagrada)
11. **Altman Boris**, uč. OŠ „B. Radičević", Beograd (III nagrada)
12. **Luketa Miljan**, uč. OŠ „B. Radičević", Ilidža (III nagrada)
13. **Protić Jelica**, uč. OŠ „J. Miodragović", Beograd (pohvala)
14. **Dostanić Nenad**, uč. OŠ „V. Dugošević", Beograd (pohvala)
15. **Pudar Stela**, uč. OŠ „29. novembar", Sarajevo (pohvala)
16. **Stojanović Dragan**, uč. OŠ „Braća Jerković", Železnik (pohvala)
17. **Čupović Ljiljana**, uč. OŠ „V. Karadžić", Priboj (pohvala)
18. **Korić Edin**, uč. OŠ „I. G. Kovačić", Zenica (pohvala)

ZADACI SA VIII SAVEZNOG TAKMIČENJA

VII RAZRED

1. U jednom redu stoji 1 000 učenika. Dozvoljeno je da svoja mjesta u redu zamijene samo oni učenici (tj. parovi učenika) koji imaju zajedničkog susjeda.

Da li je ovakvom promjenom mjesta moguće da učenik koji stoji na jednom kraju reda dospije na drugi kraj?

Odgovor obrazložiti!

2. Proizvod (produkt) četiri uzastopna parna prirodna broja je 13 440. Odrediti te brojeve!

3. Radnici: *Andrija*, *Boris* i *Cene* urade zajeno neki posao za 1 sat. Poznato je da bi svaki od njih uradio taj posao sam za ceo broj sati. Osim toga, zna se da *Boris* radi brže od *Andrije*, a sporije od *Ceneta*. Za koliko sati bi taj isti posao uradio svaki od njih radeći sam?

4. Dužina (duljina) visine trapeza jednaka je 6 cm, a dužina jedne osnovice je 4 cm. Unutrašnji uglovi (kutevi) trapeza na toj osnovici su 120° i 135°.

a) Konstruisati taj trapez.

b) Izračunati obim (opseg) i površinu (površinu) tog trapeza.

5. Dat je trougao (trokut) stranica 3, 4 i 5.

Postoji li tačka unutar tog trougla koja je od svake stranice udaljena manje od od 1 (jedan)?

VIII RAZRED

1. Da li je moguće bridove (ivice) kocke označiti (numerisati) različitim brojevima 1, 2, 3, . . . , 11, 12 tako da je suma (zbir) brojeva pridruženih trima bridovima koji „izlaze" iz istog vrha (temena), za sve vrhove (temena) kocke jednaka? Obrazložiti odgovor!

2. Dato je 5 proizvoljnih (bilo kojih) cijelih brojeva.

a) Dokazati da među njima postoje dva broja čija razlika (diferencija) je djeljiva sa 3;

b) Dokazati da među njima postoje tri broja čiji zbir (zbroj) je djeljiv sa 3!

3. Prava (pravac) $y=ax+b$ prolazi kroz tačku $T(0,6)$, s koordinatnim osama gradi trougao (trokut) površine (ploštine) 24 i ne prolazi kroz treći kvadrant.

a) Odrediti a i b.

b) Odrediti zapreminu (volumen) tijela koje nastaje rotiranjem trougla oko najduže stranice spomenutog trougla.

4. Data je kocka $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kod koje su dužine (duljine) stranica jednake a. Sjecište (presjek) dijagonala osnove $ABCD$ je tačka M. Duži (dužine) DB_1 i MD_1 sijeku se u tački K.

Odrediti površinu (ploštinu) trouglova (trokuta) KDM i KB_1D_1.

5. Dat je pravougaonik (pravokutnik) $ABCD$ čija je stranica AB dva puta duža od stranice BC.

Na stranici CD izabrana je tačka M takva da je ugao AMD jednak uglu AMB.

a) Izračunati ugao AMB.

b) Ako je dužina duži (duljina dužine) DM jednaka 1, kolika je površina (ploština) pravougaonika $ABCD$?

Rešenja zadataka

VII RAZRED

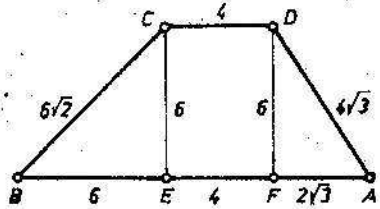
1. Brojevima od 1 do 1 000 označimo sva mesta na kojima stoje učenici. Prema uslovu mesta mogu da zamene samo učenici čiji se broj mesta razlikuje za 2. Dakle, učenik čiji je broj neparan može da zameni mesto samo sa učenikom čiji je broj takođe neparan. Prema tome, prvi (broj mesta 1) nikad ne može doći na mesto poslednjeg (broj mesta 1000).

1977. - savezno natjecanje - 7. i 8. razred
Matematički list za učenike osnovne škole
http://www.dms.org.rs/index.php?action=matematicki_list
http://public.carnet.hr/mat-natj

2. Neka su dati uzastopni parni brojevi: $2n$, $2n+2$, $2n+4$ i $2n+6$. Tada je $2n(2n+2)(2n+4)(2n+6)=13\,440$, odakle dobijamo: $2n\cdot 2(n+1)\cdot 2(n+2)\cdot 2(n+3)=13\,440$, odnosno: $16(n^4+6n^3+11n^2+6n)=13\,440$. Skraćivanjem sa 16 dobićemo: $n^4+6n^3+11n^2+6n=840$. Dakle $n^4<840$, pa kako je $5^4=625$ i $6^4=1296$, sledi da je $n<6$. Proverom dobijemo da je $n=4$. Dati uzastopni parni brojevi su: 8, 10, 12 i 14. (Zaista je $8\cdot 10\cdot 12\cdot 14=13\,440$.)

3. Pretpostavimo da bi Andrija sam uradio ceo posao za a sati, Boris za b sati i Cene za c sati. Tada bi za jedan sat uradili redom: $\frac{1}{a}$-ti deo posla, $\frac{1}{b}$-ti deo posla, $\frac{1}{c}$-ti deo posla. Pošto zajedno završe posao za 1 sat, sledi da je $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$. Kako su a, b i c prirodni brojevi i $c<b<a$, dobijamo: $a=6$ sati, $b=3$ sata i $c=2$ sata.

4. a) Za trapez na slici 1 uzete su upola manje dimenzije ($CD=2$ cm i $DF=3$ cm). Najpre se konstruiše duž (dužina) CD, a zatim uglovi ($\sphericalangle C=135°=90°+45°$ i $\sphericalangle D=120°=2\cdot 60°$). Zatim odredimo normalu (okomicu) DF prave (pravca) CD, tako da tačka F leži u uglu od 120° i da je $DF=6$ cm. Prava kroz F, paralelna sa CD, seče krake konstruisanih uglova u temenima (vrhovima) A i B traženog trapeza.



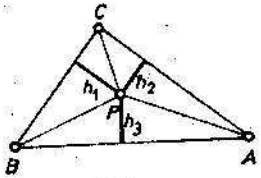
Sl. 1

b) Trougao (trokut) BCE je pravougli (pravokutni) jednakokraki ($\sphericalangle B=\sphericalangle BCE=45°$), pa primenom Pitagorine teoreme iz $BE=CE=6$ dobijamo da je $BC=6\sqrt{2}$. Pravougli trougao ADF ima oštre uglove od 30° i 60°, pa predstavlja polovinu jednakostraničnog trougla sa visinom $DF=6$. Znamo da je $DF=\frac{AD\sqrt{3}}{2}$, odnosno $6=\frac{AD\sqrt{3}}{2}$. Odavde dobijamo da je $AD=4\sqrt{3}$.

Sem toga je $AF=\frac{1}{2}AD=2\sqrt{3}$. Sada znamo stranice trapeza: $CD=4$, $BC=6\sqrt{2}$, $AD=4\sqrt{3}$ i $AB=AF+FE+BE=10+2\sqrt{3}$ (jer $EF=CD=4$).

Obim trapeza $O=AB+BC+CD+DA=(14+6\sqrt{2}+6\sqrt{3})$, a površina je $P=\frac{1}{2}(AB+CD)\cdot h=(42+6\sqrt{3})$ cm².

5. Kako je $3^2+4^2=5^2$, sledi da je dati trougao ABC pravougli (sl. 2) i njegova površina je $P=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4=6$.



Sl. 2

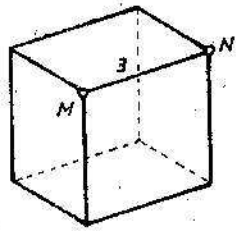
Pretpostavimo da postoji tačka P u trouglu ABC takva da su njena odstojanja od stranica BC, CA i AB redom h_1, h_2 i h_3 i da je $h_1<1$, $h_2<1$ i $h_3<1$. Tada je zbir (zbroj) površina trouglova BCP, ACP i ABP jednak površini trougla ABC, tj. zbir ovih površina je 6.

Međutim, ako je tačna pretpostavka da su odstojanja h_1, h_2 i h_3 manja od 1, dobijamo: $P_{BCP}+P_{ACP}+P_{ABP}=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot h_1+\frac{1}{2}\cdot 4\cdot h_2+\frac{1}{2}\cdot 5\cdot h_3<\frac{1}{2}\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 4+\frac{1}{2}\cdot 5$, ($h_1$, h_2 i h_3 smo zamenili većim brojem 1). Kako je $P_{BCP}+P_{ACP}+P_{ABP}=P_{ABC}$, a $\frac{1}{2}\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 4+\frac{1}{2}\cdot 5=6$, izlazi da je $P_{ABC}<6$, što nije moguće, jer je $P_{ABC}=6$. Dakle, pretpostavka da postoji opisana tačka P je pogrešna, tj. ne postoji takva tačka P.

Zanimljivo je da ne postoji ni tačka Q koja je od svake stranice udaljena više od 1 (dokazuje se slično izloženom), a postoji tačka koja je od svake stranice udaljena tačno 1—to je centar upisane kružnice.

VIII RAZRED

1. Ako bi predloženo označavanje bilo moguće, onda bi zbir svih osam zbirova pridruženih temenima kocke iznosio $2(1+2+3+\cdots+11+12)$. Na sl. 3 vidimo da bi, na primer, broj 3, kojim je označena neka ivica MN, ulazio u zbir koji odgovara temenu M i u zbir koji odgovara temenu N. Na isti način, svaki od brojeva 1, 2, . . . , 12 pojaviće se po dva puta u ukupnom zbiru. Dakle, zbir osam jednakih prirodnih brojeva (zbir kod svakog temena je prirodan broj) iznosio bi $2\cdot 78=156$, pa je svaki od njih jednak $156:8=\frac{39}{2}$, što je nemoguće. Dakle, predloženo označavanje ivica nije moguće.



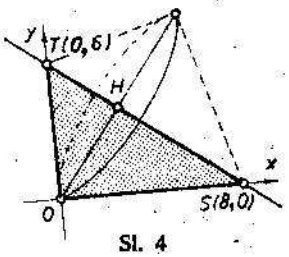
Sl. 3

2. Skup brojeva može se podeliti u tri grupe brojeva (zovemo ih klasama), čiji su predstavnici oblika: $3m$ (deljivi sa 3), $3n+1$ (pri deljenju sa 3 imaju ostatak 1) i $3p+2$ (pri deljenju sa 3 daju ostatak 2), gde su m, n i p celi brojevi. Ove tri grupe obuhvataju sve cele brojeve.

a) Između 5 brojeva makar 2 moraju pripadati istoj klasi i njihova razlika je deljiva sa 3: $(3m_1-3m_2)=3(m_1-m_2)$, $(3n_1+1)-(3n_2+1)=3(n_1-n_2)$, $(3p_1+2)-(3p_2+2)=3(p_1-p_2)$.

b) Ako se u bilo kojoj grupi nalaze 3 od datih 5 brojeva, njihov zbir je deljiv sa 3. Na primer, ako su 3 broja u trećoj klasi, onda je: $(3p_1+2)+(3p_2+2)+(3p_3+2)=3(p_1+p_2+p_3)+6$, a ovaj broj je deljiv sa 3. Ako ne postoje 3 broja iz jedne klase, onda svaka klasa ima bar jednog predstavnika, pa je zbir po jednog predstavnika iz svake grupe: $3m+3n+1+3p+2=3(m+n+p)+3$, a ovaj broj je deljiv sa 3.

3. Trougao (trokut) OST (sl. 4) je pravougli (pravokutni), pa je njegova površina $P=\frac{1}{2}OT\cdot OS$. Zamenom $P=24$ i $OT=6$ dobijamo: $24=3OS$, odakle je $OS=8$. Dakle, prava sadrži tačke $T(0, 6)$ i $S(8, 0)$. Zamenjujući promenjive x i y u formuli $y=ax+b$ koordinatama tačke T, a zatim i koordinatama tačke S, dobićemo jednačine po nepoznatim a i b: $6=b$ i $0=8a+b$. Tako nalazimo: $b=6$ i $a=-\frac{3}{4}$.



Sl. 4

1977. - savezno natjecanje - 7. i 8. razred
Matematički list za učenike osnovne škole
http://www.dms.org.rs/index.php?action=matematicki_list
http://public.carnet.hr/mat-natj

b) Rotacijom oko najduže stranice trogao obrazuje dvostruku kupu poluprečnika (konus polumjera) OH i visine ST. Najpre izračunamo ST (Pitagorina teorema): $ST^2=OS^2+OT^2=8^2+6^2=100$, pa je $ST=10$. Koristeći formulu za površinu trougla $P=\frac{1}{2}AC\cdot OH$ (OH je hipotenuzina visina), izračunaćemo $OH=\frac{2P}{ST}=\frac{48}{10}=4{,}8$.

Površina dvojne kupe sastoji se od dva omotača i (prema formuli $M=\pi rs$): $P=\pi\cdot OH\cdot OT+\pi\cdot OH\cdot OS=67{,}2\,\pi$.

Zapremina $\left(\text{prema formuli } V=\frac{\pi}{3}r^2h\right)$ iznosi: $V=\frac{\pi}{3}OH^2\cdot SH+\frac{\pi}{3}OH^2\cdot HT=\frac{\pi}{3}OH^2(SH+HT)=\frac{\pi}{3}OH^2\cdot ST$, jer je $SH+HT=ST$. Dakle, $V=\frac{\pi}{3}\cdot 4{,}8^2\cdot 10=76{,}8\,\pi$.

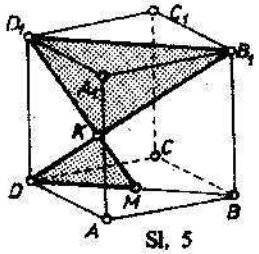
Za $\pi=3{,}14$ imamo: $P=211{,}008$ i $V=241{,}152$.

4. Trouglovi KDM i B_1D_1K pripadaju pravougaoniku (pravokutniku) BDD_1B_1, čije su stranice $BB_1=a$ i $BD=a\sqrt{2}$ (dijagonala kvadrata $ABCD$ stranice a). Kako je $DM\parallel B_1D_1$, zaključujemo da su trouglovi KDM i B_1D_1K slični (sl. 6), pa je $h:h_1=DM:D_1B_1=1:2$ $\left(\text{jer je } DM=\frac{1}{2}D_1B_1\right)$.

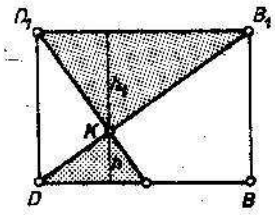
Dakle, $h=\frac{1}{2}h_1$, pa kako je $h+h_1=BB_1=a$, sledi da je $h=\frac{1}{3}a$ i $h_1=\frac{2}{3}a$. Sada izračunavamo:

$$P_{KDM}=\frac{1}{2}DM\cdot h=\frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{3}a=\frac{a^2\sqrt{2}}{12},$$

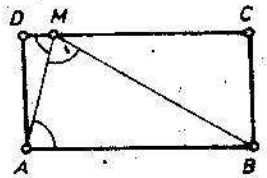
$$P_{B_1D_1K}=\frac{1}{2}B_1D_1\cdot h_1=\frac{1}{2}a\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}a=\frac{a^2\sqrt{2}}{3}.$$



Sl. 5



Sl. 6



Sl. 7

5. a) Zbog $AB\parallel CD$ je $\sphericalangle BAM=\sphericalangle AMD$ (kao naizmenični uglovi), pa na osnovu uslova $\sphericalangle AMD=\sphericalangle AMB$, sledi da je $\sphericalangle BAM=\sphericalangle AMB$ (sl. 7). Dakle, trougao ABM je jednakokrak i $BM=AB$ (pošto leže naspram jednakih uglova). Uočimo sada pravougli trougao BCM. Njegova hipotenuza BM je dva puta veća od katete BC (jer je po pretpostavci $AB=2BC$, a $BM=AB$). Kako što znamo, ovakav trougao je polovina jednakostraničnog trougla, pa je $\sphericalangle BMC=30°$. Stoga je $\sphericalangle AMB+\sphericalangle AMD=150°$, odnosno $\sphericalangle AMB=\sphericalangle AMD=75°$.

b) Neka je $BC=b$; tada je $CD=2b$. Kako je $CD=CM+DM$, a $DM=1$ i $CM=b\sqrt{3}$ (izračunava se iz pravouglog trougla BCM u kome će $BC=b$ i $BM=2b$), dobićemo formulu $2b=b\sqrt{3}+1$. Odavde je $2b-b\sqrt{3}=1$, odnosno $b(2-\sqrt{3})=1$, pa je $b=\frac{1}{2-\sqrt{3}}$. Proširujući poslednji razlomak sa $2+\sqrt{3}$ dobićemo:

$$b=\frac{1}{2-\sqrt{3}}\cdot\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}.$$

Sada je površina pravougaonika $P=2b^2=2\cdot(2+\sqrt{3})^2=2(7+4\sqrt{3})$.

ЗАДАЦИ СА ПОКРАЈИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА АП ВОЈВОДИНЕ

одржаног 24. априла 1977. године

VII РАЗРЕД

1. На неком такмичењу из математике сваки ученик добио је по 10 задатака. За сваки добро решен задатак такмичар добија по 5 бодова, а за сваки нерешен или непотпуно решен задатак губи 3 бода. Колико је задатака добро решио онај ученик који је добио 26 бодова?

2. Докажите: ако су у шестоцифреном природном броју прва и четврта цифра једнаке, друга и пета једнаке, а такође и трећа и шеста једнаке, тај број је дељив са 7, 11 и 13.

3. Дужина једне странице правоугаоника је 75% дужине друге странице. Ако мању страницу повећамо за 3 cm, а већу за 6 cm смањимо, добије се правоугаоник обима 50 cm. Наћи странице датог правоугаоника.

4. Дат је правилни n-тоугао. Утврдити за коју вредност n је спољашњи угао датог n-тоугла мањи од 40°.

5. Симетрале унутрашњих углова паралелограма $ABCD$ секу се у тачкама P, Q, R, S. Докажите:

a) да је четвороугао $PQRS$ правоугаоник;

b) да је дијагонала четвороугла $PQRS$ једнака разлици суседних страница паралелограма $ABCD$.

VIII РАЗРЕД

1. На излету су били 4 дечака и 4 девојчице. Познато је да је сваки дечак брат по једне девојчице, тј. да имамо 4 пара брат-сестра из 4 разне породице, и позната су имена девојчица и презимена дечака. Пили су лимунаду и попили укупно 32 чаше. Девојчице су попиле: *Марија* једну чашу, *Јованка* две чаше, *Илона* три чаше и *Ана* четири чаше. Дечаци су попили: *Хорвај* једнако као

1977. - savezno natjecanje - 7. i 8. razred
Matematički list za učenike osnovne škole
http://www.dms.org.rs/index.php?action=matematicki_list
http://public.carnet.hr/mat-natj