Najtoplije zahvaljujem **dr. Mirku Poloniju** na dopuštenju da ovaj materijal objavim na
http://public.carnet.hr/mat-natj .

Antonija Horvatek
http://public.carnet.hr/~ahorvate

SOCIJALISTIČKA REPUBLIKA HRVATSKA
ZAVOD ZA PROSVJETNO-PEDAGOŠKU SLUŽBU

REPUBLIČKA I SAVEZNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE ZA UČENIKE OSNOVNIH ŠKOLA

Priredio: mr Mirko Polonijo

Zagreb, 1978.

REPUBLIČKO NATJECANJE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA SR HRVATSKE

Pula, 27. - 28. svibnja 1978.

ZADACI IZ MATEMATIKE - VII RAZRED

PRVA SKUPINA

1. Napiši pomoću uobičajenih oznaka: skup svih racionalnih brojeva većih od $-\frac{6}{7}$ i manjih od $\frac{1}{2}$!

2. Izračunaj: a) $-\frac{7}{9} - \left(- \frac{2}{3} \right) =$

   b) $\dfrac{-0{,}2}{\frac{1}{3}} =$

   c) $(-1)^2 - (-2)^2 - (-3)^3 =$

3. Neka su x i y zadani brojevi. Napiši broj koji je jednak četvrtini umnoška njihovih kvadrata!

4. Kolika je duljina katete b u pravokutnom trokutu, koji ima duljinu hipotenuze c = 1 (cm) i duljinu katete a = 0,8 (cm)?

5. Kolika je ploština kvadrata kojem je duljina dijagonale $\sqrt{2}$ (cm)?

6. Ploština P jednostraničnog trokuta proporcionalna je kvadratu duljine njegove stranice. Koliki je koeficijent proporcionalnosti?

7. Nadji rješenje jednadžbe: a) $-0{,}4 \cdot x = \frac{2}{5}$

   b) $\frac{5}{6} \cdot x - \frac{7}{8} = 4{,}125$

DRUGA SKUPINA

1. Ako je zbroj dvaju cijelih brojeva veći od njihova produkta i manji od njihove razlike, tada su ta dva broja suprotnih predznaka. Dokaži!

Neka je

$$S = \left\{ (x,y) : x \in Z,\ y \in Z,\ |x| \leq 2,\ |y| \leq 2 \right\}$$

Odredi podskup P skupa S kojeg čine svi oni parovi za koje vrijedi da je zbroj njihovih komponenata veći od produkta komponenata i manji od razlike prve i druge komponente.

2. Medju prvih tisuću prirodnih brojeva koliko ima onih koji nisu djeljivi ni sa 4, ni sa 6?

3. Četverokut ABCD je centralno simetričan. Opseg tog četverokuta je 12, a duljina jedne stranice 3. Dokaži da je ABCD romb!

4. Dužina $\overline{AB}$ duljine 8 je promjer polukružnice sa središtem u točki O.

Nad polumjerima $\overline{AO}$ i $\overline{OB}$ kao promjerima nacrtane su dvije manje polukružnice s iste strane $\overline{AB}$ kao i velika polukružnica.

Izračunaj ploštinu kruga koji dira veću polukružnicu iznutra, a manju izvana.

Konstruiraj taj krug.

Rješenja zadataka druge skupine:

1. Ako su x,y cijeli negativni brojevi, tada je $x+y$ negativan broj, a xy pozitivan broj, pa je

$$x+y < xy.$$

Ako su x,y cijeli pozitivni brojevi, tada je

$$x-y < x + y.$$

Stoga, da bi za cijele brojeve x,y vrijedilo

$$x-y > x+y > xy \qquad /1/$$

x,y nužno moraju biti suprotnih predznaka (i osim toga oba različita od 0/.

Drugi dio zadatka traži da se odrede svi parovi (x,y), gdje su $x,y \in \{-2, -1, 0, 1,2\}$ za koje vrijede već prometrane nejednakosti /1/.

Koristeći već dokazano, odmah dobivamo

$$P = \{(1,-1), (1,-2), (2,-1), (2,-2)\}$$

2. Kako je

$$\frac{1000}{4} = 250, \qquad \frac{1000}{6} = 166{,}6, \quad \frac{1000}{12} = 83{,}3$$

to medju prvih tisuću prirodnih brojeva ima 250 djeljivih s 4, 166 djeljivih s 6, te 83 djeljivih s 12.

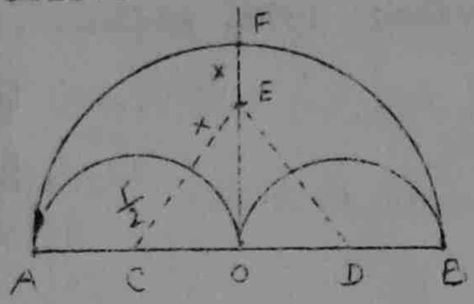
Brojeva koji su djeljivi i s 4 i s 6 ima

$$250 + 166 - 83 = 333$$

pa slijedi da brojeva koji nisu djeljivi ni s 4, ni s 6 ima 667

3. Zbog centralne simetričnosti, četverokut ABCD je paralelogram (dijagonale se raspolavljaju).
Kako je opseg 12, a duljina jedne stranice, pa time i njoj paralelne, jednake 3, to je duljina i drugih dviju stranica jednaka $\frac{12 - 2 \cdot 3}{2} = 3$, pa je promatrani paralelogram ABCD doista romb.

4.



Neka su C,D središta manjih polukružnica, te neka je E središte traženog kruga, a x duljina njegova polumjera.
Trokut CDE je jednakokračan, pa znači da je točka E na simetrali OF dužine $\overline{AB}$.
Primjenom Pitagorinog poučka na trokut COE imamo

$$(x + \frac{r}{2})^2 = (r - x)^2 + (\frac{r}{2})^2,$$

pri čemu je $r = 4$.

Stoga je

$$(x + 2)^2 = (4-x)^2 + 2^2$$

i odatle je $12x = 16$,

pa je $x = \frac{4}{3}$

Tražena ploština je jednaka $\frac{16}{9}\pi$

Znajući x, lako se konstruira krug.

REPUBLIČKO NATJECANJE UČENIKA OSNOVNIH
ŠKOLA SR HRVATSKE

Pula, 27 - 28. svibnja 1978. godine

ZADACI IZ M A T E M A T I K E
VIII RAZRED

PRVA SKUPINA

Izračunaj:

1. a) $- 0,7 \cdot 0,1 =$

   b) $- 0,1 : 0,1 =$

   c) $4 \frac{2}{7} : 5 \frac{1}{2} =$

   d) $1 + 3 : \frac{1}{3} =$

   e) $(-0,2)^{12} : (-0,2)^{3} =$

2. Koliki je opseg kvadrata kojemu je duljina dijagonale $\sqrt{2}$ (cm)?

3. Koliko je pravaca odredjeno različitim točkama A, B, C i D, ako su točke A, B i C kolinearne?

4. Dovrši rečenicu: Pravci a i b su mimoilazni ako

   ____

   ____

5. Ako prizma i piramida imaju jednake ploštine baza i jednake volumene, kako se odnose duljine njihovih pripadnih visina?

6. Nadji rješenje jedandžbe:

$$\frac{5x}{3} - \frac{7x + 2}{2} = 10$$

DRUGA SKUPINA

1. Prvi traktor može izorati neko polje za 15 sati, a drugi za 20 sati. Nakon jednog sata oranja prvim traktorom u pomoć je došao drugi traktor i zajedno su poorali cijelo polje. Koliko su sati ovi traktori orali zajedno?

2. Dvije različite kružnice diraju krakove pravog kuta.
Koliki je omjer duljina polumjera manje i veće kružnice, ako jedna kružnica prolazi središtem druge?

3. Oplošje kvadra je 2oo, a volumen je izražen istim brojem kao i zbroj recipročnih vrijednosti duljine triju bridova iz istog vrha.
Koliki je volumen kvadra?
Dokaži da taj kvadar nije kocka!

4. Odredi skupove A, B, C ako je

$$A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$
$$A \cup B = \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$$
$$A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$$
$$A \cap B = \{1, 2\}$$
$$A \cap C = \{3, 7\}.$$

A

Rješenja druge skupine zadataka:

C

1. Neka je x vrijeme zajedničkog oranja izraženo u satima.
Tada iz uvjeta zadatka slijedi

$$\frac{x+1}{15} + \frac{x}{20} = 1,$$

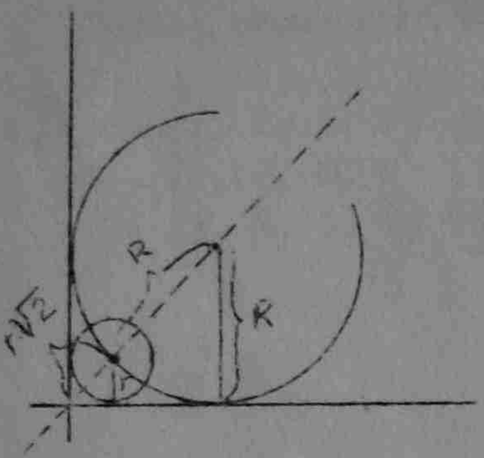
odakle je

$$x = 8.$$

Traktori su zajedno orali 8 sati.

2. Označimo sa R i r duljine polumjera veće i manje kružnice. Valja razlikovati dva slučaja:

/1/ veća kružnica prolazi središtem manje.



Iz sličnosti trokutova dobivamo

$r : R = r\sqrt{2} : (r\sqrt{2} + R)$, pa je

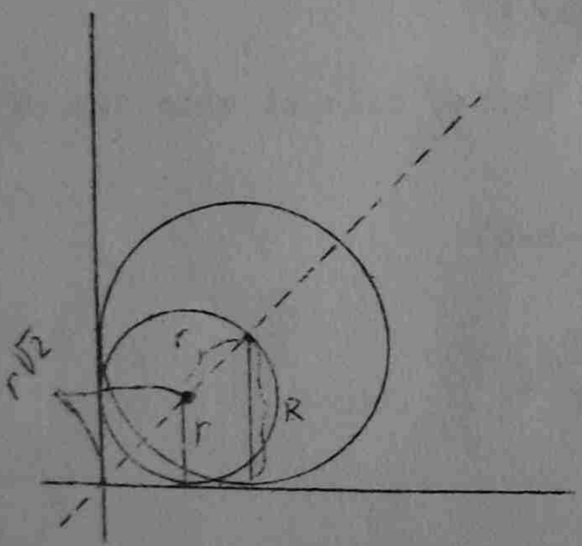
$r^2\sqrt{2} + Rr = Rr\sqrt{2}$, tj.

$R(\sqrt{2} - 1) = r\sqrt{2}$

i dobivamo

$$\frac{r}{R} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}$$

/2/ manja kružnica prolazi središtem veće



Iz sličnosti trokutova dobivamo

$r : R = r\sqrt{2} : (r\sqrt{2} + r)$, pa je

$r^2\sqrt{2} + r^2 = \sqrt{2}\,Rr$, tj.

$r(\sqrt{2} + 1) = R\sqrt{2}$

i dobivamo

$$\frac{r}{R} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}$$

3. Neka su a, b, c redom duljine triju bridova iz istog vrha. Tada je

$$2\,(ab + bc + ca) = 2oo,$$

tj.

$$ab + bc + ca = 1oo,$$

i vrijedi

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = abc,$$

pa je

$$bc + ca + ab = (abc)^2$$

tj.

$$1oo = (abc)^2.$$

Slijedi da je volumen kvadra jednak

$$V = abc = 1o \qquad /1/$$

Kad bi promatrani kvadar bio kocka, bilo bi zbog uvjeta o oplošju

$$6a^2 = 2oo \qquad /a=b=c)$$

tj.

$$a^2 = \frac{1oo}{3} \qquad /2/$$

a zbog /1/ bi bilo

$$a = \sqrt[3]{1o}$$

tj.

$$a^2 = \sqrt[3]{1oo} \qquad /3/$$

pa bi zbog jednakosti /2/ i /3/ slijedilo da je

$$\frac{100}{3} = 3\sqrt{100},$$

a to nije istina.

Dakle, promatrani kvadar nije kocka!

4. $A = \{1, 2, 3, 7\}$,
$B = \{1, 2, 6, 8\}$,
$C = \{3, 4, 5, 7, 9\}$.