Najtoplije zahvaljujem **dr. Mirku Poloniju** na dopuštenju da ovaj materijal objavim na http://public.carnet.hr/mat-natj .

Antonija Horvatek
http://public.carnet.hr/~ahorvate

SOCIJALISTIČKA REPUBLIKA HRVATSKA
ZAVOD ZA PROSVJETNO-PEDAGOŠKU SLUŽBU

REPUBLIČKA I SAVEZNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE ZA UČENIKE OSNOVNIH ŠKOLA

Priredio: mr Mirko Polonijo

Zagreb, 1978.

IX SAVEZNO NATJECANJE MLADIH MATEMATIČARA
UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA

Portorož, 4.6.1978.

ZADACI - VII RAZRED

1. Dokazati da je $7^{10000} - 1$ djeljivo sa 10.

2. Nad stranicama AB i BC paralelograma ABCD konstruisani su kvadrati AEFB i BGHC.
Dokazati da je duž (dužina) GF podudarna (sukladna) jednoj od dijagonala paralelograma ABCD.

3. Dvostruka ploština (površina) pravilnog šesterokuta (šestougla) jednaka je trostrukoj ploštini jednakostraničnog trokuta (trougla). Odrediti omjer opsega (razmjeru obima) šesterokuta i trokuta.

4. U raznostranom trouglu ABC dužina (duljina) visine spuštene iz tjemena (vrha) C na stranicu AB jednaka je zbiru (zbroju) dužina drugih dvaju visina.

Izraziti dužinu stranica AB u funkciji od dužina drugih dvaju stranica. Zatim, dokažite da ne postoje trougli koji ispunjavaju dati uslov (uvjet), a kojima je dužina stranice BC jednaka 6 i dužine drugih dvaju stranica izražavaju se prirodnim brojevima.

5. U kvadratnoj mreži 100 puta 100 upisano je bilo kojih deset hiljada brojeva.
Označimo sa a_1 zbir (zbroj) brojeva prve vrste (retka), sa a_2 zbir brojeva druge vrste, sa a_3 zbir brojeva treće vrste, itd., sa a_{100} zbir brojeva stote vrste.

Dalje, označimo sa b_1 zbir brojeva prve kolone (stupca), sa b_2 zbir brojeva druge kolone, sa b_3 zbir brojeva treće kolone, itd., za b_{100} zbir brojeva stote kolone.
Odredi brojnu vrijednost izraza:

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) + \ldots + (a_{100} - b_{100})$$

Rješenja:

1. Primijetimo da produkt dvaju brojeva koji završavaju znamenkom 1, opet je broj koji završava znamenkom 1 (slijedi iz činjenice da je

$$(10a+1)(10b+1) = 100ab + 10(a+b) + 1).$$

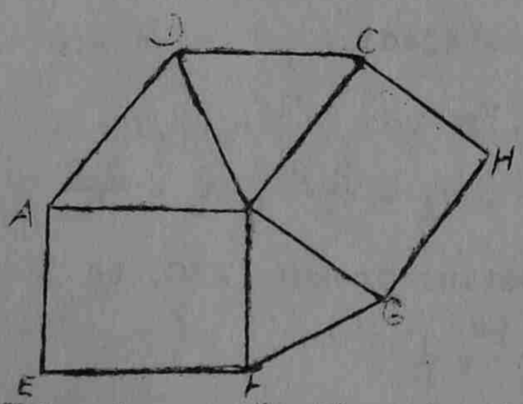
Kako je

$$7^4 = 49^2 = 2401,$$

to je $7^{10000} = 2401^{2500}$,

pa prema početnoj napomeni zaključujemo da 7^{10000} završava znamenkom 1. Stoga $7^{10000} - 1$ završava znamenkom 0, tj. $7^{10000}-1$ je djeljivo s 10.

2.



Uočimo da je

$\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD = 180^\circ$ /1/

(svojstvo paralelograma),

te da vrijedi

$\sphericalangle ABC + \sphericalangle CBG + \sphericalangle BGF + \sphericalangle FBA = 360^\circ$,

tj. $\sphericalangle ABC + \sphericalangle GBF = 180^\circ$ /2/.

Iz /1/ i /2/ slijedi

$\sphericalangle BCD = \sphericalangle GBF$ /3/.

Kako je $d(B,C) = (G,B)$ /4/,

$d(C,D) = d(B,F)$ /5/,

to su zbog /3/, /4/ i /5/ trokutovi BCD i GBF sukladni, pa je

$$d(B,D) = d(G,F).$$

Dakle, dužina GF je sukladna s dijagonalom BD paralelograma ABCD.

3. Označimo sa a duljinu stranice šesterokuta, a sa b duljinu stranice trokuta. Tada je iz uvjeta zadatka

$$2 \cdot 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3 \cdot \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$$

i slijedi da je

$$4a^2 = b^2,$$

pa je $\quad 2a = b,$

tj. $\quad 6a = 3b.$

Dakle, opsezi su jednaki, pa je traženi omjer jednak 1.

4. Označimo duljine visina spuštenih ih vrhova A,B,C trokuta ABC sa v_A, v_B, v_C. Neka je d (A,B) = c, d (B,C) = a, d (C,A) = b.

Iz uvjeta zadatka slijedi

$$v_C = v_A + v_B \qquad /1/$$

Kako je $v_C = \frac{2P}{c}$, $v_A = \frac{2P}{a}$, $v_B = \frac{2P}{b}$

pri čemu je P ploština trokuta ABC, to je zbog /1/

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

tj. $\quad c = \frac{ab}{a+b} \qquad /2/$

Pretpostavimo sada da postoji trokut ABC za koji je a=6 i vrijedi /2/, pri čemu su b, c različiti prirodni brojevi (trokut ABC je raznostraničan).
Postoje samo tri para različitih prirodnih brojeva b,c (različitih medjusobno i od a), za koje vrijedi

$$c = \frac{6 \cdot b}{6+b}.$$

To su

$$b = 3, \quad c = 2$$
$$b = 12, \quad c = 4$$
$$b = 30, \quad c = 5$$

Medjutim, kako je

$$3 + 2 < 6, \quad 6 + 4 < 12, \quad 6 + 5 < 30,$$

to doista ne postoji raznostraničan trokut ABC koji ispunjava početni uvjet /1/, a kojemu je $a=6$ i b, c prirodni brojevi.

5. Neka je S zbroj svih 10000 brojeva koji su upisani u promatranu mrežu.
   Tada je

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{100}$$

i

$$S = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{100}$$

Stoga je

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) + \dots + (a_{100} - b_{100}) =$$
$$= (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{100}) - (b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{100}) =$$
$$= S - S =$$
$$= 0.$$

IX SAVEZNO NATJECANJE MLADIH MATEMATIČARA
UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA

ZADACI - VIII RAZRED

Portorož, 4.6.1978.

1. Posuda je napunjena stopostotnim alkoholom. Odlijemo 2 litre alkohola i dolijemo isto toliko destilovane vode. Ovaj postupak ponovimo još jednom, tj. odlijemo 2 litre mješavine i dolijemo 2 litre destolovane vode. Na taj način u posudi dobivamo 36% otopinu (rastvor) alkohola. Koliko litara otopine sadrži ova posuda?

2. Neki trocifreni (troznamenkasti) broj 33 puta je veći od zbira (zbroja) svojih cifara (znamenaka).
Dokazati da je taj broj djeljiv sa 9. Zatim, odrediti taj trocifreni broj.

3. Iz kruga dužine poluprečnika (duljine polumjera) r izrezan je upisani jednakostranični trougao (trokut). Pomoću r izraziti površinu i zapreminu (oplošje i volumen) tijela koje nastaje rotacijom preostalog dijela kruga oko jedne svoje ose simetrije.

4. Zadane su dvije kružnice, obje duljine polumjera (dužine poluprečnika) r, koje se dodiruju izvana.
Konstruiraj pravac (pravu) koji siječe obje kružnice tako da one na njemu odredjuju tri dužine (duži) jednake duljine (dužine). Konstrukciju obrazložiti.

5. U kvadratnoj mreži loo puta loo upisano je bilo kojih deset hiljada brojeva.
Označimo sa a_1 zbir (zbroj) brojeva prve vrste (retka), sa a_2 zbir brojeva druge vrste, sa a_3 zbir brojeva treće vrste itd., sa a_{100} zbir brojeva stote vrste.
Dalje, označimo sa b_1 zbir brojeva prve kolone (stupca), sa b_2 zbir brojeva druge kolone, sa b_3 zbir brojeva treće kolone, itd., sa b_{100} zbir brojeva stote kolone.
Odrediti brojnu vrednost izraza:
$(a_1 - b_1)+(a_2 - b_2)+(a_3 - b_3) + \dots +(a_{100} - b_{100})$

Rješenja:

1. Neka je x (u litrama) tražena količina otopine. Na početku je posuda napunjena sa x litara alkohola. Odlijevanjem 2 litre, ostaje x-2 litre alkohola. Dolijevanjem vode, u x litara otopine imamo x-2 litre alkohola, tj. u jednoj litri otopine je $\frac{x-2}{x}$ litara alkohola. Odliju li se 2 litre otopine, odlije se $2\,\frac{x-2}{x}$ alkohola i dobiva 36% otopina.
Dakle, u 36% otopini je $x - 2 - 2\,\frac{x-2}{x}$ čistog alkohola, a to znači da vrijedi

$$x-2-2\,\frac{x-2}{x}=\frac{36x}{100}$$

tj. $$(x-2)(1-\frac{2}{x})=\frac{36x}{100}$$

tj. $$(x-2)(x-2)=\frac{36x^2}{100}$$

tj. $$(x-2)^2=\frac{36x^2}{100}$$

tj. $$x-2=\pm\frac{6}{10}\,x$$

i slijede dva rješenja

$$x=5 \qquad \text{i} \qquad x=\frac{5}{4}$$

Druga mogućnost otpada jer u prvom odlijevanju uzimamo 2 litre alkohola.
Dakle, u posudi je 5 litara otopine.

2. Neka je traženi broj x. Označimo njegove znamenke sa a (stotice), b (desetice) i c (jedinice).
Tada je

$$x = 100a + 10b + c$$

i vrijedi

$$x = 33\,(a + b + c)$$

pa je

$$100a + 10b + c = 33\,(a + b + c) \quad /1/$$

Kako $3 \mid 33\,(a + b + c)$

to zbog /1/ $3 \mid 100a + 10b + c$

tj. $3 \mid x$

tj. $3 \mid (a + b + c)$

tj. $9 \mid 33\,(a + b + c)$

pa zbog /1/ $9 \mid x$

a to je valjalo i pokazati.

Osim toga zaključujemo da

$$9 \mid (a + b + c)$$

pa zbog

$$0 < a \leq 9, \quad 0 \leq b \leq 9, \quad 0 \leq c \leq 9,$$

imamo samo ove tri mogućnosti

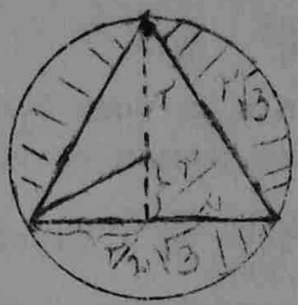
$$a + b + c = 9$$
$$a + b + c = 18$$
$$a + b + c = 27$$

Kako je

$$33 \cdot 9 = 297 \neq 33 \cdot (2 + 9 + 7)$$
$$33 \cdot 18 = 594 = 33 \cdot (5 + 9 + 4)$$
$$33 \cdot 27 = 891 \neq 33 \cdot (8 + 9 + 1)$$

to je traženi broj 594.

3.

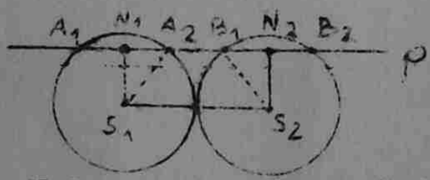


Označimo oplošje tijela s O, a volumen s V. Tada je

$$O = 4r^2\pi + \left(\frac{r}{2}\sqrt{3}\right)^2\pi + \frac{r}{2}\sqrt{3} \cdot r\sqrt{3} \cdot \pi$$
$$= \frac{25}{4} r^2$$

$$V = \frac{4}{3} r^3\pi - \frac{1}{3}\left(\frac{r}{2}\sqrt{3}\right)^2 \cdot \pi \cdot \frac{3}{2} r =$$
$$= \frac{23}{24} r^2\pi$$

4.



Neka su S_1, S_2 središta promatranih kružnica.

Uočimo pravac p koji siječe obje kružnice u po dvije točke A_1, A_2 i B_1, B_2. Pretpostavimo da je p traženi pravac tj. da je

$$d(A_1, A_2) = d(A_2, B_1) = d(B_1, B_2) = x$$

Neka su N_1, N_2 nožišta okomica spuštenih iz S_1, S_2 na p. Tada je N_1 polovište dužine A_1A_2, N_2 polovište dužine B_1B_2. Kako su trokutovi $S_1N_1A_2$ i $S_2N_2B_1$ sukladni (pravokutni trokutovi koji se podudaraju u kateti i hipotenuzi), to je

$$d(N_1, S_1) = d(N_2, S_2).$$

Dakle, $S_1S_2N_2N_1$ je pravokutnik.

To znači da je traženi pravac paralelan sa S_1S_2 i vrijedi

$$\frac{x}{2} + x + \frac{x}{2} = 2r$$

tj. $$x = r.$$

Stoga je

$$d\,(S_1,N_1) = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = \frac{r}{2}\sqrt{3}.$$

Traženi pravac je paralelan s pravcem S_1S_2 i udaljen od njega za $\frac{r}{2}\sqrt{3}$ /konstruira se pomoću pravokutnog trokuta kojemu je duljina jedne katete $\frac{r}{2}$, a hipotenuze r/.

Postoje uvijek (točno!) dva rješenja.

5. Vidi rješenje petog zadatka za VII razred.