Zahvaljujem Društvu matematičara Srbije (http://www.dms.org.rs/) i njegovom predsjedniku dr. Zoranu Kadelburgu na dopuštenju da iz časopisa "Matematički list za učenike osnovne škole" skeniram stranice koje sadrže zadatke i rješenja s republičkih natjecanja (SR Hrvatke) i saveznih natjecanja (SFRJ) i skenove objavim na web stranici http://public.carnet.hr/mat-natj .

Antonija Horvatek
http://public.carnet.hr/~ahorvate/

MATEMATIČKI LIST

ZA UČENIKE OSNOVNE ŠKOLE

XIV

1

BEOGRAD
1979.

SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATIČARA, FIZIČARA I ASTRONOMA
JUGOSLAVIJE

MATEMATIČKI LIST

za učenike osnovne škole

God. XIV, broj 1 (1979)

Izlazi šest puta godišnje

IZDAJE DRUŠTVO MATEMATIČARA, FIZIČARA I ASTRONOMA
SR SRBIJE
Beograd, Knez Mihailova 35/IV, p. p. 728.

Oslobođeno plaćanja poreza na promet na osnovu rešenja Republičkog sekretarijata za kulturu SR Srbije br. 413-186-03 od 11. 1. 1973. godine

Štampa: Beogradski izdavačko-grafički zavod, Beograd, Bul. vojvode Mišića br. 17

1979. - savezno natjecanje - 7. i 8. razred
Matematički list za učenike osnovne škole
http://www.dms.org.rs/index.php?action=matematicki_list
http://public.carnet.hr/mat-natj

ZADACI SA X SAVEZNOG TAKMIČENJA

VII RAZRED

1. Strijelac gađa u metu i za svaki uspješni pogodak dobiva 5 bodova, a za svaki promašaj oduzimaju mu se 3 boda. Kako je očito imao loš dan, strijelac je nakon serije hitaca, kojih je bilo više od 10, a manje od 20, postigao točno n u l a bodova. Koliko hitaca je bilo u toj seriji i koliko je od njih bilo uspešnih?

2. Prirodni broj a nije djeljiv brojem 5. Odrediti ostatak koji se dobije pri dijeljenju broja a^4 brojem 5.

3. Izračunati vrednost izraza:

$$A=\frac{1\cdot 2\cdot 4+2\cdot 4\cdot 8+3\cdot 6\cdot 12+\ldots+100\cdot 200\cdot 400}{1\cdot 3\cdot 9+2\cdot 6\cdot 18+3\cdot 9\cdot 27+\ldots+100\cdot 300\cdot 900}$$

4. U četvorouglu (četverokutu) $ABCD$ nejednakih stranica dijagonale AC i BD seku se u tački O. Ako su površine trouglova (ploštine trokuta) ADO i BCO jednake, dokazati da je dati četvorougao trapez.

5. Nad hipotenuzom pravouglog trougla (pravokutnog trokuta) konstruisan je kvadrat koji ne sadrži teme (vrh) pravog ugla (kuta) datog trougla. Dokazati da simetrala pravog ugla datog trougla sadrži centar kvadrata.

VIII RAZRED

1. Na nekoj svečanoj večeri šef sale je dobio zadatak da oko jednog okruglog stola rasporedi četiri muškarca i izvjestan broj žena, i to na taj način da ni jedna žena ne sjedi pored druge žene, te da se nasuprot (dijametralno) svake osobe nalazi osoba suprotnog spola. Da li je šef sale uspio načiniti takav raspored? Obrazložiti odgovor.

2. Na čelu kolone biciklističke trke nalaze se biciklisti Aca i Bora, vozeći jedan pored drugog. Oni su toliko odmakli ostalim učesnicima trke, da ih do cilja niko ne može stići. 20 km pred ciljem Aci pukne guma. Bora je nastavio da vozi do cilja sa prosečnom brzinom od 40 km/h. Aca je zbog popravke gume izgubio 3 minuta, a onda je do cilja vozio sa prosečnom brzinom od 45 km/h. Ko je pobedio u trci i sa koliko metara prednosti?

3. Dat je izraz $\sqrt{x^2+y^2-z^2-2xy}$. Ako je $x=361\,979$, $z=561\,980$, odrediti sve vrijednosti za y, za koje dati izraz poprima najmanju moguću vrijednost.

4. Prave (pravci): $x-y=-1$; $x+y=8$ i $x-2y=2$ i obe koordinatne ose formiraju petougao (peterokut). Odredi zapreminu (volumen) rotacionog tijela koje nastaje rotacijom tog petougla oko apscisne ose.

5. Trapez ima površinu (ploštinu) 80 cm² i dužinu (duljinu) visine 8 cm. Središte srednje linije (polovište središnjice) trapeza udaljeno je od jednog kraka 3 cm, a od drugog 4 cm. Izračunati dužine osnovica tog trapeza.

Rešenja zadataka

VII RAZRED

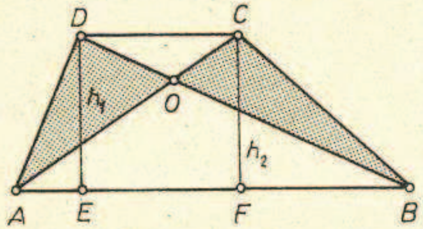
1. Ako je strelac imao m pogodaka i n promašaja, tada je $5m-3n=0$ i $10<m+$ $+n<20$. Jedini par prirodnih brojeva koji zadovoljava ova dva uslova je $m=6$, $n=10$. Dakle, strelac je ispalio 16 hitaca, od kojih 6 u metu.

2. Broj a koji nije deljiv sa 5, može se predstaviti kao $5k\pm 1$ ili $5k\pm 2$. Kvadrat ovog broja je: $a^2=(5k\pm 1)^2=25k^2\pm 10k+1=5(5k^2\pm 2k)+1=5m+1$, ili $a^2=$ $=(5k\pm 2)^2=25k^2\pm 20k+4=5(5k^2\pm 4k)+4=5n+4$. Ako kvadriramo još jednom dobićemo: $a^4=(5m+1)^2=25m^2+10m+1$, ili $a^4=(5n+4)^2=25n^2+40n+16$. U oba slučaja vidimo, ako a^4 podelimo sa 5, dobićemo ostatak 1.

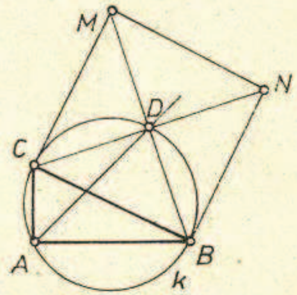
3. Svi sabirci u brojiocu (brojniku) deljivi su sa $1\cdot 2\cdot 4$, a u imeniocu (nazivniku) svi sabirci su deljivi sa $1\cdot 3\cdot 9$. Ako izvršimo izvlačenje pred zagradu zajedničkog faktora i skraćivanje, dobićemo:

$$A=\frac{1\cdot 2\cdot 4\,(1+2^3+3^3\cdots+100^3)}{1\cdot 3\cdot 9\,(1+2^3+3^3+\cdots+100^3)}=\frac{1\cdot 2\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 9}=\frac{8}{27}.$$

4. Ako uz trouglove AOD i BOC, jednakih površina, dodamo trougao ABO, dobićemo trouglove ABD i ABC, koji takođe imaju jednake površine: $P_{ABD}=P_{ABC}$. Dakle $\frac{1}{2}AB\cdot h_1=\frac{1}{2}AB\cdot h_2$ (sl. 1), a odavde je $h_1=h_2$, tj. $DE=CF$. Samim tim, četvorougao $CDEF$ je pravougaonik (pravokutnik), pa je $DC\|AB$. Zbog nejednakosti stranica AB i CD izlazi da je četvorougao $ABCD$ trapez.



Sl. 1



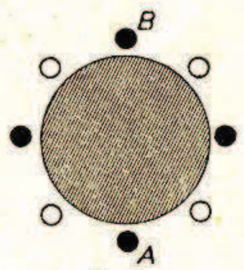
Sl. 2

5. Neka je A teme pravog ugla, $BCMN$ kvadrat i O centar kvadrata. Dokazaćemo da je prava (pravac) AO simetrala ugla BAC — sl. 2. Kako je ugao BOC prav, sledi da krug k, opisan oko trougla ABC, sadrži tačku O. Tetive CO i BO jednake su među sobom, kao polovine dijagonala kvadrata, pa su periferijski uglovi BAO i CAO nad ovim tetivama jednaki. Zbog toga prava AO polovi ugao BAO.

1979. - savezno natjecanje - 7. i 8. razred
Matematički list za učenike osnovne škole
http://www.dms.org.rs/index.php?action=matematicki_list
http://public.carnet.hr/mat-natj

VIII RAZRED

1. Da bi nasuprot svakog od 4 muškarca sedela žena, moraju se za stolom rasporediti tačno 4 žene, i to tako da između svake dve žene bude po jedan muškarac. Neka je AB jedan prečnik (dijametar) okruglog stola (sl. 3). Ako je A muškarac, B je žena. Međutim, levo i desno od prečnika AB moraju sedeti po 3 osobe. No, tada B mora biti muškarac, što protivreči uslovu da dijametralno suprotno muškarcu sedi žena. Dakle, šef sale nije uspeo da načini traženi raspored gostiju.



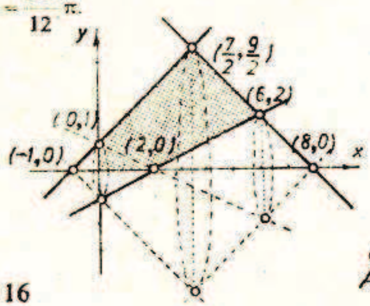
Sl. 3

2. Bora je vozio do cilja $\frac{20}{40}=0{,}5$ časova, odnosno 30 minuta. Aci je bilo potrebno $\frac{20}{45}$ časova i još 3 minuta, odnosno ukupno $\frac{89}{3}$ minuta. Vidimo da je pobednik Aca, jer je stigao za $\frac{1}{3}$ minuta, tj. za 20 sekundi, pre Bore. Za tih 20 sekundi Bori je ostalo da pređe još $\frac{1}{180}\cdot 40=\frac{2}{9}$ km. Aca je prošao cilj sa prednošću od 222,2 metra.

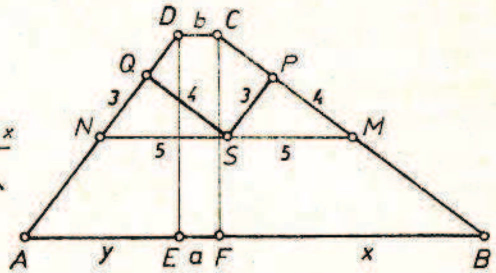
3. Najmanja vrednost datog kvadratnog korena je 0. Dakle, mora bit $x^2+y^2-z^2+2xy=0$, a kako je $x^2+y^2+2xy=(x+y)^2$, sledi da mora biti $(x+y)^2-z^2=0$, odnosno $(x+y)^2=z^2$. Odavde dobijamo $x+y=z$, ili $x+y=-z$, tj. $y=z-x$, ili $y=-z-x$. Tražene vrednosti za y su 200 001 ili —923 959.

4. Dobijeni petougao je osenčen na sl. 3. Koordinate temena (vrhova) dobijaju se u presecima odgovarajućih pravih. Na primer, tačka (0,1) je presek y-ose ($x=0$) i prave $x-y=-1$; koordinate tačke $\left(\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right)$ dobijamo rešavajući sistem jednačina $x-y=-1$, $x+y=8$ itd.

Traženu zapreminu dobićemo ako od dvostruke kupe poluprečnika (konusa radijusa) $\frac{9}{2}$ i visine 9 oduzmemo dvostruku kupu poluprečnika 2 i visine 6 i kupu poluprečnika 1 i visine 1 (levo od y-ose): $V=\frac{1}{3}\left(\frac{9}{2}\right)^2\pi\cdot 9-\frac{1}{3}\cdot 2^2\,\pi\cdot 6-\frac{1}{3}\cdot 1^2\pi\cdot 1=\frac{629}{12}\pi$.



Sl. 3



Sl. 4

5. Neka je $SP=3$ cm i $SQ=4$ cm (sl. 1). Iz površine trapeza dobijamo $P=m\cdot h$, odnosno $80=m\cdot 8$, odakle je srednja linija trapeza $m=10$. Dakle, $a+b=20$ cm, a pravougli trouglovi (pravokutni trokuti) SMP i SNQ imaju hipotenuze 5 cm. Pomoću Pitagorine teoreme izračunamo da je $MP=4$ cm i $NQ=3$ cm. Pravougli trouglovi SMP i BCF slični su, jer su uglovi (kutovi) kod M i B jednaki, kao uglovi sa paralelnim kracima. Iz sličnosti ovih trouglova dobijamo proporciju $SP:MP=CF:BF$, odnosno $3:4=8:x$, pa je $x=\frac{32}{2}$. Na isti način, iz sličnosti trouglova NQS i AED dobijamo proporciju $SQ:QN=DE:AE$, tj. $4:3=8:y$, odakle je $y=6$. Kako je četvorougao (četverokut) $CDEF$ paralelogram, sledi da je $EF=CD=b$, pa je $x+y=a-b$. Sada dobijamo sistem linearnih jednačina: $a-b=\frac{32}{3}+6$, $a+b=20$.

20. Rešenje ovog sistema određuje tražene osnovice trapeza: $a=\frac{55}{3}$, $b=\frac{5}{3}$.

XVI. SAVEZNO NATJECANJE ZA UČENIKE OSNOVNIH ŠKOLA
SFRJ
1979. godina

VII RAZRED

1. Strijelac gađa u metu i za svaki uspješni pogodak dobiva 5 bodova, a za svaki promašaj oduzimaju mu se 3 boda. Kako je očito imao loš dan, strijelac je nakon serije hitaca, kojih je bilo više od 10 a manje od 20, postigao točno nula bodova.
Koliko hitaca je bilo u toj seriji i koliko je od njih bilo uspješnih?

2. Prirodni broj a nije djeliv brojem 5. Odredi ostatak koji se dobije pri djeljenju broja a^4 brojem 5.

3. Izračunaj vrijednost izraza:

$$A = \frac{1\bullet2\bullet4+2\bullet4\bullet8+3\bullet6\bullet12+...+100\bullet200\bullet400}{1\bullet3\bullet9+2\bullet6\bullet18+3\bullet9\bullet27+...+100\bullet300\bullet900}$$

4. U četverokutu ABCD nejednakih stranica dijagonale AC i BD sijeku se u točki O. Ako su površine trokuta ADO i BCO jednake, dokazati da je dani četverokut trapez.

5. Nad hipotenuzom pravokutnog trokuta konstruiran je kvadrat koji ne sadrži vrh pravog kuta danog trokuta. Dokazati da simetrala pravog kuta danog trokuta sadrži centar kvadrata.

XVI. SAVEZNO NATJECANJE ZA UČENIKE OSNOVNIH ŠKOLA
SFRJ
1979. godina

VIII RAZRED

1. Na nekoj svečanoj večeri šef sale je dobio zadatak da oko jednog okruglog stola rasporedi četiri muškarca i izvjestan broj žena, i to na taj način da nijedna žena ne sjedi pored druge žene, te da se nasuprot (dijametralno) svake osobe nalazi osoba suprotnog spola. Je li šef sale uspio napraviti takav raspored? Obrazložiti odgovor.

2. Na čelu kolone biciklističke trke nalaze se biciklisti Aca i Bora, vozeći jedan pored drugoga. Oni su toliko odmakli ostalim sudionicima trke, da ih do cilja nitko ne može stići. 20 km pred ciljem Aci pukne guma. Bora je nastavio voziti do cilja s prosječnom brzinom od 40km/h. Aca je zbog popravka gume izgubio 3 minute, a onda je do cilja vozio prosječnom brzinom od 45km/h. Tko je pobijedio u trci i sa koliko metara prednosti?

3. Dan je izraz $\sqrt{x^2+y^2-z^2-2xy}$. Ako je x=361 979, z=561 980, odrediti sve vrijednosti za y, za koje dati izraz poprima najmanju moguću vrijednost.

4. Pravci: x-y=-1; x+y=8 i x-2y=2 i obje koordinatne osi formiraju peterokut.Odredi volumen rotacionog tijela koje nastaje rotacijom tog peterokuta oko osi apscisa.

5. Trapez ima površinu 80cm² i duljinu visine 8 cm. Polovište srednjice trapeza udaljeno je od jednog kraka 3 cm, a od drugogog 4 cm. Izračunati duljine osnovica tog trapeza.

Rješenja zadataka

XVI. SAVEZNO NATJECANJE ZA UČENIKE OSNOVNIH ŠKOLA
SFRJ
1979. godina

VII RAZRED

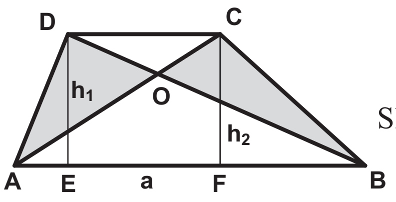
1. Ako je strijelac imao m pogodaka i n promašaja, tada je $5m-3n=0$ i $10<m+n<20$. Jedini par prirodnih brojeva koji zadovoljava ova dva uvjeta je $m=6$, $n=10$. Dakle, strijelac je ispalio 16 hitaca, od kojih 6 u metu.

2. Broj a koji nije djeljiv s 5, može se predstaviti kao $5k \pm 1$ ili $5k \pm 2$. Kvadrat ovog broja je: $a^2=(5k\pm1)^2=25k^2\pm10k+1=5(5k^2\pm2k)+1=5m+1$ ili $a^2=(5k\pm2)^2=25k^2\pm20k+4=5(5k^2\pm4k)+4=5n+4$. Ako kvadriramo još jednom dobit ćemo: $a^4=(5m+1)^2=25m^2+10m+1$, ili $a^4=(5n+4)^2=25n^2+40n+16$. U oba slučaja vidimo, ako a^4 podijelimo sa 5, dobit ćemo ostatak 1.

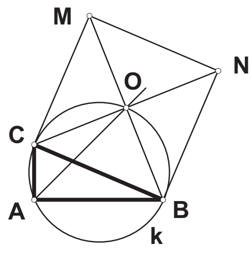
3. Svi pribrojnici u brojniku djeljivi su s $1\cdot2\cdot4$, a u nazivniku svi pribrojnici su dijeljivi s $1\cdot3\cdot9$. Ako izvršimo izvlačenje pred zagradu zajedničkog faktora i skraćivanje, dobit ćemo:

$$A=\frac{1\bullet2\bullet4(1+2^3+3^3+...100^3)}{1\bullet3\bullet9(1+2^3+3^3+...100^3)}=\frac{1\bullet2\bullet4}{1\bullet3\bullet9}=\frac{8}{27}.$$

4. Ako uz trokute AOD i BOC, jednakih površina, dodamo trougao ABO, dobit ćemo trokute ABD i ABC, koji također imaju jednake površine: $P_{ABD}=P_{ABC}$.
Dakle $\frac{1}{2}AB\cdot h_1=\frac{1}{2}AB\cdot h_2$ (sl. 1), a odavde je $h_1=h_2$, tj. DE=CF. Samim tim, četverokut CDEF je pravokutnik, pa je $DC \parallel AB$. Zbog nejednakosti stranica AB i CD izlazi da je četverokut ABCD trapez.



Sl. 1



Sl. 2

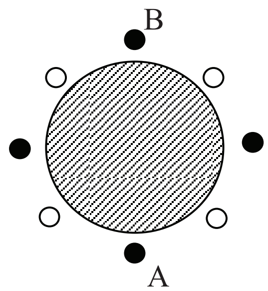
5. Neka je A vrh kod pravog kuta, BCMN kvadrat i O centar kvadrata. Dokazat ćemo da je pravac AO simetrala kuta BAC - sl.2. Kako je kut BOC pravi, slijedi da krug k, opisan oko trokuta ABC, sadrži točku O. Tetive CO i BO jednake su među sobom, kao polovine dijagonala kvadrata, pa su obodni kutovi BAO i CAO nad ovim tetivama jednaki. Zbog toga pravac AO raspolavlja kut BAO.

Rješenja zadataka

XVI. SAVEZNO NATJECANJE ZA UČENIKE OSNOVNIH ŠKOLA
SFRJ
1979. godina

VIII RAZRED

1. Da bi nasuprot svakog od 4 muškarca sjedila žena, moraju se za stolom rasporediti točno 4 žene, i to da između svake dvije žene bude po jedan muškarac. Neka je AB jedan promjer (dijametar) okruglog stola (sl.3). Ako je A muškarac, B je žena. Međutim, lijevo i desno od promjera AB moraju sjediti po 3 osobe. No, tada B mora biti muškarac, što proturječi uvjetu da dijametralno suprotno muškarcu sjedi žena. Dakle, šef sale nije uspio načiniti traženi raspored gostiju.



Sl. 3

2. Bora je vozio do cilja $\frac{20}{40}$ =0,5 sati, odnosno 30 minuta. Aci je bilo potrebno $\frac{20}{45}$ sati i još 3 minute, odnosno ukupno $\frac{89}{3}$ minuta. Vidimo da je pobjednik Aca, jer je stigao za $\frac{1}{3}$ minute, tj. za 20 sekundi prije Bore. Za tih 20 sekundi Bori je ostalo da prijeđe još $\frac{1}{180} \cdot 40 = \frac{2}{9}$ km. Aca je prošao cilj s prednošću od 222,2 metra.

3. Najmanja vrijednost datog kvadratnog korijena je 0. Dakle, mora biti ,slijedi da mora biti $x^2 + y^2 - z^2 - 2xy = 0$, a kako je $x^2 + y^2 + 2xy = (x+y)^2$, slijedi da mora biti $(x+y)^2 - z^2 = 0$, odnosno $(x+y)^2 = z^2$. Odavde dobivamo x+y=z, ili x+y=-z, tj. y=z-x, ili y=-z-x. Tražene vrijednosti za y su 200 001 ili -923 959.

4. Dobiveni peterokut je osjenčan ba sl.3. Koordinate vrhova dobivaju se u presjecima odgovarajućih pravaca. Na primjer, točka (0,1) je presjek y-osi (x=0) i pravca x-y=-1; koordinate točke $\left(\frac{7}{2},\frac{9}{2}\right)$ dobijamo rješavajući sistem jednadžbi x-y=-1, x+y=8 itd.

Traženi volumen dobit ćemo ako od dvostruke kupe polupręčnika (konusa radijusa) $\frac{9}{2}$ i visine 9 oduzmemo dvostruku kupu polupręčnika 2 i visine 6 i kupu polupręčnika 1 i visine 1 (lijevo od y-osi): V = $\frac{1}{3}\left(\frac{9}{2}\right)^2\pi\cdot 9-\frac{1}{3}\cdot 2^2\pi\cdot 6-\frac{1}{3}\cdot 1^2\pi\cdot 1=\frac{629}{12}\pi$.

5. **N**eka je SP=3 cm i SQ=4 cm (sl. 1). Iz površine trapeza dobijamo P=m·h, odnosno 80=m·8, odakle je srednja linija trapeza m=10. Dakle, a+b= 20 cm, a pravokutni trokuti SMP i SNQ imaju hipotenuze 5 cm. Pomoću Pitagorinog teorema izračunamo da je MP= 4 cm i NQ= 3 cm. Pravokutni trokuti SMP i BCF slični su, jer su kutovi kod M i B jednaki, kao kutovi s paralelnim kracima. Iz sličnosti ovih trokuta dobivamo proporciju SP:MP=CF:BF, odnosno 3:4=8:x, pa je x=$\frac{32}{3}$. Na isti način, iz sličnosti trokuta NQS i AED dobivamo proporciju SQ:QN=DE:AE,tj. 4:3=8:y, odakleje y= 6. Kako je četverokut CDEF paralelogram, slijedi da je EF=CD=b, pa je x+y=a-b. Sada dobivamo sustav linearnih jednadžbi: a-b=$\frac{32}{3}$+6, a+b=20.

Rješenje ovog sustava određuje tražene osnovice trapeza: a=$\frac{55}{3}$, b=$\frac{5}{3}$.