Zahvaljujem Društvu matematičara Srbije (http://www.dms.org.rs/) i njegovom predsjedniku dr. Zoranu Kadelburgu na dopuštenju da iz časopisa "Matematički list za učenike osnovne škole" skeniram stranice koje sadrže zadatke i rješenja s republičkih natjecanja (SR Hrvatke) i saveznih natjecanja (SFRJ) i skenove objavim na web stranici http://public.carnet.hr/mat-natj .

Antonija Horvatek
http://public.carnet.hr/~ahorvate/

48

MATEMATIČKI LIST

ZA UČENIKE OSNOVNE ŠKOLE

XV

2

40	1	2	3	42	41	46
38	31	13	14	32	35	12
39	30	26	21	28	20	11
43	33	27	25	23	17	7
6	16	22	29	24	34	44
5	15	37	36	18	19	45
4	49	48	47	8	9	10

BEOGRAD
1980.

SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATICARA, FIZIČARA I ASTRONOMA JUGOSLAVIJE

MATEMATIČKI LIST

za učenike osnovnih škola

God. XV, broj 2 (1980)

Izlazi šest puta godišnje

IZDAJE DRUŠTVO MATEMATIČARA, FIZIČARA I ASTRONOMA SR SRBIJE
Beograd, Knez Mihailova 35/IV, p. p. 728.

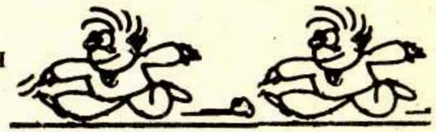
Oslobođeno plaćanja poreza na promet na osnovu rešenja Republičkog sekretarijata za kulturu SR Srbije br. 413-186-03 od 11. 1. 1973. godine

Štampa: Beogradski izdavačko-grafički zavod, Beograd, Bul. vojvode Mišića br. 17

MATEMATIČKA TAKMIČENJA

ZADACI SA REPUBLIČKOG NATJECANJA UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA SR HRVATSKE

održanog 9—11. svibnja 1980. u Splitu

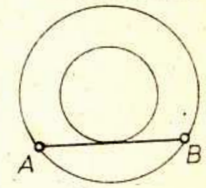


Kao i ranijih godina, natjecatelji su rješavali dvije skupine zadataka. Ovdje ćemo rešiti samo teže zadatke, koji sačinjavaju drugu skupinu.

VII RAZRED

1. Od 400 jednakih zlatnih šipki treba izliti dukate. Poznato je da se od svake šipke može izliti 10 dukata, pri čemu stanovita količina zlata preostane i to toliko da se od ostatka 20 šipki može izliti nova šipka jednaka prvotnim. Koliko se ukupno dukata može izliti iz danih 400 šipki?

2. Zadani su kružni vijenac i dužina AB kao na slici 1. Kolika je površina tog vijenca, ako je $d(A,B)=2$?



Sl. 1

3. Učenik je krenuo u školu između 8 i 9 sati ujutro i to u trenutku kada su se velika i mala kazaljka poklopile. Vratio se kući između 2 i 3 sata popodne u trenutku kada su kazaljke zatvarale ispružen kut. Koliko je vremena proteklo od polaska do povratka?

4. Zadane su točke A, M i N. Konstruiraj paralelogram kojem je A jedan vrh, a M i N polovišta dviju stranica. Koliko ima rješenja?

VIII RAZRED

1. Andrija i Boris izašli su istovremeno iz iste kuće i uputili se u istu školu. Borisov korak je za 10% kraći od Andrijinog, no zato on za isto vrijeme napravi 10% koraka više nego Andrija. Tko je prije stigao u školu?

2. U trapezu $ABCD$ s osnovkama AB i CD simetrala kuta pri vrhu B okomita je na stranicu AD i siječe je u točki E tako da je $d(A,E)=2 \,.\, d(D,E)$. U kojem omjeru dijeli simetrala BE ploštinu trapeza?

3. U razredu ima 20 dječaka. Četrnaestorica imaju smeđe oči, petnaestorica tamnu kosu, sedamnaestorica teže više od 40 kg, a osamnaestorica su viši od 160 cm. Dokazati da barem četvorica dječaka imaju sve navedene osobine.

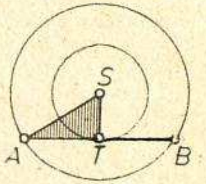
4. Izraziti volumen uspravne trostrane prizme pomoću duljine najdulje stranice osnovke, ako se kvadrati duljina stranica osnovke odnose kao $8 : 13 : 25$, a duljine dijagonala pobočki kao $7 : 8 : 10$.

Rješenja zadataka

VII RAZRED

1. Od 400 zlatnih šipki izliće se 4000 dukata i novih 20 šipki. Od novih 20 šipki izlićemo 200 dukata i još jednu šipku, od koje dobijemo još 10 dukata. Dakle, izliveno je ukupno 4210 dukata i preostalo je zlata za nešto više od pola dukata.

2. Uočimo pravokutni trokut AST na sl. 2. Ovdje je $R^2-r^2=1$. Površina P vijenca je: $P=\pi(R^2-r^2)$, odnosno $P=\pi$.



Sl. 2

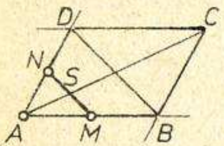
3. Označimo sa x broj minuta za koliko je prošlo 8 sati u prvom slučaju. Dok velika kazaljka prođe cio krug, mala prođe šezdeseti dio, a to je podeok koji odgovara jednoj minuti. Mala kazaljka startuje sa broja 8, tj. sa četrdesetog podeoka, a velika sa broja 12, tj. sa početnog položaja. U momentu poklapanja kazaljki važiće jednadžba: $40\frac{x}{60}=x$.

Odavde je $x=\frac{2400}{59}$.

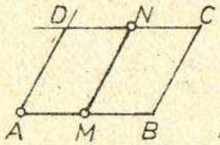
U drugom slučaju položaji kazaljki razlikuju se za 30 podjelaka, pa imamo jednadžbu: $10+\frac{y}{60}=y-30$, gdje smo sa y označili broj minuta poslije 2 sata, kada kazaljke zatvaraju ispružen kut. Odavde je $y=\frac{2400}{59}$. Dakle $x=y$, pa je od polaska u školu do povratka prošlo ravno 6 sati.

4. Razlikujemo 4 osnovna slučaja, čija su rješenja prikazana na slikama 3, 4, 5, i 6. Opisaćemo svaku od ovih konstrukcija, a čitaocu prepuštamo da zaključi koje smo osobine pri tome koristili.

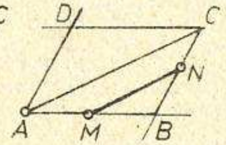
1) Konstruiramo polovište S dužine MN i produljimo dužinu AS do C, tako da je $AC=4\ AS$. Zatim, konstruiramo pravce AM i AN i točkom C paralelno njima CD i CB.



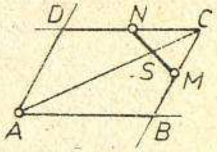
Sl. 3



Sl. 4



Sl. 5



Sl. 6

b) Konstruiramo točku B, tako da je $AB=2\ AM$. Zatim, točkama A i B konstriramo pravce paralelne sa MN i točkom N pravac paralelan sa AB.

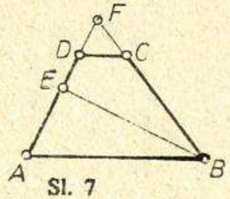
c) Konstruiramo dužinu AC paralelno sa MN, tako da je $AC=2\ MN$, itd.

d) Konstruiramo polovište S dužine MN i odredimo točku C tako da je $AC=\frac{4}{3}AS$, itd.

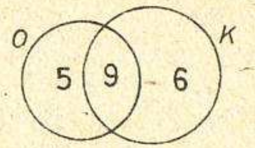
VIII RAZRED

1. Označimo sa A duljinu Andrijinog koraka. Tada je duljina Borisovog koraka $0{,}9A$. Dok Andrija načini jedan korak, Boris će načini 1,1 koraka i preći će put duljine $0{,}9A \cdot 1{,}1$, što iznosi $0{,}99A$. Dakle, Andirija se brže kreće i stići će u školu prije Borisa.

2. Ako produljimo krake trapeza, dobićemo istokračni trokut ABF i njemu podoban trokut CDF, pri čemu su stranice trokuta CDF četiri puta manjih duljina, (sl. 7). Zbog toga je ploština trokuta ABF ravno 16 puta veća od ploštine trokuta CDF. Sada je očigledno da je ploština trapeza simetralom BE podijeljena u omjeru 8 : 7.



Sl. 7



Sl. 8

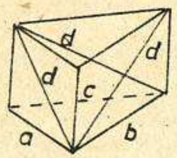
3. Od 14 učenika koji imaju smeđe oči, najviše petorica nemaju tamnu kosu, jer od ukupno 20, njih 15 sigurno imaju tamnu kosu. To se može lako uočiti na Venovim dijagramima skupa O učenika smeđih očiju i skupa K učenika tamne kose (sl. 8). Dakle, najmanje 9 dječaka imaju smeđe oči i tamnu kosu. Od ovih najviše trojica nisu teži od 40 kg, jer su njih 17 teži od 40 kg. Preostaje najmanje 6 dječaka koji imaju smeđe oči, tamnu kosu i teži su od 40 kg. Od ove šestorice najviše dvojica nisu viši od 160 cm. Preostala 4 dječaka sigurno imaju smeđe oči i tamnu kosu, a teži su od 40 kg i viši od 160 cm.

4. Na osnovu datih podataka možemo staviti da je: $a^2=8k^2$, $b=13k^2$ i $c^2=25k^2$, odnosno $c=5k$. Dalje je $d_1=7n$, $d_2=8n$, $d_3=10n$, gdje su sa d_1, d_2, d_3 označene dijagonale pobočki, kao na sl. 9. Da bismo izračunali ploštinu B osnovke, moramo naći duljinu v visine koja odgovara stranici c, (sl. 10). Iz pravokutnih trokuta BCD i ACD dobijamo: $a^2-x^2=v^2$ i $b^2-(c-x)^2=v^2$, odakle je $a^2-x^2=b^2-(c-x)^2$, odnosno $8k^2-x^2=13k^2-(5k-x)^2$ Rešenje po x posljednje jednadžbe je $x=2k$. Sada dobijamo: $v^2=8k^2-4k^2$, pa je $v=2k$. Dakle, osnovka ima ploštinu $B=\frac{1}{2}c\cdot v=5k^2$.

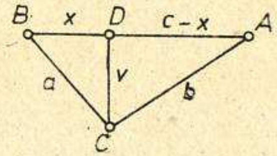
Visinu h prizme dobićemo iz uslova: $d_1^2:d_2^2=49:64$, odnosno $(a^2+h^2):(b^2+h^2)=49:64$. Smenjujući a^2 sa $8k^2$ i b^2 sa $13k^2$, dobićemo: $h^2=\frac{25k^2}{3}$, odakle je $h=\frac{5k}{\sqrt{3}}$.

1980. - republičko natjecanje - 7. i 8. razred
Matematički list za učenike osnovne škole
http://www.dms.org.rs/index.php?action=matematicki_list
http://public.carnet.hr/mat-natj

Volumen prizme je: $V = B \cdot h = 5k^2 \cdot \frac{5k}{\sqrt{3}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{125k^3}{\sqrt{3}} = \frac{(5k)^3}{5\sqrt{3}} = \frac{c^3}{\sqrt{3}}$.



Sl. 9



Sl. 10