REPUBLIČKO NATJECANJE
UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA SR HRVATSKE
1981. godina

VII RAZRED

Druga skupina zadataka

1. Odrediti takav prirodan broj n da je umnožak n·n·n·n šesteroznamenkast broj čija je posljednja znamenka 4.

2. Opseg jednakokračnog trapeza jednak je peterostrukoj duljini kraće baze, a dijagonala trapeza raspolavlja šiljasti kut tog trapeza. Koliki su kutovi trapeza?

3. Poznato je da je cijena dijamanta proporcionalna s kvadratom njegove težine. Prilikom brušenja nekog dijamanta otpao je komadić, tako da se cijena dijamanta smanjila za 36%. Koliki postotak ukupne težine je težio odlomljeni komadić?

4. Na dužini $\overline{AB}$ zadano je 10 točaka, od kojih su dvije po dvije simetrične s obzirom na polovište dužine $\overline{AB}$. Bilo kojih 5 od ovih točaka označimo sa C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, a ostale D_1, D_2, ..., D_5. Dokaži da je zbroj udaljenosti točaka C1, C2, ..., C5 od A jednak zbroju udaljenosti točaka D_1, D_2, ..., D_5 od B.

Rješenja zadataka

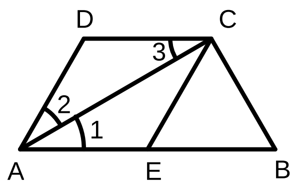
REPUBLIČKO NATJECANJE
UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA SR HRVATSKE
1981. godina

VII RAZRED

Druga skupina zadataka

1. Posljednja znamenka broja n^4 bit će 4 samo ako je posljednja znamenka broja n također 4. Traženi broj je 14, a 14^4 iznosi 537 824.

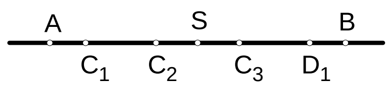
2. Ako dijagonala raspolavlja šiljlasti kut trapeza (sl.1),onda su kutovi 1 i 2 jednaki. Kutovi 1 i 3 su također jednaki među sobom kao naizmjenični. Stoga je trokut *ACD* jednakokračni, pa je krak c trapeza jednak kraćoj osnovici b. Iz uvjeta za opseg dobivamo jednadžbu: $a+b+2c=5b$, odnosno $a+b+2b=5b$, pa je $a=2b$. Neka je E točka veće osnovice, takva da je četverokutnik AECD paralelogram. Tada izlazi da je $d(A,E)=a$, pa je $d(E,B)=a$ i trokut *BCE* je jednakokračni. Dakle, kutovi trapeza su 60° i 120°.



Sl. 1

3. Cijena preostalog komada dijamanta je 0,64 puta cijena cijelog komada i srazmjerna je kvadratu od 0,8 dijela tog dijamanta. Dakle, odlomljeni komadić iznosi 20% od prvobitne težine dijamanta.

4. Ako je neka od točaka iz prve skupine simetrična nekoj točki iz druge skupine, kao točke C_1 i D_1 na sl.2, tada je na osnovnu simetričnosti u odnosu na polovište S dužine $\overline{AB}$ jednaka udaljenost prve točke od A sa udaljenošću druge točke od B,tj. $d(A,C_1)=d(B,D_1)$.



Sl. 2

Ako su u prvoj skupini dvije među simetrične točke, kao C_2 i C_3 na sl 2., tada je: $d(A,C_2)=d(B,C_3)$, a zbog $d(A,C_2)+d(B,C_2)=d(A,B)$ izlazi da je $d(A,C_2)+d(B,C_3)=d(A,B)$. Svakom paru simetričnih točaka iz prve skupine odgovaraju dvije također simetrične točke u drugoj skupini, pa je i kod njih zbroj udaljenosti od točaka A i B jednak d(A,B). Time je trvđenje dokazano, jer nije moguće izvršiti izbor točaka prve i druge skupine drugačije nego što je opisano u ova dva slučaja.

REPUBLIČKO NATJECANJE
UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA SR HRVATSKE
1981. godina

VIII RAZRED

Druga skupina zadataka

1. U akciji prikupljanja starog papira jedan učenik VII razreda skupio je 26 kg, a ostali iz njegova razreda po 11 kg svaki. U VIII razredu jedan je skupio 25 kg, a ostali po 10 kg svaki. Koliko ima učenika u svakom razredu, ako se zna da su oba razreda prikupila jednaku težinu papira i da je ukupna težina veća od 400 kg, a manja od 600 kg?

2. Zadan je kvadrat duljine stranice 1 cm i točka A udaljena 2,5 cm od središta kvadrata. Dokaži da ne postoji rotacija tog kvadrata oko jednog od njegovih vrhova takva da neki vrh padne u točku A.

3. Dokaži: U svakom trokutu ABC je udaljenost od ortocentra (sjecišta visina) do vrha A jednaka dvostrukoj udaljenosti od središta trokutu opisane kružnice do stranice $\overline{BC}$.

4. Osnovka piramide je kvadrat. Jedan od pobočnih bridova je okomit na ravninu, a duljina najduljeg pobočnog brida je 6 i on zatvara s osnovkom kut od 45°. Odredi volumen piramide.

Rješenja zadataka

REPUBLIČKO NATJECANJE
UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA SR HRVATSKE
1981. godina

VIII RAZRED

Druga skupina zadataka

1. Označimo broj učenika VII razreda sa a+1, a broj učenika VIII razreda sa b +1. Dobit ćemo jednadžbu: *26+11a=25+10b*, odakle je *1+11a=10 b*. Broj *10b* ima za posljednju znamenku nulu, pa *a* mora biti jedan od brojeva: 9, 19, 29, ...
Drugi uvjet, o ukupnoj težini zadovoljava jedino broj *a=19*, a u tom slučaju je *b=21*.
Dakle, u VII razredu bilo je 20 učenika, a u VIII dva više, tj. 22 učenika.

2. Prema sl. 3 vidimo da je $\overline{SN}+\overline{NA}\geq\overline{SA}$, na osnovu odnosa stranica trokuta. Pri tome bit će $\overline{SN}+\overline{NA}=\overline{SA}$ samo u slučaju kada točka N pripada dužini $\overline{SA}$ (vidjeti na sl. 3 dužinu $\overline{SA_1}$).
Tada je točka A najbliža vrhu kvadrata. U kvadratu je dijagonala: $\overline{NQ}=\overline{MN}\sqrt{2}=\sqrt{2}$, pa je $\overline{SN}+\overline{NA_1}=\overline{SA_1}$, odnosno $\frac{\sqrt{2}}{2}+\overline{NA_1}=2,5$. Odavde je $\overline{NA_1}=\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{5-\sqrt{2}}{2}$. Kako je $5>\sqrt{2}$, to je $\overline{NA_1}>\sqrt{2}$. Dužina $\overline{NA_1}$ veća je od dužina: $\overline{MN}$, $\overline{NQ}$ i $\overline{NP}$. Samim tim, ni pri najpovoljnijem položaju točke A_1, ne postoji mogućnost da se rotacijom oko N bilo koji vrh kvadrata poklopi s točkom A_1. Tim prije ne postoji ovakva rotacija oko nekog drugog udaljenijeg vrha kvadrata.

3. Neka je točka O ortocentar, a S središte trokutu opisane kružnice. Simetrala s stranice $\overline{BC}$ prolazi točkom S i polovištem A_1 stranice $\overline{BC}$. Dužina $\overline{AA_1}$ je težišnica i T težište trokuta. Pravac TS tzv. *Eulerov pravac,* sadrži ortocentar O. Pravci *AO* i A_1S usporedni su među sobom, pa su trokuti *OAT* i STA_1 slični. Zbog toga je $\overline{AO}:\overline{A_1S}=\overline{AT}:\overline{A_1T}$ *=2:1,* što se i tvrdilo.

4. Trokut SAE je jednakokračni pravokutni, pa je brid $\overline{SA}=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$. To je ujedno visina naše piramide. Dijagonala osnovke je dužina $\overline{AC}$, čija je duljina također $3\sqrt{2}$, a stranica kvadrata ima duljinu $\overline{AB}=\overline{AC}\frac{\sqrt{2}}{2}=3$. Volumen piramide je: $V=\frac{1}{3}\bullet 3^2\sqrt{2}=9\sqrt{2}$.