Zahvaljujem Društvu matematičara Srbije (http://www.dms.org.rs/) i njegovom predsjedniku dr. Zoranu Kadelburgu
na dopuštenju da iz časopisa "Matematički list za učenike osnovne škole" skeniram stranice koje sadrže
zadatke i rješenja s republičkih natjecanja (SR Hrvatke) i saveznih natjecanja (SFRJ)
i skenove objavim na web stranici http://public.carnet.hr/mat-natj .

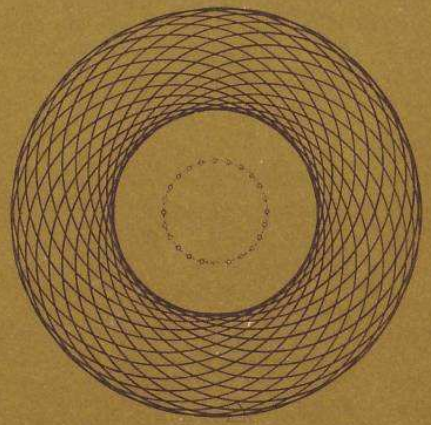
Antonija Horvatek
http://public.carnet.hr/~ahorvate/

MATEMATIČKI LIST

ZA UČENIKE OSNOVNE ŠKOLE

XVII

6



BEOGRAD
1983.

SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATIČARA, FIZIČARA I ASTRONOMA JUGOSLAVIJE

MATEMATIČKI LIST

za učenike osnovne škole

God. XVII, broj 6 (1983)

Izlazi šest puta godišnje

IZDAJE DRUŠTVO MATEMATIČARA SR SRBIJE

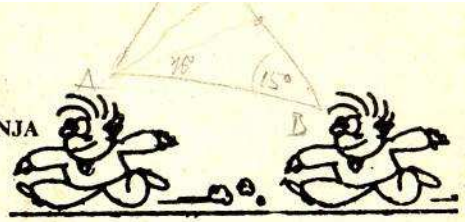
Beograd, Knez Mihailova 35/IV, p. p. 728.

Oslobođeno plaćanja poreza na promet na osnovu rešenja Republičkog sekretarijata za kulturu SR Srbije br. 413-186-03 od 11. 1. 1973. godine

Štampa: Beogradski izdavačko-grafički zavod, Beograd, Bul. vojvode Mišića br. 17

MATEMATIČKA TAKMIČENJA

ZADACI SA REPUBLIČKOG NATJECANJA UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA SR HRVATSKE



VII RAZRED

1. S koliko nula se završava produkt svih prirodnih brojeva od 1 do 49?

2. Dva su biciklista udaljena jedan od drugog 1800 m i voze se jedan prema drugome. Jedan prelazi 3 m, a drugi 5 m u sekundi. Poslije koliko sekundi će se sresti, ako

a) istodobno krenu;

b) brži biciklist krene 80 sekundi kasnije od sporijeg?

3. U trokutu ABC mjera kuta kod vrha B je 15°, a kod vrha C 30°. Okomica u vrhu A na stranicu AB presijeca BC u točki D. Dokazati da je $d(B, D) = 2\,d(A, D)$.

4. Tablica 5×5 popuni se brojevima iz skupa $\{-1, 0, 1\}$. Izračunaju se sume u pojedinim retcima, pojedinim stupcima i u obje glavne dijagonale. Koja se najveća, a koja najmanja vrijednost može pojaviti među tim sumama? Dokazati da se, kako god bila tablica popunjena, među svim sumama moraju naći barem dvije jednake.

VIII RAZRED

1. Svježe gljive sadrže 90% vode, a suhe 12% vode. Koliko se suhih gljiva dobiva od 22 kg svježih gljiva?

2. Nađi takva tri pozitivna realna broja da je jedan od njih aritmetička sredina ostala dva, a da je pri tome produkt dvaju manjih brojeva jednak $\frac{117}{2}$, a produkt dvaju većih brojeva jednak $\frac{207}{2}$.

3. Zadan je trokut ABC sa svojstvom da je $d(A, B)$ jednako duljini stranice jednakostraničnog trokuta upisanog u kružnicu K polumjera r, $d(B, C)$ jednako duljini stranice kvadrata upisanog u kružnicu K i $d(C, A)$ jednako duljini stranice pravilnog šesterokuta upisanog u K. Izraziti $d(A, B)$, $d(B, C)$, $d(C, A)$ pomoću r.

Dokazati da je ABC pravokutan trokut.

4. U pravokutnom trapezu $ABCD$ duljine osnovica su $d(A, B) = a$, $d(C, D) = b$, a duljina kraćeg kraka $d(A, D) = c$. Odrediti udaljenost sjecišta dijagonala trapeza od osnovice $\overline{AB}$ i od kraćeg kraka.

Rješenja zadataka

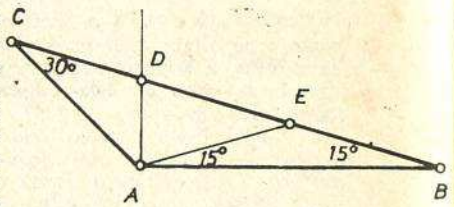
VII RAZRED

1. Nula u produktu nastaje množenjem $2 \cdot 5$. Kako je svaki drugi prirodni broj deljiv sa 2, a svaki peti sa 5, to će broj nula u produktu biti tačno jednak broju petica u rastavljanju produkta na proste činioce. Petice se pojavljuju u rastavljanju sledećih brojeva: 5, $10 = 2 \cdot 5$, $15 = 3 \cdot 5$, $20 = 2^2 \cdot 5$, $25 = 5^2$, $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, $35 = 5 \cdot 7$, $40 = 2^3 \cdot 5$ i $45 = 3^2 \cdot 5$. Dakle, ukupan broj petica je 10, pa se produkt svih prirodnih brojeva od 1 do 49 završava sa 10 nula.

2. a) Oba biciklista pređu zajedno 8 metara u sekundi. Srešće se poslije $1800:8$, t.j. poslije 225 sekundi.

b) Za 80 sekundi sporiji biciklista je prešao $80 \cdot 3$, to jest 240 metara, pa je do susreta ostalo još 1560 metara. Taj dio puta biciklisti će preći za 195 sekundi ($1\,568:8 = 195$). Do susreta je došlo, dakle, poslije 275 sekundi.

3. Konstruirajmo točku E na duljini BD, takvu da kut BAE iznosi $15°$, tj. da je $\sphericalangle BAE = \sphericalangle ABE$ (sl. 1). Zbog toga je trokut ABE jednakokračni i $d(A, E) = d(E, B)$. Izračunavanjem kuteva u trokutu ADE uvjerićemo se da je ovaj trokut jednakokračni, sa kutom od $30°$ kod vrha E. Odavde dobivamo jednakost: $d(A, E) = d(E, D)$. Dolazimo do zakjučka da je točka E polovište dužine BD i da je $d(B, D) = 2\,d(A, E)$. No, u trokutu ACE kutevi kod vrhova C i E su od $30°$, pa je i ovaj trokut jednakokračni i $d(A,E) = d(A, C)$. Otuda dolazimo do traženog uvjeta: $d(B, D) = 2\,d(A, C)$.



Sl. 1.

4. Najveća moguća suma je 5, a najmanja -5. Ako pretpostavimo da su zastupljene sve moguće kombinacije suma, onda takvih kombinacija ima najviše 11. (To su: $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$). Međutim, redaka ima 5, stubaca takođe 5, a dijagonale 2, tj. ima ukupno 12 zbrajanaja. Prema tome, ako su 11 zbrajanja dala sve različite sume, dvanaesto zbrajanje mora dati rezultat jednak jednoj od ovih suma.

VIII RAZRED

1. 22 kg svežih gljiva sadrže $0{,}1 \cdot 22 = 2{,}2$ kg potpuno suhe materije, a ova količina čini 88% od mase x kg suhih gljiva. Dakle, $0{,}88\,x = 2{,}2$ pa je $x = 2{,}2 : 0{,}88 = 2{,}5$ kg — toliko smo dobili suhih gljiva.

2. Traženi brojevi su: a, $\frac{a+b}{2}$ i b, $a < b$. Prema datim uvjetima je:

$a \cdot \frac{a+b}{2} = \frac{117}{2}$ i $\frac{a+b}{2} \cdot b = \frac{207}{2}$, odnosno $a^2 + ab = 117$ i $ab + b^2 = 207$. Zbrajanjem

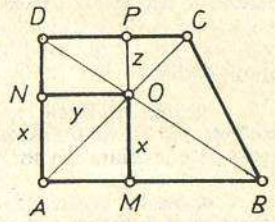
ovih jednakosti dobivamo: $a^2 + 2\,ab + b^2 = 324$, odnosno: $(a+b)^2 = 324$. Kako su a i b pozitivni brojevi, izlazi da je $a + b = 18$. Dalje, iz $a(a+b) = 117$, dobivamo $a = \frac{13}{2}$ i iz $(a+b)\,b = 207$, dobivamo: $b = \frac{23}{2}$. Traženi brojevi su: $\frac{13}{2}$, 9 i $\frac{23}{2}$.

3. Izračunavanjem stranice upisanih mnogokuta: jednakostraničnog trokuta, kvadrata i pravilnog šesterokuta u kružnicu K polumjera r, dobivamo:

$$d(A, B) = r\sqrt{3}, \quad d(B, C) = r\sqrt{2} \text{ i } d(C, A) = r.$$

Kako je $r^2 + (r\sqrt{2})^2 = 3\,r^2 = (r\sqrt{3})^2$, zaključujemo da je trokut ABC pravokntni, sa hipotenuzom AB.

4. Neka je O sjecište dijagonala, M, N i P nožišta okomica iz O na AB, AD, CD (sl. 2). Neka je $OM = x$, $ON = y$ i $OP = z$. Očigledno je $x + z = d$. Trokuti ABO i CDO su slični, pa je $a:b = x:z$, odakle je $z = \frac{bx}{a}$. Sada imamo jednažbu: $x + \frac{bx}{a} = d$, koja postaje; $ax + bx = ad$, odnosno: $x(a+b) = ad$. Rješenje ove jednadžbe: $x = \frac{ad}{a+b}$ je udaljenost točke O od osnovice AB.



Sl. 2

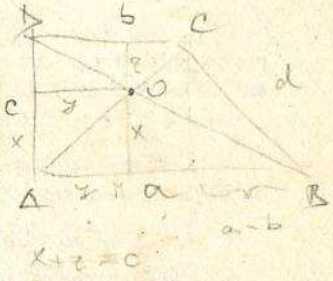
Lako se uočava da su trokuti AON i ACD slični, pa je $AN:ON = AD:CD$, odnosno $x:y = d:b$. Odavde je $y = \frac{b}{d}\,x$. Zamjenom nađene vrijednosti za x, dobivamo: $y = \frac{b}{d} \cdot \frac{ad}{a+b} = \frac{ab}{a+b}$, a to je tražena udaljenost točke O od kraka AD.

$d^2 = b^2 + (a-b)^2 = b^2 + a^2 - 2ab + b^2$

$d^2 = 2b^2 - 2ab + a^2$

$\triangle ABO \sim \triangle CDO$

$\frac{AB}{CD} = \frac{OB}{OD} = \frac{OA}{OC}$



$x + z = d$