Zahvaljujem Društvu matematičara Srbije (http://www.dms.org.rs/) i njegovom predsjedniku dr. Zoranu Kadelburgu
na dopuštenju da iz časopisa "Matematički list za učenike osnovne škole" skeniram stranice koje sadrže
zadatke i rješenja s republičkih natjecanja (SR Hrvatke) i saveznih natjecanja (SFRJ)
i skenove objavim na web stranici http://public.carnet.hr/mat-natj .

Antonija Horvatek
http://public.carnet.hr/~ahorvate/

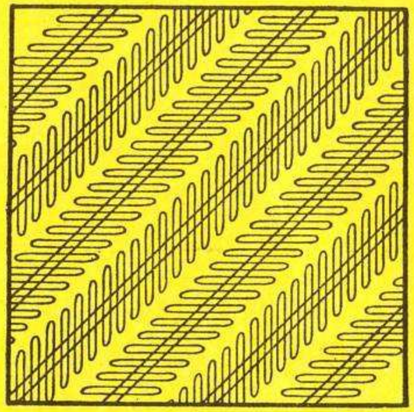
66

MATEMATIČKI LIST

ZA UČENIKE OSNOVNE ŠKOLE

XVIII

1



BEOGRAD
1983.

SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATIČARA, FIZIČARA I ASTRONOMA JUGOSLAVIJE

MATEMATIČKI LIST

za učenike osnovne škole

God. XVIII, broj 1 (1983)

Izlazi šest puta godišnje

IZDAJE DRUŠTVO MATEMATIČARA SR SRBIJE

Beograd, Knez Mihailova 35/IV, p. p. 728.

Oslobođeno plaćanja poreza na promet na osnovu resenja Republičkog sekretarijata za kulturu SR Srbije br. 413-186-03 od 11. 1. 1973. godine

Štampa: Beogradski izdavačko-grafički zavod, Beograd, Bul. vojvode Mišića br. 17

ZADACI SA XIV SAVEZNOG TAKMIČENJA

VII RAZRED

1. Jedne godine su 1. januar i 1. april pali u četvrtak. Koliko u toj godini ima meseci sa 5 petaka?

2. Razlika dvaju razlomaka je $\frac{1}{5}$. Brojilac (brojnik) prvog razlomka je tri puta veći od brojioca drugog razlomka, a imenilac (nazivnik) prvog razlomka je dva puta veći od imenioca drugog razlomka. Odrediti te razlomke.

3. Naći jedan prost (prim) trocifreni (troznamenkasti) broj čiji proizvod cifara (produkt znamenaka) je jednak 252.

4. Visine CD i AE trougla (trokuta) ABC seku se u tački H, tako da je $d(A, B) = d(C, H)$. Izračunati ugao (kut) ABC.

5. Dijagonale konveksnog četvorougla (četverokuta) $ABCD$ seku se u tački O i dele taj četvorougao na trouglove (trokute) OAB, OAC, OCD i ODA. Dokazati da je proizvod (produkt) površina (ploština) trouglova OAB i OAD jednak proizvodu površina trouglova OBC i ODA.

VIII RAZRED

1. Ako su a, b i c tri prirodna broja, dokazati da $(a^2+b^2+c^2)$ pri deljenju sa 8 ne može dati ostatak 7.

2. U tri kutije A, B i C nalaze se kuglice: u kutiji A su 2, u kutiji B su 3 i u kutiji C su 4 kuglice.

Dva igrača igraju sledeću igru: naizmenično uzimaju iz proizvoljne kutije proizvoljan broj kuglica. Pobednik je onaj igrač posle čijeg poteza sve kutije ostaju prazne. Kako treba da igra prvi igrač da bi sigurno pobedio svog protivnika?

3. Odrediti najmanji prirodan broj koji ima svojstvo da se smanji 57 puta ako mu ispustimo (izbrišemo) prvu znamenku (cifru) sleva.

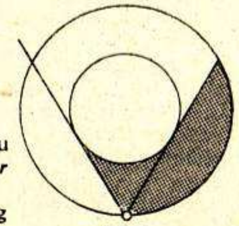
4. U unutrašnjosti proizvoljnog trougla (trokuta) ABC izabrana je bilo koja tačka M. Dužine (duljine) normala (okomica) iz tačke M na stranice BC, CA, AB označimo redom sa n_a, n_b, n_c. Dokazati da je:

$$\frac{n_a}{h_a}+\frac{n_b}{h_b}+\frac{n_c}{h_c}=1,$$

gde su h_a, h_b, h_c odgovarajuće visine trougla.

5. Poluprečnici (polumjeri) krugova koji obrazuju kružni prsten, prikazan na sl. 1, imaju dužine (duljine) r i $2r$.

Naći razmeru površina (omjer ploština) osenčenog dela kružnog prstena.



Sl. 1

Rešenja zadataka

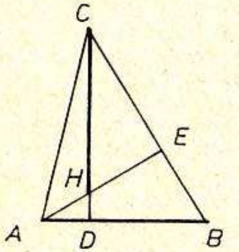
VII RAZRED

1. Od 1. januara do 1. aprila ima 91 ili 90 dana, zavisno od toga da li je godina prestupna ili nije. Da bi 1. januara i 1. aprila bio četvrtak, broj dana između ova dva datuma mora biti deljiv sa 7, a to je broj 91. Znači, godina je bila prestupna i imala je 366 dana. Zbog toga je u toj godini bilo 52 nedelje (sedmice) i 2 dana, što znači da je u njoj bilo 53 petka (jer je i 2. januar bio petak). Svaki mesec imao je 4 ili 5 petaka. Ako sa x označimo broj meseci sa 5 petaka, dobićemo jednačinu $5x+4(12-x)=53$. Odavde je $x=5$, što znači da je 5 meseci imalo po 5 petaka.

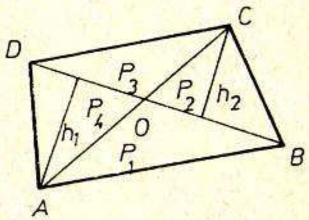
2. Ako je drugi razlomak $\frac{a}{b}$, prvi je $\frac{3a}{2b}$. Prema uslovu je $\frac{3a}{2b}-\frac{a}{b}=\frac{1}{5}$. Dakle: $\frac{a}{b}=\frac{2}{5}$. Prvi razlomak je $\frac{6}{10}$.

3. Rastavljanjem na proste činioce dobijamo: $252=2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot7$. Kombinujući činioce broja 252, dobijamo da cifre traženog broja mogu biti 4, 9, 7 ili 6, 6, 7. Traženi prost broj mora biti neparan, pa je to jedan od brojeva: 497, 947, 749, 479 667. Proveravanjem utvrđujemo da su brojevi 497 i 749 deljivi sa 7, a broj 667 je deljiv sa 23. Prosti brojevi koji ispunjavaju postavljene uslove su 947 i 479.

4. Uglovi BAE i BCD (sl. 1) jednaki su među sobom, kao uglovi sa normalnim kracima. Kako je $AB=CH$, to su pravougli trouglovi ABE i CHE podudarni, pa je $AE=CE$. Trougao ACE je pravougli, pa iz jednakosti kateta AE i CE sledi da je ugao ACE, tj. traženi ugao, jednak $45°$.



Sl. 1



Sl. 2

5. Označimo površine navedenih trouglova sa P_1, P_2, P_3, P_4. Neka su h_1 i h_2 normale iz A i C na BD. Tada je: $P_1=\frac{1}{2}\cdot BO\cdot h_1$, $P_2=\frac{1}{2}BO\cdot h_2$, $P_3=DO\cdot h_2$, $P_4=DO\cdot h_1$. Neposrednim izračunavanjem lako se uveravamo da je $P_1\cdot P_3=P_2\cdot P_4=\frac{1}{4}BO\cdot DO\cdot h_1\cdot h_2$.

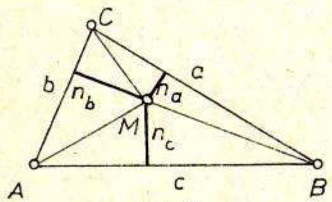
VIII RAZRED

1. Svaki prirodan broj može se izrazti u obliku: $4k$, $4k+1$, $4k+2$ ili $4k+3$, gde je k prirodan broj ili 0. U svakom od ovih slučajeva kvadrat broja se može izraziti kao: $16k^2=8(2k^2)$, $16k^2+8k+1=8(2k^2+k)+1$, $16k^2+16k+4=8(2k^2+2k)+4$, $16k^2+24k+9=8(2k^2+3k+1)+1$. Odavde zalključujemo da kvadrat bilo kog prirodnog broja, pri deljenju sa 8, može dati samo jedan od ostataka: 0, 1 i 4. Sabiranjem bilo koja 3 ostatka navedenog oblika ne može se dobiti zbir 7, pa ni zbir $(a^2+b^2+c^2)$ ne može pri deljenju dati ostatak 7.

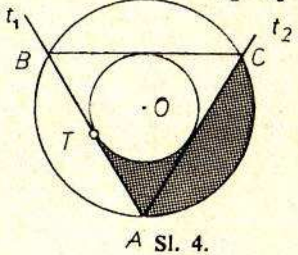
2. Prvi igrač treba da uzme iz kutije C 3 kuglice, tako da posle toga kutije sadrže redom: 2, 3 i 1 kuglicu. Dalje, ma kako postupio drugi igrač, prvi će udesiti da posle njegovog drugog poteza ostane jedna kutija prazna, a u ostalim dvema da bude jednak broj kuglica. Tako će sa sigurnošću pobediti drugog igrača.

3. Označimo sa a prvu cifru traženog broja, a sa b broj koji obrazuju preostale cifre. Tada je: $10a+b=57b$, gde je k prirodan broj, odnosno $10k=56b$ ili $10a=7\cdot8b$. Leva strana jednakosti mora biti deljiva sa 7, pa kako se 7 ne sadrži u $10k$ bez ostatka, izlazi da je $a=7$. Da bi broj 10^k bio manjanji i još deljiv sa 8, mora biti $k=3$. Tada je $b=125$. Traženi broj je 7 125. (Zaista, $57\cdot125=7\,125$).

4. Duži MA, MB, MC dele trougao ABC na 3 trougla površina: $\frac{1}{2}an_a$, $\frac{1}{2}bn_b$ i $\frac{1}{2}cn_c$. Zbir ove tri površine jednak je površini P trougla ABC (sl. 3): $\frac{1}{2}an_a+\frac{1}{2}bn_b+\frac{1}{2}cn_c=P$. Odavde, posle deljenja jednakosti sa P, dobijamo: $\frac{a}{2P}n_a+\frac{b}{2P}n_b+\frac{c}{2P}n_c=1$. Kako je $P=\frac{1}{2}ah_a$, $P=\frac{1}{2}bh_b$ i $P=\frac{1}{2}ch_c$, odnosno kako je $h_a=\frac{2P}{a}$, $h_b=\frac{2P}{b}$, $h_c=\frac{2P}{c}$, prethodna jednačina postaje $\frac{n_a}{h_a}+\frac{n_b}{h_b}+\frac{n_c}{h_c}=1$, što se i tvrdilo.



Sl. 3.



Sl. 4.

5. Neka su A, B i C zajedničke tačke većeg kruga i tangenata t_1 i t_2 manjeg kruga (sl. 4), i neka je T tačka u kojoj t_1 dodiruje manji krug. Kako je $OB=2\,OT$, to je ugao OBT od 30°, a samim tim je $\measuredangle ABC=60°$. Slično dokazujemo da su i uglovi kod A i C od 60°. Dakle, trougao ABC je jednakostraničan, pa su i odsečci u većem krugu jednaki. Osenčeni deo kružnog prstena je, očigledno, trećina celog kružnog prstena, pa se površine osenčenog i neosenčenog dela ovog prstena odnose kao 1 : 2.