Najtoplije zahvaljujem **dr. Darku Žubriniću** i **dr. Urošu Milutinoviću** na dozvoli da hrvatsku i englesku inačicu knjige "Balkanske matematičke olimpijade 1984. - 1991." objavim na http://public.carnet.hr/mat-natj .

Iste knjige u **dvi** formatu možete naći na http://www.croatianhistory.net/etf/darko.html .

Antonija Horvatek

UROŠ MILUTINOVIĆ–DARKO ŽUBRINIĆ

BALKANSKE MATEMATIČKE OLIMPIJADE

1984–1991

Zadaci s rješenjima

Samo za neprofitnu uporabu
(nedostaju slike)

ZAGREB 1991

Uvod

Ideju za održavanje Balkanske matematičke olimpijade dali su prof. Dimitrios Kontogiannis iz Atene i prof. Ivan Tonov iz Sofije u jednom prijateljskom razgovoru za vrijeme održavanja 24. Međunarodne matematičke olimpijade u Parizu, 1983. Prva je održana 1984. g. u Grčkoj.

Cilj natjecanja je razvijanje prijateljskih veza između balkanskih zemalja na nivou obrazovanja, te priprema nacionalnih ekipa za nastup na Međunarodnoj matematičkoj olimpijadi. Treba reći da su predstavnici Bugarske i Rumunjske odabrani iz šireg kruga kandidata (oko 25), pa se na Međunarodnoj olimpijadi mogu pojaviti u znatno izmijenjenom sastavu. Jugoslavija sudjeluje na natjecanjima od četvrte Balkanske olimpijade. Nadamo se da će uskoro sudjelovati i Turska i Albanija.

Natjecanje se održava svake godine u toku prvog tjedna svibnja. Pojedine ekipe su sastavljene od šest učenika. Problemi se odabiru neposredno prije samog natjecanja. Učenici rješavaju po četiri zadatka u toku četiri i pol sata. Svaki zadatak nosi po deset bodova, iako, naravno, nikada nisu svi podjednako teški. Redovito su zadaci poredani od lakšeg prema težem, kao i na našim natjecanjima. Dosada samo dva zadatka nisu u toku natjecanja bila u potpunosti riješena (zadaci br. 6.2. i 6.4).

Spomenimo da se 1989. započelo i s organiziranjem Balkanskih ljetnih škola za mlade matematičare (prvi, drugi i treći razred srednje škole) koje se održavaju obično u nekom primorskom gradu. Predviđa se sudjelovanje deset učenika i po dva do tri voditelja koji su na ljetnoj školi ujedno i predavači. Službeni jezik škole je engleski.

U toku posljednjih desetak godina organiziraju se mnoga regionalna natjecanja, koja će se sasvim sigurno i dalje širiti. Navedimo samo takmičenje između Poljske i Austrije, koje je nastalo kao plod međudržavnog sporazuma (voditelj austrijske nacionalne ekipe je Gradiščanski Hrvat prof. Mühlgassner), zatim Ibero–američko natjecanje (za države Južne Amerike i Španjolsku), natjecanje zemalja Magreba (bivše francuske kolonije u Africi), Nordijsko natjecanje i odnedavno Azijsko–pacifičko natjecanje.

Odlučili smo da u zbirku uvrstimo i neke od prijedloga zadataka koje žiri nije iskoristio na natjecanjima. Većina zadataka objavljuje se prvi put.

Slike i dijagrami u ovoj knjizi su numerirani isto kao i odgovarajući zadaci na koje se odnose.

Autori su zahvalni profesoru Willieu Yongu iz Singapura, koji nam je sugerirao da se ova knjiga napiše. Učenici Miroslav Šilović i Igor Dolinka pomogli su nam da kompletiramo materijale za natjecanje iz 1990. g. Posebnu zahvalnost dugujemo recenzentima Željku Hanjšu i Ilku Brnetiću na mnoštvu korisnih primjedbi.

Uroš Milutinović i Darko Žubrinić

OZNAKE

- $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ skup prirodnih brojeva.
- $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$.
- $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ skupovi cijelih, racionalnih i realnih brojeva.
- Eulerova funkcija $\varphi(n)$: broj prirodnih brojeva manjih ili jednakih n, koji su relativno prosti sa $n \in \mathbf{N}$.
- $\lfloor x \rfloor$ = najveći cijeli dio (ili najveće cijelo) od $x \in \mathbf{R}$, tj. najveći cijeli broj koji nije veći od x.
- Koristit ćemo se oznakom (a, b) i za uređeni par i otvoren interval, što će se lako razlučiti iz konteksta.
- $|S|$ = kardinalni broj skupa S.
- Sferom ćemo zvati rub kugle.

1. BALKANSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

ATENA, Grčka, 1984.

1.1. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitivni realni brojevi ($n \geq 2$) takvi da vrijedi $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$. Dokaži da je:

$$\frac{a_1}{1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n} + \frac{a_2}{1 + a_1 + a_3 + \cdots + a_n} + \cdots + \frac{a_n}{1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}} \geq \frac{n}{2n-1}.$$

(Grčka)

1.2. Neka je $ABCD$ tetivni četverokut i H_A, H_B, H_C, H_D presjeci visina trokuta BCD, CDA, DAB i ABC respektivno. Dokaži da su četverokuti $ABCD$ i $H_AH_BH_CH_D$ kongruentni (tj. sukladni).

(Rumunjska)

1.3. Dokaži da za svaki prirodni broj m postoji n, $n > m$, tako da se decimalni prikaz broja 5^n dobiva iz decimalnog prikaza broja 5^m dodavanjem stanovitog broja znamenki nalijevo.

(Bugarska)

1.4. Nađi sva realna rješenja sistema

$$\begin{aligned} ax + by &= (x-y)^2 \\ by + cz &= (y-z)^2 \\ cz + ax &= (z-x)^2, \end{aligned}$$

gdje su a, b, c zadani pozitivni realni brojevi.

(Rumunjska)

2. BALKANSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

SOFIJA, Bugarska, 1985.

2.1. Neka je O središte opisane kružnice trokuta ABC, D polovište dužine AB i E težište trokuta ACD. Pokaži da je $CD \perp OE$ ako i samo ako je $AB = AC$.

(Bugarska)

2.2. Neka su $a, b, c, d \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ takvi da je

$$\sin a + \sin b + \sin c + \sin d = 1$$

i

$$\cos 2a + \cos 2b + \cos 2c + \cos 2d \geq \frac{10}{3}.$$

Dokaži da je $a, b, c, d \in [0, \frac{\pi}{6}]$.

(Rumunjska)

2.3. Točke na realnom pravcu oblika $19a + 85b$, $a, b \in \mathbf{N}_0$ obojene su crveno, a sve preostale cjelobrojne točke na $\mathbf{R}$ zeleno. Ispitajte postoji li točka $A \in \mathbf{R}$ takva da su za svaki par $(B, C) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ koji je simetričan s obzirom na A boje točaka B i C različite.

(Grčka)

2.4. Na konferenciji sudjeluje 1985 ljudi. U svakoj tročlanoj grupi barem su dvojica koji govore zajedničkim jezikom. Ako svaka osoba govori najviše pet jezika, pokaži da postoji barem 200 osoba na konferenciji koje govore zajedničkim jezikom.

(Rumunjska)

3. BALKANSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

BUKUREŠT, Rumunjska, 1986.

3.1. Pravac koji prolazi kroz središte I upisane kružnice trokuta ABC siječe njoj opisanu kružnicu u točkama F i G, a upisanu kružnicu u točkama D i E, gdje D leži između I i F.
Dokaži da je $DF \cdot EG \geq r^2$, gdje je r polumjer upisane kružnice. Kada vrijedi jednakost?

(Grčka)

3.2. Neka je $ABCD$ tetraedar i E, F, G, H, K, L točke koje leže na AB, BC, CA, DA, BD i DC respektivno.
Dokaži da ako je $AE \cdot BE = BF \cdot CF = CG \cdot AG = DH \cdot AH = DK \cdot BK = DL \cdot CL$, tada točke E, F, G, H, K, L leže na kugli.

(Bugarska)

3.3. Niz $a_1, a_2, \ldots$ je definiran sa $a_1 = a$, $a_2 = b$ i $a_{n+1} = (a_n^2 + c)/a_{n-1}$ za $n = 2, 3, \ldots$, gdje su a, b, c realni brojevi takvi da je $ab \neq 0$, $c > 0$. Dokaži da su a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ cijeli brojevi ako i samo ako su a, b i $(a^2 + b^2 + c)/ab$ cijeli brojevi.

(Bugarska)

3.4. Trokut ABC i točka T leže u ravnini tako da trokuti TAB, TBC, TCA imaju isti opseg i istu površinu. Dokaži da:

a) ako je T unutarnja točka trokuta ABC, tada je trokut ABC jednakostraničan;

b) ako T nije unutarnja točka trokuta ABC, tada je ABC pravokutan.

(Rumunjska)

4. BALKANSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

ATENA, Grčka, 1987.

4.1. Neka je a realan broj i $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funkcija takva da za sve $x, y \in \mathbf{R}$ vrijedi:

$$f(x+y) = f(x)f(a-y) + f(y)f(a-x)$$
$$f(0) = \frac{1}{2}.$$

Dokaži da je f konstanta.

(bivša Jugoslavija)

4.2. Neka je $x \geq 1$ i $y \geq 1$ tako da su

$$a = \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1}$$
$$b = \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1}$$

neuzastopni cijeli brojevi. Dokaži da je $b = a + 2$ i $x = y = \frac{5}{4}$.

(Rumunjska)

4.3. U trokutu ABC ispunjena je sljedeća relacija:

$$\sin^{23}\frac{\alpha}{2} \cdot \cos^{48}\frac{\beta}{2} = \sin^{23}\frac{\beta}{2} \cdot \cos^{48}\frac{\alpha}{2},$$

gdje su α i β odgovarajući kutovi uz A i B. Nađi omjer AC/BC.

(Cipar)

4.4. Dvije kružnice k_1 i k_2 sa središtima u O_1 i O_2, s polumjerima 1 i $\sqrt{2}$ sijeku se u točkama A i B, i $O_1O_2 = 2$. Neka je AC tetiva na k_2. Nađi duljinu AC ako polovište dužine AC leži na k_1.

(Bugarska)

5. BALKANSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

NIKOZIJA, Cipar, 1988.

5.1. Neka su CH, CL i CM redom visina, simetrala kuta i težišnica trokuta ABC tako da točke H, L i M leže na AB.
Omjer površina trokuta HMC i ABC je $\frac{1}{4}$, dok je odgovarajući omjer za trokute LMC i ABC jednak $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Odredi kutove trokuta ABC.

(Bugarska)

5.2. Nađi sve polinome $P(x, y)$ u dvije varijable takve da za sve realne brojeve a, b, c, d vrijedi:

$$P(a, b) \cdot P(c, d) = P(ac + bd, ad + bc).$$

(bivša Jugoslavija)

5.3. Dokaži da se svaki tetraedar $A_1A_2A_3A_4$ može smjestiti između dviju paralelnih ravnina čija međusobna udaljenost nije veća od $\frac{1}{2}\sqrt{P/3}$, gdje je

$$P = (A_1A_2)^2 + (A_1A_3)^2 + (A_1A_4)^2 + (A_2A_3)^2 + (A_2A_4)^2 + (A_3A_4)^2.$$

(Grčka)

5.4. Nađi sve parove a_n, a_{n+1} uzastopnih cijelih brojeva niza $a_1, a_2 \ldots$, definiranog sa $a_n = 2^n + 49$, tako da vrijedi

$$a_n = p \cdot q, \quad a_{n+1} = r \cdot s,$$

gdje su p, q, r, s prosti brojevi takvi da je

$$p < q, \quad r < s, \quad q - p = s - r.$$

(Rumunjska)

6. BALKANSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

SPLIT, bivša Jugoslavija, 1989.

6.1. Neka su $d_1, d_2, \ldots, d_k$ djelitelji prirodnog broja n i neka je $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$. Nađi sve brojeve n za koje je $k \geq 4$ i vrijedi

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = n.$$

(Bugarska)

6.2. Neka je $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0} = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + 10a_1 + a_0$ decimalni prikaz prostog broja. Ako je $n > 1$ i $a_n > 1$, pokaži da je polinom

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

ireducibilan, tj. ne može se prikazati kao produkt polinoma s cjelobrojnim koeficijentima i stupanja barem jedan.

(bivša Jugoslavija)

6.3. Neka je ABC trokut i ℓ pravac koji siječe stranice AB i AC u točkama B_1 i C_1 respektivno, tako da vrh A i težište G trokuta ABC leže u istoj poluravnini određenoj sa ℓ. Dokaži da je

$$\mathrm{P}(BB_1GC_1) + \mathrm{P}(CC_1GB_1) \geq \frac{4}{9}\mathrm{P}(ABC),$$

gdje P označava površinu. Kada vrijedi jednakost?

(Grčka)

6.4. Promatrajmo familije $\mathcal{F}$ podskupova skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$, $n \geq 3$ takve da vrijedi:
(i) ako je $A \in \mathcal{F}$, tada $|A| = 3$;
(ii) ako je $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}$, $A \neq B$, tada $|A \cap B| \leq 1$.
Neka je $f(n)$ maksimalna vrijednost $|\mathcal{F}|$ za sve takve $\mathcal{F}$. Dokaži da je

$$\frac{1}{6}(n^2 - 4n) \leq f(n) \leq \frac{1}{6}(n^2 - n).$$

($|S|$ označava kardinalni broj skupa S.)

(Rumunjska)

7. BALKANSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

SOFIJA, Bugarska, 1990.

7.1. Neka je $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ i $a_{n+2} = (n+3)a_{n+1} - (n+2)a_n$ za svaki prirodan broj $n \geq 1$. Nađi sve vrijednosti n za koje je a_n djeljivo sa 11.

(Grčka)

7.2. Promatrajmo polinom definiran sa

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{2n} x^{2n} = (1 \cdot x + 2 \cdot x^2 + \cdots + n \cdot x^n)^2.$$

Dokaži da je

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n} = \frac{n(n+1)(5n^2+5n+2)}{24}.$$

(Bugarska)

7.3. Neka je $A_1B_1C_1$ ortocentričan trokut šiljastokutnog, nejednakostraničnog trokuta ABC. Neka su A_2, B_2, C_2 dirališta kružnice upisane u trokut $A_1B_1C_1$ s njegovim stranicama. Dokaži da se Eulerovi pravci trokuta ABC i $A_2B_2C_2$ podudaraju.

Napomene:

(I) Vrhovi ortocentričnog trokuta su nožišta visina početnog trokuta.

(II) Eulerov pravac nekog trokuta je po definiciji određen ortocentrom i središtem upisane kružnice.

(bivša Jugoslavija)

7.4. Odredi minimalan broj elementa konačnog skupa A tako da postoji funkcija $f\colon \mathbf{N} \to A$ takva da ako je broj $|i - j|$ prost, tada je $f(i) \neq f(j)$.

(Rumunjska)

8. BALKANSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

CONSTANCA, Rumunjska, 1991.

8.1. Oko šiljastokutnog trokuta ABC opisana je kružnica sa središtem u točki O. Neka je M točka na luku AB kružnice, koja ne sadrži točku C. Okomica povučena iz točke M na dužinu OA siječe stranice AB i AC respektivno u točkama K i L. Slično, okomica povučena iz M na OB siječe stranice AB, BC u točkama N i P respektivno. Ako je $\overline{KL} = \overline{MN}$, izrazite kut $\angle MLP$ pomoću kutova trokuta ABC.

(Grcka)

8.2. Dokažite da postoji beskonačno mnogo nekongruentnih trokuta T takvih da:

(i) dužine stranica a, b, c trokuta T su relativno prosti prirodni brojevi, tj. njihova najveća zajednička mjera je jedan;

(ii) površina trokuta T je cijeli broj;

(iii) nijedna od visina trokuta T nije cijeli broj.

(Jugoslavija)

8.3. Pravilan šesterokut površine H je upisan u konveksan poligon površine P (svi vrhovi šesterokuta leže na rubu konveksnog poligona). Dokazati da je $P \leq \frac{3}{2}H$. Kada vrijedi jednakost?

(Bugarska)

8.4. Dokazati da ne postoji bijekcija $f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}_0$ takva da je

$$f(mn) = f(m) + f(n) + 3f(m)f(n)$$

za sve $m, n \geq 1$.

(Rumunjska)

PRIJEDLOZI ZADATAKA

Kombinatorika

1. Obojmo sve točke ravnine trima bojama. Dokažite da postoje dvije točke međusobno udaljene 1, koje imaju istu boju.

2. Neka je $\mathcal{F}$ familija podskupova skupa $\mathbf{N}$ tako da nijedan skup ne sadrži drugi. Neka je $C(\mathcal{F})$ skup svih podskupova M skupa $\mathbf{N}$ sa sljedećim svojstvima:
(i) M presijeca svaki član familije $\mathcal{F}$;
(ii) ne postoji pravi podskup M' skupa M sa svojstvom (i).

Nađite primjer familije skupova $\mathcal{F}$ tako da je $C(\mathcal{F})$ prazan skup i 1 989 sadržan u točno 1 989 članova familije $\mathcal{F}$.

3. Za proizvoljan polieadar označimo sa n_k broj strana sa točno k vrhova. Dokažite da je bar jedna od sljedećih izjava istinita:
(i) postoji k tako da je $n_k \geq 3$;
(ii) postoji $k \neq h$ tako da vrijedi $n_k \geq n_h \geq 2$.

4. Neka je dano n^2 različitih prirodnih brojeva tako da je svaki smješten na kvadratnoj $n \times n$ šahovskoj ploči $(n \geq 2)$.

Pokažite da je moguće odabrati n brojeva, po jedan u svakom retku i stupcu, tako da ako je broj odabran u bilo kojem retku veći od bilo kojeg drugog u tom retku, tada je ovaj posljednji broj manji od broja odabranoga u njegovu stupcu.

Algebra

5. Niz funkcija P_n ispunjava sljedeće uvjete:

$$P_1(x) = x, \quad P_2(x) = x^3,$$
$$P_{n+1}(x) = \frac{P_n^3(x) - P_{n-1}(x)}{1 + P_n(x)P_{n-1}(x)}, \quad n = 2, 3, \ldots$$

Dokažite da su funkcije P_n polinomi.

6. Nađite sva realna rješenja sistema:

$$\begin{aligned} 2^{x^2+y} + 2^{x+y^2} &= 8 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} &= 2. \end{aligned}$$

Analiza

7. Neka je k prirodan broj i

$$a_n = \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Dokažite da je niz (a_n) opadajući.

8. Nađite sve neprekidne funkcije $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takve da je

$$f(x + f(y)) = f(x) + y$$

za sve $x, y \in \mathbf{R}$.

Geometrija

9. Neka je ABC trokut te CX i CY dvije zrake (u poluravnini određenoj pravcem AC koja sadrži točku B) tako da je CX paralelno sa AB i CX u unutrašnjosti kuta $\angle BCY$.

Varijabilan pravac iz točke B siječe CX u točki D i CY u E, dok pravac AD siječe BC u F. Pokažite da svi pravci EF prolaze kroz zajedničku točku.

10. Neka je ABC trokut tako da vrijedi $BC = 2 \cdot AC - 2 \cdot AB$, a D točka na stranici BC. Dokažite da je $\angle ABD = 2\angle ADB$ ako i samo ako je $BD = 3 \cdot CD$.

11. Dane su tri točke A, B i C u ravnini. Dokažite da je C polovište segmenta AB ako i samo ako je

$$PA^{1989} + PB^{1989} \geq 2 \cdot PC^{1989}$$

za svaku točku P u ravnini.

12. Neka je $ABCD$ pravilna trostrana piramida u kojoj su stranice AD, BD, i CD u parovima okomite. Nađite točke X u unutrašnjosti ili na rubu piramide $ABCD$ za koju je volumen tetraedra, čiji su vrhovi ortogonalne projekcije X na strane piramide $ABCD$, maksimalan.

13. Konveksni n–terokut smješten je u kvadrat duljine stranice 1. Dokažite da postoje tri vrha A, B, C danog n–terokuta tako da površina trokuta ABC ne premašuje $8/n^2$.

Teorija brojeva

14. Neka je $n \geq 3$ prirodan broj. Dokažite da

$$1989 \,|\, n^{n^{n^n}} - n^{n^n}.$$

15. Neka su $a_0, a_1, \ldots, a_8$ cijeli brojevi za koje je

$$a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 5, \quad n = 0, 1, \ldots, 7.$$

Dokažite da među ovim brojevima barem dva nisu relativno prosta.

16. Postoji li 1 989 prirodnih brojeva $a_1, a_2, \dots, a_{1989}$ tako da za svaki $i = 3, 4, \dots, 1\,989$ vrijedi

$$a_i + S_i = (a_i, S_i) + [a_i, S_i],$$

gdje je $S_i = \sum_{j=1}^{i} a_j$, a $(\cdot, \cdot)$ i $[\cdot, \cdot]$ su najveća zajednička mjera i najmanji zajednički višekratnik respektivno.

17. Nađite sve nenegativne cijele brojeve (x, y, z, n) tako da vrijedi

$$x^3 + y^3 + z^3 = nx^2y^2z^2.$$

18. Nađite sve cijele brojeve p za koje postoje racionalni brojevi a i b takvi da polinom $x^5 - px - 1$ ima barem jedan zajednički korijen sa polinomom $x^2 - ax + b$.

RJEŠENJA ZADATAKA

1.1. Nejednakost dana u zadatku je ekvivalentna sa

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2-a_k} \geq \frac{n}{2n-1}.$$

Primijetivši da je

$$\frac{a_k}{2-a_k} = -1 + \frac{2}{2-a_k} \tag{1}$$

i

$$\sum_{k=1}^{n} (2-a_k) = 2n-1,$$

razumno je uvesti novu varijablu

$$x_k = \frac{2-a_k}{2n-1} > 0$$

za koju je

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = 1.$$

Uvrštavajući (1) u početnu nejednakost, vidimo da je ona ekvivalentna sa

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geq n^2. \tag{2}$$

Međutim, to je neposredna posljedica nejednakosti između harmonijske i aritmetičke sredine:

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \tag{3}$$

gdje je $x_k > 0$.

NAPOMENA. Nejednakost (2) je lako dokazati indukcijom. Za $n = 1$ tvrdnja je trivijalna.

Pretpostavimo da (2) vrijedi za $n-1$ i neka je $\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$. Tada imamo

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{x_k}{1-x_n} = 1,$$

pa iz induktivne pretpostavke dobivamo

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1-x_n}{x_k} \geq (n-1)^2,$$

tj.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geq \frac{(n-1)^2}{1-x_n} + \frac{1}{x_n} \geq n^2.$$

Posljednja nejednakost provjerava se neposredno.

Primijetite da je nejednakost (3) gotovo direktna posljedica nejednakosti (2).

1.2. Ideja dokaza je da se pokaže da su ABH_AH_B, BCH_BH_C, CDH_CH_D i DAH_DH_A paralelogrami. Odavde će slijediti da su četverokuti $ABCD$ i $H_AH_BH_CH_D$ simetrični s obzirom na točku.

Slika 1.2.

Dovoljno je dokazati da je CDH_CH_D paralelogram. Najprije ćemo pokazati da je AH_DBH_C tetivni četverokut. Zaista, imamo

$$\angle AH_DB = \angle ACB = \angle ADB = \pi - \angle BH_CA.$$

Gore navedene jednakosti slijede iz činjenice da je četverokut $A'H_DCB''$ tetivan (primijetite da je $\angle CB''H_D = \angle CA'H_D$), kao i $ABCD$ i $DB'H_CA''$. Time je dokazano da je četverokut AH_DBH_C tetivan.

Prema tome je

$$\begin{aligned}\angle H_DH_CD &= \angle BH_CD + \angle BH_CD \\ &= (\pi - \angle BAD) + \angle BAH_D \\ &= \angle DCB + \angle BCH_D = \angle DCH_D,\end{aligned}$$

gdje smo u drugom retku koristili činjenicu da je četverokut $AD'H_CB'$ tetivan.

Na sličan način se dobiva

$$\begin{aligned}\angle H_CH_DC &= \angle AH_DC - \angle AH_DH_C \\ &= (\pi - \angle ABC) - \angle ABB' \\ &= \angle ADC - \angle ADD' = \angle H_CDC.\end{aligned}$$

Prema tome je CDH_CH_D paralelogram. Degeneriran slučaj u kojem su, recimo, kutovi $\angle ADC$ i $\angle ABC$ jednaki $\pi/2$ (i prema tome $B = H_D$), može se razmotriti na neposredniji način:

$$\begin{aligned}&\angle BH_CD = \angle B'H_CD' = \pi - \angle B'AD' = \angle DCB \\ &= \angle H_CDC = \angle ADC - \angle ADD' = \angle ABC - \angle ABB' = \angle H_CBC.\end{aligned}$$

1.3. Ako je $n > m$, tvrdnja u zadatku je ekvivalentna sa

$$\begin{aligned}5^m &= \overline{a_{k_m}\dots a_0} \\ 5^n &= \overline{a_{k_n}\dots a_{k_m}\dots a_0},\end{aligned}$$

gdje desne strane predstavljaju odgovarajuće decimalne prikaze brojeva. Ovo je ekvivalentno sa

$$5^n - 5^m \equiv 0 \pmod{10^{k+1}} \tag{1}$$

uz $k = k_m$. Jasno je da vrijedi $k + 1 \leq m$, jer je $5^m = a_k \cdot 10^k + \dots$, $a_k \geq 1$. Prema tome je $5^n - 5^m$ djeljivo sa 5^{k+1} za sve $n > m$. Uslijed (1) je još jedino preostalo pronaći n, $n > m$, tako da bude $5^n - 5^m$ djeljivo sa 2^{k+1} ili, što je isto,

$$5^{n-m} - 1 \equiv 0 \pmod{2^{k+1}}.$$

Međutim, po Eulerovoj formuli je

$$5^{\varphi(2^{k+1})} - 1 \equiv 0 \pmod{2^{k+1}}$$

(primijetite da su brojevi 5 i 2^{k+1} relativno prosti). Dakle, možemo staviti $n = m + \varphi(2^{k+1})$, čime je zadatak riješen.

1.4. Uvedimo nove varijable

$$s = x - y, \quad t = y - z.$$

Tada sistem postaje

$$\begin{aligned} a(s+y) + by &= s^2 \\ by + c(y-t) &= t^2 \\ c(y-t) + a(s+y) &= (s+t)^2 = s^2 + 2st + t^2 \\ &= 2st + [a(s+y) + by] + [by + c(y-t)]. \end{aligned}$$

Posljednja relacija daje $y = -st/b$. Nakon uvrštavanja, iz prve jednadžbe dobivamo sljedeći sistem u s i t:

$$\begin{aligned} [ab - (a+b)t]s &= s^2 \\ [-(b+c)s - bc]t &= t^2. \end{aligned}$$

Imamo tri mogućnosti:
a) Ako je $s = 0$, tada je $-ct = t^2$ i imamo ili $t = 0$, tj.

$$(x, y, z) = (0, 0, 0),$$

ili $t = -c$, tj.

$$(x, y, z) = (0, 0, c).$$

b) Na sličan način za $t = 0$ dobivamo $s = a$ i:

$$(x, y, z) = (a, 0, 0).$$

c) Ako je $s \neq 0$ i $t \neq 0$, tada imamo

$$\begin{aligned} ab - (a+b)t &= bs \\ -bc - (b+c)s &= bt. \end{aligned}$$

Kako je $a, b, c > 0$, determinanta $ab + bc + ca$ ovog sistema različita je od 0. Rješavajući ga npr. eliminacijom, dobivamo $s = -b$, $t = b$ i još jedno rješenje:

$$(x, y, z) = (0, b, 0).$$

Slika 2.1.

2.1. Jasno je da vrijedi $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ i

$$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{6}(3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}).$$

Imamo također

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}[\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}].$$

Nakon malog računa iz $\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ (primijetite da je $OA = OB = OC$) dobivamo ekvivalentnu relaciju $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$, tj. $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{BC}$. Lako se provjeri da je ovo ekvivalentno sa $AB = AC$.

2.2. Uvedimo sljedeće oznake:

$$x = \sin a, \quad y = \sin b, \quad z = \sin c, \quad u = \sin d.$$

Zbog simetrije vidimo da je dovoljno dokazati jedino $x \in [0, \frac{1}{2}]$. Iz $\cos 2a = 1 - 2x^2$, $\cos 2b = 1 - 2y^2$, $\cos c = 1 - 2z^2$ i $\cos 2d = 1 - 2u^2$ zaključujemo:

$$\begin{aligned} x + y + z + u &= 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 + u^2 &\leq \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Eliminacijom varijable u iz nejednakosti, nakon kratkog računa dolazimo do sljedeće kvadratne nejednakosti u z:

$$z^2 + (x + y - 1)z + (x^2 + y^2 + xy - x - y + \frac{1}{3}) \leq 0.$$

Da bi postojalo rješenje z, odgovarajuća diskriminanta mora biti nenegativna, tj.

$$(x+y-1)^2 - 4(x^2+y^2+xy-x-y+\frac{1}{3}) \geq 0.$$

Međutim, to vodi do nove kvadratne nejednadžbe

$$3y^2 + 2(x-1)y + (3x^2 - 2x + \frac{1}{3}) \leq 0$$

u varijabli y. Iz sličnog razloga kao i prije njezina diskriminanta mora biti nenegativna:

$$4(x-1)^2 - 4[9x^2 - 6x + 1] \geq 0,$$

tj.

$$x(x - \frac{1}{2}) \leq 0.$$

Odavde odmah zaključujemo da je $x \in [0, \frac{1}{2}]$.

2.3. Opće rješenje Diophantske jednadžbe

$$19x + 85y = n \tag{1}$$

je

$$x = 19t - 2n, \quad y = 9n - 85t, \quad t \in \mathbf{Z}.$$

Koristit ćemo se činjenicom da je $1 = 9 \cdot 19 - 2 \cdot 85$, tj. $n = 9n \cdot 19 - 2n \cdot 85$.

Uvjet $x, y \geq 0$ je ekvivalentan sa

$$\frac{2n}{19} \leq t \leq \frac{9n}{85}.$$

Stoga vidimo da će točka $n \geq 0$ biti crvena ako i samo ako interval

$$[\frac{2n}{19}, \frac{9n}{85}] \tag{2}$$

sadrži neki cijeli broj. Usput, jasno je da su svi negativni cijeli brojevi obojeni zeleno.

Provjerit ćemo direktno da su svi brojevi ≥ 1512 obojeni crvenom bojom. Naime, koristeći

$$1 = 9 \cdot 19 - 2 \cdot 85 \tag{3}$$

$$1 = (-76) \cdot 19 + 17 \cdot 85 \tag{4}$$

imamo

$$
\begin{aligned}
1512 &= 8 \cdot 19 + 16 \cdot 85\\
1513 &= 17 \cdot 19 + 14 \cdot 85\\
1514 &= 26 \cdot 19 + 12 \cdot 85\\
1515 &= 35 \cdot 19 + 10 \cdot 85\\
1516 &= 44 \cdot 19 + 8 \cdot 85\\
1517 &= 53 \cdot 19 + 6 \cdot 85\\
1518 &= 62 \cdot 19 + 4 \cdot 85\\
1519 &= 71 \cdot 19 + 2 \cdot 85\\
\boxed{1520} &= 80 \cdot 19 + 0 \cdot 85\\
1511 &= 4 \cdot 19 + 17 \cdot 85\\
1522 &= 13 \cdot 19 + 15 \cdot 85\\
1523 &= 22 \cdot 19 + 13 \cdot 85\\
1524 &= 31 \cdot 19 + 11 \cdot 85\\
1525 &= 40 \cdot 19 + 9 \cdot 85\\
1526 &= 49 \cdot 19 + 7 \cdot 85\\
1527 &= 58 \cdot 19 + 5 \cdot 85\\
1528 &= 67 \cdot 19 + 3 \cdot 85\\
1529 &= 76 \cdot 19 + 1 \cdot 85\\
\boxed{1530} &= 0 \cdot 19 + 18 \cdot 85\\
1531 &= 8 \cdot 19 + 16 \cdot 85
\end{aligned}
$$

itd. (primijetite da je (4) korišteno jedino kod uokvirenih brojeva). Na taj način vidimo da su svi cijeli brojevi $n \geq 1512$ crveni.

Za $n = 1\,511$ je odgovarajući interval (2) jednak $[159\frac{1}{19}, 159\frac{84}{85}]$ i ne sadrži cijelih brojeva, prema tome je obojen zeleno.

Stoga, ako postoji A sa svojstvom opisanim u zadatku, on mora biti središte intervala $[0, 1511]$, tj. $A = 755\frac{1}{2}$.

Preostaje jedino dokazati da za svaki cijeli broj $n \in [0, 1511]$ brojevi n i $1\,511 - n$ imaju različite boje (oni su simetrični s obzirom na A).

a) Dokažimo da za svaki cijeli broj $n \in [0, 1511]$ koji je crven, broj $1\,511 - n$ mora biti zelen.

Pretpostavimo, naprotiv, da su oba crvena, tj.

$$
\begin{aligned}
n &= 19a + 85b\\
1\,511 - n &= 19c - 85d
\end{aligned}
$$

uz $a, b, c, d \geq 0$. Tada bi broj

$$1511 = 19(a + c) + 85(b + d)$$

morao biti crven, što je kontradikcija (primijetite da je $a+c, b+d \geq 0$).

b) Ako je n obojen zeleno, tada imamo

$$\frac{2n}{19}, \frac{9n}{85} \in (k, k+1)$$

za neko $k \in \mathbf{Z}$, tako da je

$$\begin{aligned} \frac{2n}{19} &= k + \frac{\alpha}{19}, \quad \alpha \in \{1, \ldots, 18\}, \\ \frac{2n}{85} &= k + \frac{\beta}{85}, \quad \beta \in \{1, \ldots, 84\}. \end{aligned}$$

Stoga je

$$\begin{aligned} \frac{2(1\,511-n)}{19} &= 159\frac{1}{19} - k - \frac{\alpha}{19} \in (158-k, 159-k], \\ \frac{9(1\,511-n)}{85} &= 159\frac{84}{85} - k - \frac{\beta}{85} \in [159-k, 160-k), \end{aligned}$$

i zbog

$$159 - k \in \left[\frac{2(1511-n)}{19}, \frac{9(1511-n)}{85}\right]$$

vidimo da će broj $1\,511 - n$ biti crven.

Prema tome, broj $A = 755\frac{1}{2}$ ima tražena svojstva.

2.4. Promatrajmo sljedeće dvije mogućnosti.

a) Neka svake dvije osobe govore barem jedan zajednički jezik. Osoba A govori s preostalih 1 984 ljudi nekim jezikom, i to na najviše pet jezika, tako da postoji jezik koji govori barem

$$\left\lfloor \frac{1\,984}{5} \right\rfloor > 200$$

sudionika kongresa.

b) Druga mogućnost je da postoje dvije osobe A i B koje ne govore nekim zajedničkim jezikom. Tada svaki od preostalih 1 983 sudionika govori s barem jednim od sudionika A i B (to slijedi iz uvjeta na tri osobe). Prema tome, barem 992 sudionika govore s jednom od tih dviju osoba (recimo A). To znači da A govori istim jezikom s još barem 199 sudionika, jer bi u protivnom mogao govoriti s najviše $5 \cdot 198 < 992$ ljudi. Ta grupa ljudi zajedno s osobom A čini traženih 200 sudionika koji govore istim jezikom.

3.1. Da bismo dokazali nejednakost, primijetimo da je

$$\begin{aligned} DF &= IF - r \\ EG &= IG - r \\ IF \cdot IG &= R^2 - IO^2, \end{aligned}$$

Slika 3.1.

gdje je R polumjer kružnice opisane trokutu ABC (zadnja relacija predstavlja poznato svojstvo potencije točke I s obzirom na kružnicu). Tada je

$$DF \cdot EG \geq r^2$$

ekvivalentno sa

$$FG \leq \frac{R^2 - IO^2}{r}.$$

Kako je pravac dan u zadatku proizvoljan, moramo dokazati da je

$$2R \leq \frac{R^2 - IO^2}{r},$$

tj.

$$IO^2 \leq R(R - 2r).$$

Međutim, prema poznatoj Eulerovoj formuli je $IO^2 = R(R - 2r)$!

Jednakost vrijedi onda i samo onda ako pravac prolazi kroz točke O i I.

3.2. Opišimo najprije sferu oko tetraedra $ABCD$. Njezin presjek s ravninom ABC jest kružnica k_D opisana trokutu ABC. Označimo njezino središte sa O_D i polumjer sa r_D.

Isto i za preostala tri trokuta (strane od $ABCD$).

Uvjet

$$AE \cdot EB = BF \cdot FC = CG \cdot GA$$

Slika 3.2.a

Slika 3.2.b

znači da su potencije točaka E, F, G iste s obzirom na k_D. Ako udaljenosti točaka E, F i G od O_D označimo sa e, f i g respektivno, tada je

$$(r_D - e)(r_D + e) = (r_D - f)(r_D + f) = (r_D - g)(r_D + g).$$

Odavde zaključujemo da je $e = f = g$, tako da točke E, F i G leže na kružnici polumjera $\tilde{r}_D$ koja je koncentrična sa k_D. Isto i za preostala tri trokuta.

Slika 3.2.c

Neka su d_E, $d_F, \ldots$ udaljenosti točke E, $F \ldots$ od središta O. Kako je OO_D okomito na stranu ABC, imamo

$$d_F^2 = \tilde{r}_D^2 + OO_D^2 = d_E^2 = \tilde{r}_C^2 + OO_C^2 = d_H^2.$$

Isto vrijedi i za sve ostale parove točaka u problemu, što znači da leže na sferi sa središtem u točki O.

3.3. Jasno je da $a_{n-1} \neq 0$ povlači $a_{n+1} \neq 0$, tako da je $a_n \neq 0$ za sve n. Primijetimo najprije da za sve n vrijedi

$$\frac{a_n^2 + a_{n+1}^2 + c}{a_n a_{n+1}} = \frac{a_n^2 + (\frac{a_n^2+c}{a_{n-1}})^2 + c}{a_n \frac{a_n^2+c}{a_{n-1}}} = \frac{a_{n-1}^2 + a_n^2 + c}{a_{n-1} a_n}.$$

Induktivno zaključujemo da je

$$\frac{a_n^2 + a_{n+1}^2 + c}{a_n a_{n+1}} = \frac{a^2 + b^2 + c}{ab}.$$

a) Da bismo dokazali dovoljnost uvjeta u zadatku, primijetimo da je

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{a_n^2 + c}{a_{n-1}} \\ &= \frac{a_{n-1}^2 + a_n^2 + c}{a_{n-1} a_n} a_n - a_{n-1} \\ &= \frac{a^2 + b^2 + c}{ab} a_n - a_{n-1}. \end{aligned}$$

Indukcijom dobivamo da su svi a_n sadržani u $\mathbf{Z}$.

b) Obrnuto, pretpostavimo da je $a_n \in \mathbf{Z}$ za sve n. Neka je

$$\frac{a^2 + b^2 + c}{ab} = \frac{p}{q},$$

gdje su $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{N}$ relativno prosti. Tada imamo:

$$a_{n+1} = \frac{p}{q} a_n - a_{n-1}, \quad \forall n \geq 2. \tag{1}$$

Odavde vidimo da je $\frac{p}{q} a_n \in \mathbf{Z}$, tj. $a_n = q a_n^{(1)}$, gdje je $a_n^{(1)} \in \mathbf{Z}$. Iz (1) dobivamo

$$a_{n+1}^{(1)} = \frac{p}{q} a_n^{(1)} - a_{n-1}^{(1)}, \quad \forall n \geq 3. \tag{2}$$

Zaključujemo da je $a_n^{(1)} = q a_n^{(2)}$, tj. $a_n = q^2 a_n^{(2)}$. Ponavljajući tu proceduru, dolazimo do

$$a_n = q^k a_n^{(k)}, \quad \forall n \geq k + 1,$$

Pišimo kraće $a_{k+1} = q^k b_{k+1}$. Sada primijetimo da je

$$c = a_{k+1} a_{k-1} - a_k^2 \in \mathbf{Z},$$

tako da imamo

$$\frac{p}{q} = \frac{a_k^2 + a_{k+1}^2 + c}{a_k a_{k+1}} = \frac{q^{2k} b_{k+1}^2 + q^{2k-2} b_k^2 + c}{q^{2k-1} b_k b_{k+1}}.$$

Odavde neposredno slijedi da q^{2k-2} mora dijeliti c za svako k, a to je moguće jedino za $q = 1$.

Slika 3.4.a$_1$

Slika 3.4.a$_2$

3.4. a) Jasno je da trokut koji ispunjava uvjete u zadatku ne može biti degeneriran. Neka je P površina svakog od trokuta TAB, TBC, TCA (one su sve međusobno jednake). Pravac AT dijeli stranicu BC na dva dijela duljina a_1 i a_2, a trokut BTC na dva trokuta s površinama P_1 i P_2. Označimo visine trokuta ABA' i BTC, povučenih iz A i T respektivno, sa v i v'. Tada iz

$$\frac{a_1 v}{2} = P + P_1, \quad \frac{a_2 v}{2} = P + P_2$$

dobivamo

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{P + P_1}{P + P_2}. \tag{1}$$

Također iz

$$\frac{a_1 v'}{2} = P_1, \quad \frac{a_2 v'}{2} = P_2$$

slijedi

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{P_1}{P_2}. \tag{2}$$

Relacije (1) i (2) daju $P_1 = P_2$, tj. $a_1 = a_2$, i slično za ostale stranice trokuta ABC. Dakle, T mora biti težište trokuta ABC.

Iz uvjeta u zadatku dobivamo

$$c + \frac{2}{3}(t_a + t_b) = a + \frac{2}{3}(t_b + t_c),$$

tj.

$$c - a = \frac{2}{3}(t_c - t_a).$$

Pretpostavljajući $c \neq a$, lako se vidi da je $t_c \neq t_a$. Iz

$$(c-a)(t_c + t_a) = \frac{2}{3}(t_c^2 - t_a^2) = \frac{2}{3}\left(\frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4} - \frac{b^2+c^2}{2} + \frac{a^2}{4}\right) = \frac{1}{2}(a^2 - c^2)$$

dobivamo

$$t_a + t_c = -\frac{a+c}{2},$$

što je nemoguće. Dakle je $c = a$ i slično $a = b$. Prema tome je trokut ABC jednakostraničan.

b) Jasno je da točka T ne može ležati na rubu trokuta ABC. Inače ne bismo imali jednakost svih površina zbog degeneracije nekih trokuta.

Pokažimo najprije da T ne može biti ni u sektoru I, ni na pravcima AB, AC, BC.

Zaista, pretpostavimo, naprotiv, da T leži u sektoru I. Tada pravac TA siječe stranicu BC u točki D. Bez gubitka općenitosti možemo pretpostaviti da je $D \neq C$. Sada imamo

$$P(TAC) = P(TBC) \geq P(TDC) = P(TAC) + P(ADC) > P(TAC),$$

gdje je P odgovarajuća površina, a to je kontradikcija.

Slika 3.4.b$_1$

Slika 3.4.b$_2$

Prema tome, možemo uzeti da točka T leži u sektoru II, recimo nasuprot točki B. Označimo presjek pravaca BT i AC sa D. Neka su x, y, z, u duljine stranica i P_1, P_2, P_3, P_4 površine trokuta kao na slici. Tada je

$$P_1 + P_2 = P_3 + P_4 = P_2 + P_3,$$

odakle slijedi

$$P_1 = P_3, \quad P_2 = P_4.$$

Slika 3.4.b$_3$

To povlači (koristeći, recimo, sinusov poučak) $xy = uz$, $xu = yz$. Množenjem ovih relacija dobivamo $x = z$, $y = u$, tj. $ABCT$ je paralelogram. Međutim, također je

$$a + c + 2y = a + c + 2x,$$

tj. $x = y$. Prema tome, točka B leži na kružnici promjera AC, tako da je trokut ABC pravokutan i T je četvrti vrh od $ABCT$ koji ima tražena svojstva.

4.1. Uvrštavajući $y = 0$ i zatim $x = a$ u relaciju, dobivamo

$$f(x) = f(x)f(a) + f(0)f(a - x) \tag{1}$$

$$f(a) = [f(a)]^2 + \frac{1}{4}.$$

Prema tome je $(f(a) - 1/2)^2 = 0$ i $f(a) = 1/2$. Iz (1) dobivamo

$$f(x) = f(a - x). \tag{2}$$

Time relacija u zadatku postaje

$$f(x + y) = 2f(x)f(y).$$

Sada imamo

$$\frac{1}{2} = f(a) = 2f(x)f(a - x) = 2[f(x)]^2,$$

i odatle $f(x) = \pm 1/2$.

Kad bi za neko b bilo $f(b) = -1/2$, imali bismo

$$-\frac{1}{2} = f(b) = f(\frac{b}{2} + \frac{b}{2}) = 2f(\frac{b}{2})^2,$$

što je nemoguće. Prema tome je $f(x) = 1/2$ za sve x.

Alternativno rješenje. Uvrštavanjem $x = y = 0$ dobivamo $f(a) = 1/2$. Zamijenimo y sa 0 i zatim sa a. Time dobivamo

$$f(x) = f(a - x), \quad f(x) = f(a + x)$$

i za sve realne brojeve x slijedi

$$f(-x) = f(a - (-x)) = f(a + x) = f(x).$$

Neka su x i y proizvoljni realni brojevi. Koristeći se gornjim relacijama zajedno s identitetom u zadatku, dobivamo:

$$\begin{aligned} f(x - y) &= f(x)f(a + y) + f(-y)f(a - x) \\ &= f(x)f(a - y) + f(y)f(a - x) = f(x + y). \end{aligned}$$

Stavljajući $y = x$, dobivamo konačno $f(2x) = f(0) = 1/2$, tj. $f(x) = 1/2$ za sve x.

4.2. Najprije je

$$b - a = \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} + \frac{2}{\sqrt{y+1} + \sqrt{y-1}} \geq 2.$$

Bez gubitka općenitosti možemo pretpostaviti da je $x \geq y$. Prema tome je

$$\frac{2}{\sqrt{y+1} + \sqrt{y-1}} \geq 1.$$

Kvadrirajući dvaput nejednakost $2 - \sqrt{y-1} \geq \sqrt{y+1}$, dobivamo $y \leq 5/4$.

Kad bi bilo $b - a \geq 3$, imali bismo

$$\frac{2}{\sqrt{y+1} + \sqrt{y-1}} \geq \frac{3}{2},$$

tj. $4/3 - \sqrt{y-1} \geq \sqrt{y+1}$ i nakon kvadriranja

$$\frac{8}{3}\sqrt{y-1} + \frac{2}{9} \leq 0,$$

što je nemoguće.

Prema tome je $b - a = 2$. Uvedimo nove varijable:

$$\begin{aligned} x + y &= s \\ xy &= p. \end{aligned}$$

Tada je

$$\begin{aligned} a^2 &= x - 1 + y - 1 + 2\sqrt{xy - x - y + 1} \\ b^2 &= a^2 + 4a + 4 = x + 1 + y + 1 + 2\sqrt{xy + x + y + 1}, \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} a^2+2-s &= 2\sqrt{p-s+1} \geq 0 \\ a^2+4a+2-s &= 2\sqrt{p+s+1} \end{aligned}$$

i odatle nakon kvadriranja i oduzimanja nejednakosti dobivamo

$$a^3+2a^2+2a = (a+1)s \leq (a+1)(a^2+2).$$

Na kraju dobivamo $a^2 \leq 1$, tj. $a = 1$, i odatle $s = 5/2$, $p = 25/16$, $x = y = 5/4$.

NAPOMENA. Relaciju $b = a+2$ možemo dobiti neposrednije, primijetivši da očigledna nejednakost

$$\sqrt{t+1}+\sqrt{t-1} \geq \sqrt{2}, \quad \forall t \geq 1$$

povlači

$$0 < b-a = \frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} + \frac{2}{\sqrt{y+1}+\sqrt{y-1}} \leq 2\sqrt{2}.$$

4.3. Za svako s i t tako da je $0 < s < t < \pi/2$, imamo $\sin^{23} s < \sin^{23} t$ i $\cos^{48} s > \cos^{48} t$. Prema tome funkcija

$$f(t) = \frac{\sin^{23} t}{\cos^{48} t}$$

jest strogo rastuća na $(0, \pi/2)$. Tako iz $f(\alpha/2) = f(\beta/2)$ dobivamo $\alpha = \beta$, tj. $AC/BC = 1$.

4.4. Neka je M polovište dužine AC i $AM = x$, $\angle AMO_1 = \varphi$. Kako je kut $\angle AMO_2$ jednak $\pi/2$, imamo $MO_2 = \sqrt{2-x^2}$. Koristeći se kosinusovim poučkom na trokut $\triangle O_1O_2M$, dobivamo:

$$\sin\varphi = -\cos(\frac{\pi}{2}+\varphi) = \frac{1+x^2}{2\sqrt{2-x^2}}.$$

Trokut AMO_1 je jednakokračan, pa imamo $\cos\varphi = \frac{x}{2}$, tj. $\sin\varphi = \sqrt{1-x^2/4}$ (primijetite da je $0 < \alpha < \pi/2$). Uvedimo novu varijablu $t = x^2$, $0 < t < 2$. Jedinstveno rješenje jednadžbe

$$\frac{1+t}{2\sqrt{2-t}} = \sqrt{1-\frac{t}{4}}$$

jest $t = 7/8$. Prema tome je $x = \sqrt{t} = \sqrt{7/8}$ i

$$AC = 2x = \sqrt{\frac{7}{2}}.$$

Slika 4.4.

5.1. Neka je $AB = c$, $AC = b$ i $BC = a$. Bez gubitka općenitosti možemo pretpostaviti da je $0 < b < a$, tako da točke H i L leže na segmentu AM. Iz uvjeta u zadatku dobivamo

$$\frac{P(HMC)}{P(ABC)} = \frac{HM \cdot HC}{AB \cdot HC} = \frac{HM}{AB} = \frac{1}{4}$$
$$\frac{P(LMC)}{P(ABC)} = \frac{LM \cdot HC}{AB \cdot HC} = \frac{LM}{AB} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Dobro je poznato da za simetrale vrijedi sljedeća relacija:

$$\frac{AL}{b} = \frac{c - AL}{a},$$

tako da imamo

$$AL = \frac{bc}{a+b}.$$

Prema tome je

$$LM = \frac{c}{2} - AL = \frac{c(a-b)}{2(a+b)}.$$

Slika 5.1.

Kako je $LM/c = 1 - \sqrt{3}/2$, dobivamo $a = \sqrt{3}\,b$. S druge strane, iz teorema o kosinusima

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - 2c \cdot AH$$

proizlazi

$$HM = \frac{c}{2} - AH = \frac{a^2 - b^2}{2c} = \frac{b^2}{c},$$

a odatle

$$\frac{1}{4} = \frac{HM}{c} = \frac{b^2}{c^2},$$

tj. $c = 2b$. Prema tome je $\alpha = 60\,\mathrm{deg}$, $\beta = 30\,\mathrm{deg}$, $\gamma = 90\,\mathrm{deg}$.

Alternativno rješenje

1. Iz $AH = HM$ dobivamo $\angle HMC = \alpha$, i odatle $CM = AC = b$.

2. Kako je $LM = (1 - \sqrt{3}/2)c$, imamo $LB = \frac{3-\sqrt{3}}{2}c$ i iz $AL : LB = b : a$ zaključujemo da je

$$a = \sqrt{3}\,b.$$

3. Sada je $HB = HM + MB = 3HM = 3AC\cos\alpha$ i $HB^2 + HC^2 = BC^2$, dakle $9\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 3$, tj. $\cos\alpha = 1/2$ ($\cos\alpha$ ne može biti negativno). Prema tome je $\alpha = 60\,\mathrm{deg}$.

4. Zaključujemo da je $AM = MC = MB$, pa je M središte opisane kružnice trokuta, tj. $\gamma = 90\,\mathrm{deg}$.

5.2. Najprije primijetimo da je

$$P(tx, ty) = P(t,0)P(x,y) \tag{1}$$

$$P(ts, 0) = P(t,0)P(s,0). \tag{2}$$

Definirajmo $p(x) = P(x, 0) = a_k x^k + \cdots + a_0$. Iz (2) dobivamo lagano (uspoređivanjem koeficijenata na obje strane jednakosti) da je ili $p(x) = 0$, ili $p(x) = 1$, ili $p(x) = x^k$ sa $k \geq 1$, za sve x.

Prema tome, ili je $P(x, y) = 0$, ili $P(x, y) = 1$, ili

$$P(tx, ty) = t^k P(x, y). \tag{3}$$

Promatrajmo (3):

$$\begin{aligned} P(x, y)P(1, 1) &= P(x + y, x + y) = (x + y)^k P(1, 1) \\ P(x, y)P(1, -1) &= P(x - y, x - y) = (x - y)^k P(1, -1). \end{aligned}$$

Imamo tri mogućnosti:

a) Ako je $P(1, 1) \neq 0$, tada je $P(x, y) = (x + y)^k$, za što se lako provjeri da ispunjava uvjet zadatka.

b) Ako je $P(1, -1) \neq 0$, tada je $P(x, y) = (x - y)^k$, što također ispunjava uvjet u zadatku.

c) Pretpostavimo da je $P(1, 1) = P(1, -1) = 0$. Učvrstivši y i dijeleći $P(x, y)$ sa $x^2 - y^2$, dobivamo

$$P(x, y) = (x^2 - y^2)Q(x, y) + xR(y) + S(y),$$

za sve $x, y \in \mathbf{R}$. Uvrštavanjem $(x, y) = (t, t)$ i $(x, y) = (t, -t)$ i koristeći (3) dobivamo

$$\begin{aligned} tR(t) + S(t) &= 0 \\ -tR(t) + S(t) &= 0, \end{aligned}$$

odakle proizlazi $R(t) = S(t) = 0$ za sve t. Prema tome je u ovom slučaju

$$P(x, y) = (x^2 - y^2)Q(x, y).$$

Polinom Q također ispunjava uvjet u zadatku kao i P, i njegov stupanj je jednak $k - 2$. Stoga možemo cijeli postupak opet ponoviti s odgovarajuća tri slučaja za Q, umjesto za P. Nakon konačno mnogo koraka dolazimo do

$$P(x, y) = (x + y)^m (x - y)^n, \tag{4}$$

gdje su $m, n \geq 0$ cijeli brojevi. Prema tome, sva rješenja problema su konstante 0, 1 i polinomi dani sa (4).

NAPOMENA. Formulirajmo problem analogan prethodnom: Nađi sve polinome $P(x, y, z)$ u tri varijable, takve da je

$$P(a, b, c) \cdot P(x, y, z) = P(ax + bz + cy, ay + bx + cz, az + by + cx)$$

za sve realne brojeve a, b, c, x, y, z. Mozze se pokazati da su sva rješenja ili konstante 0 i 1, ili

$$P(x, y, z) = (x + y + z)^m (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)^n,$$

gdje su $m, n \geq 0$ cijeli brojevi. Pokušajte!

5.3. Označimo sa $a_1 = A_1A_2$, $a_2 = A_3A_4$, $a_3 = A_1A_4$, $a_4 = A_2A_3$, $a_5 = A_2A_4$, $A_6 = A_1A_3$.

Neka su M_1, M_2, M_3, M_4 polovišta bridova označa na slici. To su vrhovi paralelograma.

Na isti način imamo još dva polovišta–M_5 i M_6–i odgovarajuće paralelograme.

Slika 5.3.

Suprotni bridovi tetraedra definiraju mimosmjerne pravce. Označimo najmanju udaljenost ovih triju parova mimosmjernih pravaca sa d. Jasno je da par pravaca s minimalnom međusobnom udaljenošću leži u odgovarajućim paralelnim ravninama i cijeli tetraedar je između njih. Prema tome je

$$d \leq M_1M_2$$
$$d \leq M_3M_4$$
$$d \leq M_5M_6.$$

Koristeći se identitetom paralelograma, dobivamo:

$$\begin{aligned}
3d^2 &\leq |M_1M_2|^2 + |M_3M_4|^2 + |M_5M_6|^2 \\
&= \frac{1}{2}(|M_1M_2|^2 + |M_3M_4|^2) + \frac{1}{2}(|M_1M_2|^2 + |M_5M_6|^2) \\
&+ \frac{1}{2}(|M_3M_4|^2 + |M_5M_6|^2) \\
&= \frac{1}{4}[(a_5^2 + a_6^2) + (a_3^2 + a_4^2) + (a_1^2 + a_2^2)] = \frac{P}{4},
\end{aligned}$$

tj. $d \leq \frac{1}{2}\sqrt{P/3}$.

Alternativno rješenje. Suprotne stranice tetraedra određuju dvije paralelne ravnine koje ih sadrže. Tih šest ravnina definira paralelepiped. Označimo duljine njegovih stranica sa a, b, c, i neka je d najmanja od udaljenosti između triju parova paralelnih ravnina prije definiranih. Prema identitetu paralelograma suma kvadrata duljina suprotnih stranica jednaka je

$$2a^2 + 2c^2, \quad 2a^2 + 2b^2, \quad 2b^2 + 2c^2.$$

Odatle dobivamo

$$P = 4(a^2 + b^2 + c^2) \geq 4(d^2 + d^2 + d^2) = 12d^2.$$

5.4. Dokazat ćemo da je jedini par uzastopnih članova niza koji ispunjava tražene uvjete (a_7, a_8).

Stavimo $q - p = s - r = x$. Tada je

$$a_n = p(p + x), \quad a_{n+1} = r(r + x).$$

Preslikavanje $p \mapsto p(p + x)$ je rastuća funkcija, pa imamo $p < r$. Za sve neparne n vrijedi

$$a_n = 2^n + 49 \equiv 2^n + 1 = 2(3 + 1)^k + 1 \equiv 0 \pmod 3$$

i broj $2^n + 49$ je očito neparan. Prema tome $p = 3$.

Imamo

$$a_{n+1} = 2a_n - 49 < 2a_n, \tag{1}$$

odakle slijedi $r < 2p$. Zaista, ako je $r \geq 2p$, tada dobivamo kontradikciju:

$$a_{n+1} = r(r + x) \geq 2p(2p + x) > 2p(p + x) = 2a_n.$$

Dakle, $3 < r < 6$ i stoga $r = 5$. Uvrštavanjem vrijednosti $p = 3$ i $r = 6$ u rekurentnu relaciju (1) dobivamo $5(5+x) = 6(3+x) - 49$, odnosno $x = 56$. Slijedi da je $a_n = 3 \cdot 59$ i $a_{n+1} = 5 \cdot 61$. Neposrednim računom provjerava se da su to upravo brojevi $a_7 = 2^7 + 1$ i $a_8 = 2^8 + 1$.

Alternativno rješenje. Označimo $y = s - q = r - p$. Kao u prethodnom rješenju dobivamo

$$a_n = 3q, \quad a_{n+1} = (3+y)(q+y).$$

Prema tome je $(3+y)(q+y) = 2^{n+1} + 49 = 2^n + 3q$, tj.

$$y\left(\frac{2^n + 49}{3} + y + 3\right) = 2^n. \tag{1}$$

Ako je $y \geq 3$, tada je lijeva strana relacije (1) veća nego desna, što je nemoguće. Također, u slučaju $y = 1$ dobivamo kontradikciju $a_{n+1} = 4(q+1)$. Stoga je jedina preostala mogućnost $y = 2$. Sada iz (1) možemo izračunati $n = 7$ i rezultat lako slijedi.

6.1. Ako je $d_2 > 2$, tada su n, d_2, d_3 i d_4 neparni. Prema tome je broj $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$ paran, što je kontradikcija. Zaključujemo da je $d_2 = 2$, n neparan i iz jednadžbe $n = 1^2 + 2^2 + d_3^2 + d_4^2$ dobivamo da je točno jedan od brojeva d_3 i d_4 paran.

a) Neka je d_3 paran, tj. $d_3 = 2a$, $a \geq 1$. Tada je $a < d_3$ djeljitelj od n i stoga je $a = d_1 = 1$, ili $a = d_2 = 2$. Lako se provjeri da su oba slučaja nemoguća.

b) Ako je d_4 paran, $d_4 = 2a$, $a \geq 1$, sličnim zaključivanjem dobivamo da je $a = 1$, $a = 2$ ili $a = d_3$. Slučaj $a = 1$ vodi na kontradikciju. Ako je $a = 2$, tada imamo $d_4 = 4$ i $d_3 = 3$. Prema tome je $n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$, što je nemoguće, jer taj broj nije djeljiv sa 4.

Dosta je još razmotriti slučaj $a = d_3$. Imamo $d_4 = 2d_3$, i odatle

$$n = 1^2 + 2^2 + d_3^2 + (2d_3)^2 = 5(d_3^2 + 1).$$

Budući da d_3 dijeli n, dobivamo $d_3 = 5$, $d_4 = 10$, $n = 1^2 + 2^2 + 5^2 + 10^2 = 130$. Svi djeljitelji od 130 su $1, 2, 5, 10, 13, 26, 65, 130$. Prema tome je $n = 130$ jedinstveno rješenje.

6.2. Primijetimo najprije da iz $P(x) = 0$ slijedi $|x| < 9$. Zaista, ako je $|x| \geq 9$, tada imamo:

$$\begin{aligned}
|P(x)| &= |a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0| \\
&\geq 2|x|^n - 9(|x|^{n-1} + \cdots + 1) = \frac{2|x|^{n+1} - 11|x|^n + 9}{|x| - 1} \\
&> \frac{2|x|^n(|x| - 9) + 9}{|x| - 1} > 0.
\end{aligned}$$

Pretpostavimo, suprotno tvrdnji zadatka, da je $P(x) = Q(x)R(x)$, gdje su Q i R polinomi s cjelobrojnim koeficijentima. Tada je

$$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_0} = P(10) = Q(10)R(10).$$

Prema prethodnom imamo da je $|Q(10)| > 1$ i $|R(10)| > 1$, što je nemoguće. Naime, kako je $Q(x) = a\prod_{i<k}(x - x_i)$, $a \in \mathbf{Z}$, slijedi $|x_i| < 9$ i prema tome $|Q(10)| = |a| \prod_{i<k} |10 - x_i| > 1$.

NAPOMENA. Tvrdnja u zadatku vrijedi i kada je $a_n = 1$, no ona zahtijeva drugačiji dokaz (pogledajte knjigu problema Pólya–Szegö).

6.3. Označimo odgovarajuće površine kratko u okruglim zagradama. Definirajmo:

$$E_1 = (AB_1G), \quad E_2 = (AC_1G).$$

Kako je G težište trokuta ABC, visina trokuta AGC_1 iz vrha G jest jedna trećina visine trokuta ABC_1 povučenog iz vrha B. Slično vrijedi i za trokute AB_1C i AB_1G. Prema tome je

Slika 6.3.

$$(ABC_1) = 3E_2, \quad (AB_1C) = 3E_1. \tag{1}$$

Primijetite da je

$$
\begin{aligned}
(ABC_1) &= E_1 + E_2 + (BB_1GC_1) = 3E_2 \\
(AB_1C) &= E_1 + E_2 + (CC_1GB_1) = 3E_1,
\end{aligned}
$$

tako da imamo

$$
(BB_1GC_1) + (CC_1GB_1) = E_1 + E_2. \tag{2}
$$

Štoviše, vrijedi

$$
\frac{(ABC)}{(ABC_1)} = \frac{AC}{AC_1}, \quad \frac{(ABC)}{(AB_1C)} = \frac{AB}{AB_1}. \tag{3}
$$

Iz (1) i (3) dobivamo

$$
\frac{(ABC)}{E_2} = 3\frac{AC}{AC_1}, \quad \frac{(ABC)}{E_1} = 3\frac{AB}{AB_1}.
$$

Odatle proizlazi:

$$
\begin{aligned}
\frac{E_1 + E_2}{(ABC)} &= \frac{1}{3}\left(\frac{AC_1}{AC} + \frac{AB_1}{AB}\right) \\
&\geq \frac{2}{3}\sqrt{\frac{AC_1 \cdot AB_1}{AC \cdot AB}} \\
&= \frac{2}{3}\sqrt{\frac{(AB_1C_1)}{(ABC)}} \\
&\geq \frac{2}{3}\sqrt{\frac{E_1 + E_2}{(ABC)}},
\end{aligned}
$$

pa tražena nejednakost slijedi iz (2). Jednakost vrijedi onda i samo onda ako je $AC_1/AC = AB_1/AB$ i $(AB_1C_1) = E_1 + E_2$, tj. ako i samo ako je pravac ℓ paralelan sa BC i sadrži G.

6.4. Da bismo dokazali gornju ogradu u zadatku, neka je $\mathcal{F}$ proizvoljna familija tročlanih podskupova skupa $\{1, \ldots, n\}$, tako da je $|A \cap B| \leq 1$ za svako $A, B \in \mathcal{F}$. Svi dvočlani podskupovi svih elemenata od $\mathcal{F}$ moraju biti međusobno različiti. Svaki skup $A \in \mathcal{F}$ sadrži $\binom{3}{2} = 3$ različita dvočlana podskupa za koje se zahtijeva da budu svi međusobno različiti. Prema tome, kako je ukupan broj dvočlanih podskupova od $\{1, \ldots, n\}$ jednak $\binom{n}{2}$, imamo

$$
3|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{2}. \tag{1}
$$

Budući da je $\mathcal{F}$ bio proizvoljan, slijedi da je

$$f(n) \leq \frac{1}{3}\binom{n}{2} = \frac{n^2 - n}{6}, \tag{2}$$

čime je dokazana gornja ograda.

Da bismo dokazali donju ogradu u nejednakosti, promatrajmo familiju $\mathcal{F}_0$ svih tročlanih podskupova $A = \{a, b, c\}$ od $\{1, \ldots, n\}$ takvih da je $a + b + c = n$, ili $a + b + c = 2n$. Ako je $a + b + c_1 \in \{n, 2n\}$ i $a + b + c_2 \in \{n, 2n\}$, tada je očito $c_1 = c_2$ (inače bismo imali $|c_1 - c_2| = n$, što je nemoguće zbog $c_1, c_2 \in \{1, \ldots, n\}$). Prema tome, familija $\mathcal{F}_0$ posjeduje tražena svojstva i stoga je $f(n) \geq |\mathcal{F}_0|$. Sada ćemo procijeniti $|\mathcal{F}_0|$.

Za izbor proizvoljnog skupa $A = \{a, b, c\} \in \mathcal{F}_0$, imamo n mogućnosti za a, i (za učvršćeno a) barem $n - 4$ mogućnosti za izbor b (jer je $b \neq a$, $b \neq (n - a)/2$, $b \neq (2n - s)/2$, $b \neq s - 2a$, i $1 \leq b \leq n$, gdje je $s = a + b + c \in \{n, 2n\}$; ti se uvjeti dobivaju odmah iz činjenice da je skup $\{a, b, c\}$ tročlan, tj. $a \neq b$, $b \neq c$ i $c \neq a$). Na taj način mi ustvari odabiremo uređene trojke (a, b, c) u $\mathcal{F}_0$. Kako se tročlani skupovi mogu permutirati na $3! = 6$ načina, slijedi da se svaki $A \in \mathcal{F}_0$ broji točno 6 puta. Iz prethodnog dobivamo

$$6|\mathcal{F}_0| \geq n(n - 4),$$

tj.

$$f(n) \geq |\mathcal{F}_0| \geq \frac{n^2 - 4n}{6}.$$

Time je dokazana i donja ograda u zadatku.

NAPOMENA 1. Moguće je dobiti i nešto bolju donju ogradu, i to na sljedeći način. Primijetimo da je uvjet $b \neq (n-a)/2$ u gornjem izvodu "efektivan" samo za one a, $1 \leq a \leq n$, za koje je $a \equiv n \pmod 2$. Isto tako je uvjet $b \neq (2n - a)/2$ "efektivan" jedino za parne a. Slijedi da se za neparne n (i fiksiran a) broj b može odabrati na barem

$$\begin{cases} n - 2 \text{ načina, za neparno } a \\ n - 4 \text{ načina, za parno } a. \end{cases}$$

Koristeći se argumentom sličnim kao prije, dobivamo da je

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n(n-3)}{6} & \text{za neparne } n \\ \frac{1}{6}\left[\frac{n}{2}(n-2) + \frac{n}{2}(n-4)\right] = \frac{n(n-3)}{6} & \text{za parne } n. \end{cases}$$

Prema tome je konačno

$$f(n) \geq \frac{n(n-3)}{6}.$$

Alternativno rješenje i poopćenje. Dokažimo donju ogradu definirajući opet:

$$\mathcal{F}_0 = \left\{ \{a, b, c\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\} \colon a + b + c \in \{n, 2n\},\ a \neq b \neq c \neq a \right\}.$$

Kao što smo vidjeli u prethodnom rješenju, skup $\mathcal{F}_0$ ima svojstva (i) i (ii). Ideja je da se efektivno izračuna kardinalni broj tog skupa.

Jasno je da svaki skup $\{a,b,c\} \in \mathcal{F}_0$ definira točno šest različitih uređenih trojki njegovih elemenata. Prebrojit ćemo sve uređene trojke (a,b,c) iz $\mathcal{F}_0$.

Ako su $a, b \in \{1,\dots,n\}$ bilo koja dva elementa za koja je $a \neq b$, tada je c određen jednoznačno:

1) ako je $a+b<n$, tada $c = n-(a+b)$;
2) ako je $a+b \geq n$, tada $c = 2n-(a+b)$.

Iz svih takvih parova (a,b) isključit ćemo one, za koje je odgovarajući c jednak a ili b (vidi definiciju familije $\mathcal{F}_0$). Tako dolazimo do sljedeće dvije mogućnosti:

1') Neka je $a+b<n$. Tada je $c=a \iff 2a+b=n$ i $c=b \iff a+2b=n$;
2') Neka je $a+b \geq n$. Tada je $c=a \iff 2a+b=2n$ i $c=b \iff a+2b=2n$.

Prema tome, traženi broj uređenih trojki (a,b,c) bit će jednak broju svih parova koji preostanu u 'kvadratu'

$$\{\,(a,b)\colon a,b \in \{1,\dots,n\}\,\}$$

kad uklonim točke na 'pravcima'

$$\begin{gathered} a=b \\ 2a+b=n, \quad a+2b=n, \\ 2a+b=2n, \quad a+2b=2n. \end{gathered}$$

Prebrojmo sve takve parove (a,b). Razmotrimo sljedeće četiri mogućnosti.

I. $n=2k \not\equiv 0 \pmod 3$. Iz 'kvadrata' koji ima $n^2=(2k)^2$ točaka, trebamo ukloniti

- $2k$ točaka na 'pravcu' $a=b$;
- $k-1$ točaka na 'pravcu' $a+2b=n$ (za $b=1,\dots,k-1$) i $k-1$ točaka na 'pravcu' $2a+b=n$ (za $a=1,\dots,k-1$);
- k točaka na 'pravcu' $a+2b=2n$ (za $b=k,\dots,2k-1$) i k točaka na 'pravcu' $2a+b=2n$ (za $a=k,\dots,2k-1$).

Preporučujemo da nacrtate 'kvadrat' i 'pravce' za, recimo, $n=8$.

Treba još vidjeti da između uklonjenih točaka nema onih koje bi se računale dva puta. Zaista, kad bi bilo:

$$2a+b=a+2b=n,$$

imali bi $a=b=n/3$, što je nemoguće. Stoga je:

$$6|\mathcal{F}_0| = (2k)^2 - 2k - 2(k-1) - 2k = n^2 - 3n + 2.$$

Preostali slučajevi se mogu promatrati na sličan način, pa zato detalje prepuštamo čitaocu.

II. $n = 2k + 1 \not\equiv 0 \pmod 3$. Ponavljanjem gore opisane procedure dolazimo do:

$$6|\mathcal{F}_0| = (2k+1)^2 - (2k+1) - 4k = n^2 - 3n + 2.$$

III. $n = 2k \equiv 0 \pmod 3$. U ovom slučaju je:

$$6|\mathcal{F}_0| = (2k)^2 - (2k) - 2(k-2) - 2(k-1) = n^2 - 3n + 6.$$

IV. $n = 2k + 1 \equiv 0 \pmod 3$. Ovdje je:

$$6|\mathcal{F}_0| = (2k+1)^2 - (2k+1) - 4(k-1) = n^2 - 3n + 6.$$

Na kraju dolazimo do sljedećeg zaključka:

$$|\mathcal{F}_0| = \begin{cases} \frac{n^2-3n+2}{6}, & n \not\equiv 0 \pmod 3 \\ \frac{n^2-3n+6}{6}, & n \equiv 0 \pmod 3), \end{cases}$$

tj.

$$|\mathcal{F}_0| = \left\lfloor \frac{n^2 - 3n}{6} \right\rfloor + 1.$$

Odatle je jasno da

$$f(n) > \frac{n^2 - 3n}{6} \geq \frac{n^2 - 4n}{6}.$$

NAPOMENA 2. Primijetite da familija $\mathcal{F}_0$ nije nužno maksimalna, tj. njen kardinalni broj može biti i strogo manji od $f(n)$. Npr., ako je $n = 8$, tada prema gornjoj formuli dobivamo $|\mathcal{F}_0| = 7$. S druge strane, familija

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = \big\{ &\{1,2,8\},\ \{2,3,4\},\ \{4,5,6\},\ \{6,7,8\}, \\ &\{1,3,6\},\ \{2,5,7\},\ \{1,4,7\},\ \{3,5,8\} \big\} \end{aligned}$$

ispunjava uvjete (i) i (ii), i sadrži 8 elemenata.

7.1. Neposrednim računom se dobiva

$$\begin{aligned} a_1 &\equiv 1 \pmod{11} \\ a_2 &\equiv 3 \pmod{11} \\ a_3 &\equiv 9 \pmod{11} \\ a_4 &\equiv 0 \pmod{11} \\ a_5 &\equiv 10 \pmod{11} \\ a_6 &\equiv 4 \pmod{11} \\ a_7 &\equiv 6 \pmod{11} \\ a_8 &\equiv 0 \pmod{11} \\ a_9 &\equiv 1 \pmod{11} \\ a_{10} &\equiv 0 \pmod{11} \\ a_{11} &\equiv 0 \pmod{11}. \end{aligned}$$

Prema tome je zbog relacije u zadatku za svako $n \geq 10$ ispunjeno $a_{n+2} \equiv 0 \pmod{11}$. Odgovor je:

$$n \in \{4, 8\} \cup \{n \in \mathbf{N} \colon n \geq 10\}.$$

Alternativno rješenje. Iz rekurzivne relacije u zadatku odmah vidimo da za $n \geq 3$ vrijedi

$$\begin{aligned}
a_n - a_{n-1} &= n(a_{n-1} - a_{n-2}) \\
a_{n-1} - a_{n-2} &= (n-1)(a_{n-2} - a_{n-3}) \\
&\vdots \\
a_4 - a_3 &= 4(a_3 - a_2) \\
a_3 - a_2 &= 3(a_2 - a_1).
\end{aligned}$$

Nakon uzastopnih uvrštavanja dobivamo:

$$a_n - a_{n-1} = 3 \cdot 4 \ldots \cdot n \cdot (a_2 - a_1) = n!$$

tj.

$$a_n = a_{n-1} + n!, \tag{1}$$

dakle

$$a_n = 1! + 2! + 3! + \cdots + n!$$

Sada imamo redom

$$\begin{gathered}
a_1 = 1 \quad a_2 = 3 \quad a_3 = 9 \equiv -2 \\
a_4 \equiv -2 + 2 \cdot 3 \cdot 4 = 0 \quad a_5 \equiv 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \equiv -1 \quad a_6 \equiv -1(-1) \cdot 6 \equiv -7 \equiv 4
\end{gathered}$$

i na sličan način $a_7 \equiv 6$, $a_8 \equiv 0$, $a_9 \equiv 1$, $a_{10} \equiv 0$. Sve su kongruencije modulo 11. Kako za $n \geq 11$ vrijedi $n! \equiv 0$, to iz (1) slijedi da je tada $a_n \equiv 0$, kao i za $n = 4, 8$.

7.2. Stavljajući $b_i = ix^i$, možemo pisati:

$$(x + 2x^2 + \cdots + nx^n)^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot \sum_{n=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_i b_j.$$

Stupanj monoma $b_i b_j$ je jednak $i + j$. Dakle, umjesto da sumiramo brojeve a_i, $i = n+1, \ldots, 2n$, dovoljno je sumirati produkte $b_i b_j$ za $x = 1$, takve da je $i + j \geq n + 1$. Kako je $b_i b_j \,|_{x=1} = ij$, možemo pisati

$$\begin{aligned}\sum_{i=n+1}^{2n} a_i &= \sum_{\substack{i,j\le n\\ i+j>n}} ij = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=n-i+1}^{n} ij = \\ &= \sum_{i=1}^{n} i\cdot\frac{i(2n-i+1)}{2} = \frac{2n+1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^3 \\ &= \frac{2n+1}{2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{2}\frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{1}{24}(n+1)(5n^2+5n+2),\end{aligned}$$

gdje smo koristili poznate sumacione identitete, koji se lako dokazuju indukcijom.

Alternativno rješenje. Provedimo dokaz tvrdnje indukcijom. Za $n = 1$ se tvrdnja provjerava direktno. Označimo polinom naveden u zadatku sa $f_n(x)$ i definirajmo

$$S_n = a_{n+1} + \cdots + a_{2n}.$$

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za n. Tada je

$$\begin{aligned}f_{n+1}(x) &= b_0 + b_1x + \cdots + b_{2n+2}x^{2n+2} = \\ &= (x + \cdots + nx^n + (n+1)x^{n+1})^2 = \\ &= (x + \cdots + nx^n)^2 + (n+1)^2x^{2n+2} + 2(x + \cdots + nx^n)(n+1)x^{n+1} \\ &= a_0 + a_1x + \cdots + a_{2n}x^{2n} \\ &\quad + [2(n+1)x^{n+2} + \ldots 2nx^{2n+1} + (n+1)^2x^{2n+2}],\end{aligned}$$

odakle slijedi

$$\begin{aligned}S_{n+1} &= b_{n+2} + \cdots + b_{2n+2} \\ &= a_{n+2} + \cdots + a_{2n} + 2(n+1)(1 + \cdots + n) + (n+1)^2 \\ &= (S_n - a_{n+1}) + (n+1)^3.\end{aligned} \tag{1}$$

Treba još jedino odrediti a_{n+1}, tj. koeficijent uz x^{n+1} za polinom

$$f_n(x) = (x + 2x^2 + \cdots + nx^n)\cdot(x + 2x^2 + \cdots + nx^n).$$

Uvrštavajući

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= 1\cdot n + 2\cdot(n-2)\cdots + n\cdot 1 = \sum_{i=1}^{n} i(n+1-i) = \\ &= (n+1)\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} i^2 = (n+1)\frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)\end{aligned}$$

u (1), dobivamo

$$S_{n+1} = \frac{1}{24}(n+1)(n+2)[5(n+1)^2 + 5(n+1) + 2],$$

čime je tvrdnja dokazana.

7.3. a) Dokažimo najprije da visine trokuta $\triangle ABC$ raspolavljaju kutove $\angle C_1A_1B_1$, $\angle A_1B_1C_1$ i $\angle B_1C_1A_1$. Neka je H ortocentar trokuta $\triangle ABC$.

Slika 7.3.

Dovoljno je dokazati da je $\angle B_1C_1C = \angle A_1C_1C$. Kako je $\angle HC_1B = \angle HA_1B = \pi/2$, četverokut HC_1BA_1 je tetivan, pa je $\angle HC_1A_1 = \angle HBA_1 = \angle B_1BA_1$. Slično je $\angle HC_1A = \angle HB_1A$, dakle je četverokut HB_1AC_1 tetivan, i zato $\angle B_1C_1H = \angle B_1AH = \angle B_1AA_1$. Na kraju je $\angle BB_1A = \angle AA_1B = \pi/2$, pa iz tetivnosti četverokuta ABA_1B_1 slijedi

$$\angle B_1C_1C = \angle B_1C_1H = \angle B_1AA_1 = \angle B_1BA_1 = \angle HC_1A_1 = \angle A_1C_1C,$$

čime je tvrdnja pod a) dokazana.

b) Neka je S središte opisane kružnice. Iz a) slijedi da je H središte upisane kružnice trokutu $\triangle A_1B_1C_1$, a ona je opisana trokutu $\triangle A_2B_2C_2$. Dužine B_1C_1 i A_1C_1 tangiraju tu kružnicu, pa je $HA_2 \perp B_1C_1$ i $HB_2 \perp A_1C_1$. Kako je HC_1 simetrala kuta $\angle A_2C_1B_2$, to su trokuti $\triangle HA_2C_1$ i $\triangle HB_2C_1$ sukladni. Stoga je HC_1 simetrala dužine A_2B_2, dakle $A_2B_2 \perp HC_1 \perp AB$ i time $A_2B_2 \| AB$. Slično je $B_2C_2 \| BC$ i $C_2A_2 \| CA$, pa trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle A_2B_2C_2$ imaju paralelne stranice. Dakle, Eulerovi pravci su im paralelni, a kako je točka H ortocentar trokuta

$\triangle ABC$ i središte upisane kružnice trokuta $\triangle A_2B_2C_2$, Eulerovi pravci su im jednaki.

7.4. Za brojeve 1, 3, 6, 8, su razlike svaka dva broja prosta. Prema uvjetu u zadatku vrijednosti $f(1)$, $f(3)$, $f(6)$, $f(8)$ moraju biti sve međusobno različite, pa je skup A barem četveročlan.

Definirajmo $A = \{1, 2, 3, 4\}$ i $f(n) \equiv n \pmod 4$. Iz $f(i) = f(j)$ slijedi $i \equiv j \pmod 4$, tj. $|i - j|$ je djeljivo sa četiri, dakle složen broj. Prema tome minimalan broj elemenata skupa A je jednak 4.

8.1. Pokažimo da je $\overline{MK} = \overline{KL} = \overline{MN} = \overline{NP}$. Iz

$$\angle OAB = \angle OBA = \frac{1}{2}(\pi - 2\angle ACB) = \frac{\pi}{2} - \angle ACB,$$
$$\angle AKL = \angle BNP = \angle ACB$$

slijedi

$$\overline{MK} = \overline{MN} = \overline{KL}. \tag{1}$$

Trokuti AKL i PNB su slični (oba su slični sa trokutom ABC, pa je

$$\overline{AK} \cdot \overline{BN} = \overline{KL} \cdot \overline{PN}. \tag{2}$$

Trokuti AMK i MBN su također slični, odakle dobivamo

$$\overline{AK} \cdot \overline{BN} = \overline{MK} \cdot \overline{MN}. \tag{3}$$

Iz (1), (2) i (3) slijedi $\overline{MK} = \overline{MN} = \overline{KL} = \overline{NP}$. Prema tome je $KN \parallel PL$, i odatle $\angle MLP = \angle MKN = \angle ACB$.

8.2. Neka je P površina trokuta i $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Prema Heronovoj formuli imamo da je $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, $(s-a)+(s-b)+(s-c) = s$. Za prirodan broj k neka je $s-a = k^4$, $s-b = 4k^2$ i $s-c = 4$. Tada je $s = (k^2+1)^2$ i

$$a = 4(k^2+1), \quad b = k^4+4, \quad c = k^2(k^2+4).$$

Neka je k neparan broj i $k > 1$. Tada su a i c relativno prosti brojevi pa slijedi (i) i (ii). Iz $h_a = 2P/a$ i slično za ostale visine, dobivamo

$$h_a = \frac{2k^3(k^2+2)}{k^2+1}, \quad h_b = \frac{8k^3(k^2+2)}{k^4+4}, \quad h_c = \frac{8k(k^2+2)}{k^2+4}.$$

Kako je $k^4+4 = (k^2-2)(k^2+2)+8$ i k neparan, razlomci kojim su izraženi h_b i h_c ne mogu se skratiti, dok se razlomak kojim je prikazan h_a može skratiti sa 2. Time je dokazano i (iii).

8.3. Zbog konveksnosti je konveksni poligon u zadatku sadržan unutar "zvjezdastog" dvanaesterokuta na slici, čiji su vrhovi A_i, M_i, $i = 1, \ldots, 6$. Iz istog razloga je površina dijela konveksnog poligona koji se nalazi unutar unije sličnih jednakostraničnih trokuta $A_1M_1A_2$ i $A_2M_2A_3$ manja ili jednaka od površine svakog od njih (dokažite to!). Promatrajući na isti način preostale dijelove konveksnog poligona koji su izvan pravilnog šesterokuta, zaključujemo da površina dijela konveksnog poligona koji se nalazi izvan pravilnog šesterokuta nije veća od trostruke površine jednakostraničnog trokuta sa stranicom jednakom duljini stranice

Slika 8.3.

pravilnog šesterokuta, tj. nije veća od polovine površine pravilnog šesterokuta. Odatle slijedi tražena nejednakost.

Jedankost vrijedi ako i samo ako se vrhovi opisanog koneksnog poligona nalaze na stranicama "zvjezdastog" dvanaesterokuta na slici, tj. ako i samo ako je taj koneksni poligon trokut.

8.4. Pretpostavimo, naprotiv, da takva bijekcija postoji. Za $m = n = 1$ dobivamo $f(1) + 3f(1)^2 = 0$, tj. $f(1) = 0$. Zbog bijektivnosti f je $f(n) \geq 1$ za sve $n \geq 2$. Ako su $m, n \geq 2$, tada je $f(mn) \geq 1 + 1 + 3 = 5$, pa je $f(k) \geq 2$ za svaki složen broj k. Prema tome postoje različiti prosti brojevi n_1 i n_3 takvi da je $f(n_1) = 1$, $f(n_3) = 3$ i prirodan broj n_8 takava da je $f(n_8) = 8$. Tada je $f(n_3^2) = 3 + 3 + 3 \cdot 3 \cdot 3 = 33$ i $f(n_1 n_8) = 1 + 8 + 3 \cdot 1 \cdot 8 = 33$. Odatla slijedi $n_3^2 = n_1 \cdot n_8$, tj. $n_1 \,|\, n_3^2$, a ovo je nemoguće, jer su n_1 i n_3 različiti prosti brojevi.

Slika 1.

RJEŠENJA PRIJEDLOGA ZADATAKA

1. Neka su točke u ravnini obojene kao u zadatku. Promatrajmo konfiguraciju (vidi sliku 1) u kojoj svi segmenti imaju jediničnu duljinu.

Neka A ima, recimo, crvenu boju. Tada točke B i C moraju biti plava i zelena (u nekom poretku). Prema tome F mora biti crvena. Slično, G mora biti crvena. Međutim tada F i G čine par točaka na međusobnoj udaljenosti 1 koje su iste boje.

2. Najprije ćemo riješiti sličan problem za familiju S podskupova od $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$, od kojih nijedan ne sadrži drugi. Neka je S familija podskupova A_n od $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$, definirana sa

$$A_n = \{(p, q) \colon p \neq n \text{ i } \quad q \geq n\},$$

za svako $n \in \mathbf{N}$.

Primijetite da ako je $m \neq n$, tada $A_m \not\subseteq A_n$. Pretpostavimo da B presijeca svaki A_n. Tada skup B mora biti beskonačan. Ako postoji n_0 tako da je skup

$$\{q \colon (n_0, q) \in B\}$$

beskonačan, tada neka je $(n_0, q) \in B$ i $B' = B \setminus \{(n_0, q)\}$. Ako ne postoji takav n_0, neka je (p, q) proizvoljno i stavimo $B' = B \setminus \{(p, q)\}$. U oba slučaja B' presijeca svaki skup A_n. To pokazuje da je $C(S)$ prazan skup.

Slika 4.

Neka je $f\colon \mathbf{N}\times\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ bijekcija takva da je $f(1990, 1989) = 1989$. Definirajmo

$$\mathcal{F} = \{f(A_n)\colon A_n \in S\}.$$

Familija $\mathcal{F}$ ispunjava uvjete u zadatku.

3. Postoje prirodni brojevi x za koje je $n_x \neq 0$; neka je m najveći među njima i F strana sa m vrhova. Postoji m različitih strana F_i koje su susjedne za F; broj v_i vrhova strane F_i zadovoljava uvjet $3 \le v_i \le m$, pa stoga imamo najviše $(m-2)$ vrijednosti k za v_i.

Ako postoji k tako da barem tri strane F_i imaju k vrhova, (i) je istinito.

Ako (i) nije ispunjeno, imat ćemo bar dvije vrijednosti k i h tako da dvije strane F_i posjeduju k vrhova, a dvije h vrhova; u ovom slučaju je (ii) ispunjeno.

4. Traženih n brojeva ćemo konstruirati ponavljajući postupak privremenih odabira. U prvom koraku odaberimo najmanji element u svakom retku i zatim među njima najveći u svakom stupcu (ako postoji).

Ako je u svakom stupcu odabran samo jedan broj, zadatak je riješen. U protivnom imamo stupce u kojima su elementi odabrani iz redaka bili ispušteni. Takve ćemo retke zvati slobodnima, i prijeći na sljedeći korak.

Za svaki sljedeći korak biramo iz svakog slobodnog retka najmanji među elementima koji još nisu birani. Ako svaki stupac sadrži odabrani broj, zadatak je riješen. U protivnom biramo u svakom stupcu najveći broj (ako postoji), i ispuštene retke nazovimo slobodnima, te prijeđimo na sljedeći korak.

Primijetimo da bilo koji redak može biti ispušten najviše $n-1$ puta. Prema tome u najgorem slučaju možemo imati ne više od $n(n-1)+1$ koraka. Dakle, opisana konstrukcija je konačna (tj. s konačnim brojem koraka).

Posljednji izbor od n brojeva ima tražena svojstva. Zaista, ako je a_{ii} broj odabran u i–tom retku i a_{ik} takav da je $a_{ik} < a_{ii}$, tada je u našoj konstrukciji morao biti korak u kojem je broj odabran u retku bio a_{ik}. Međutim taj broj je bio izostavljen tokom konstrukcije odabirom bar jednog broja u k–tom stupcu većeg od a_{ik}. Prema tome je konačno odabran broj u stupcu k veći od a_{ik}.

5. Iz rekurzivne relacije dobivamo

$$P_{n+1}(x) = P_n(x)\frac{P_n^2(x) + P_{n-1}^2(x)}{1 + P_n(x)P_{n-1}(x)} - P_{n-1}(x),$$

tj.

$$\frac{P_{n+1}(x) + P_{n-1}(x)}{P_n(x)} = \frac{P_n^2(x) + P_{n-1}^2(x)}{1 + P_n(x)P_{n-1}(x)}. \tag{1}$$

S druge strane je

$$\begin{aligned}
\frac{P_n^2(x) + P_{n-1}^2(x)}{1 + P_n(x)P_{n-1}(x)} &= \frac{\left(\frac{P_{n-1}^3(x) - P_{n-2}(x)}{1+P_{n-1}(x)P_{n-2}(x)}\right)^2 + P_{n-1}^2(x)}{1 + \frac{P_{n-1}^3(x) - P_{n-2}(x)}{1+P_{n-1}(x)P_{n-2}(x)}P_{n-1}(x)} = \\
= \frac{\big(P_{n-1}^3(x) - P_{n-2}(x)\big)^2 + P_{n-1}^2(x)\big(1 + P_{n-1}(x)P_{n-2}(x)\big)^2}{\big(1 + P_{n-1}(x)P_{n-2}(x)\big)^2 + \big(P_{n-1}^3(x) - P_{n-2}(x)\big)P_{n-1}(x)\big(1 + P_{n-1}(x)P_{n-2}(x)\big)} \\
&= \frac{\big(1 + P_{n-1}^4(x)\big)\big(P_{n-1}^2(x) + P_{n-2}^2(x)\big)}{\big(1 + P_{n-1}^4(x)\big)\big(1 + P_{n-1}(x)P_{n-2}(x)\big)} \\
&= \frac{P_{n-1}^2(x) + P_{n-2}^2(x)}{1 + P_{n-1}(x)P_{n-2}(x)}.
\end{aligned}$$

Prema tome je

$$\begin{aligned}
\frac{P_n^2(x) + P_{n-1}^2(x)}{1 + P_n(x)P_{n-1}(x)} = \cdots &= \frac{P_2^2(x) + P_1^2(x)}{1 + P_2(x)P_1(x)} = \\
&= \frac{x^6 + x^2}{1 + x^4} = x^2.
\end{aligned}$$

Konačno iz (1) dobivamo

$$P_{n+1}(x) + P_{n-1}(x) = x^2 P_n(x),$$

i tvrdnja slijedi lako indukcijom.

NAPOMENA. Ovaj zadatak je u vezi s problemom br. 6 s Međunarodne matematičke olimpijade održane 1988. u Australiji.

6. Iz prve jednadžbe dobivamo

$$8 = 2^{x^2+y} + 2^{x+y^2} \geq 2\sqrt{2^{x^2+y} \cdot 2^{x+y^2}},$$

tj.

$$4 \geq x^2 + x + y + y^2.$$

Kako je $(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$, imamo nadalje

$$(x+y)^2 + 2(x+y) - 8 \leq 0.$$

Iz ove relacije zaključujemo da je

$$x + y \leq -1 + \sqrt{9} = 2.$$

S druge strane, iz $x, y \geq 0$ i iz

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 \leq 2(x+y)$$

slijedi, korištenjem druge jednadžbe, da je

$$x + y \geq 2$$

i stoga $x + y = 2$.
Sada nakon kvadriranja druge jednadžbe, koristeći $x+y=2$, slijedi da je $\sqrt{xy} = 1$, tj. $xy = 1$. To zajedno sa $x + y = 2$ povlači $x = y = 1$.

7. Indukcijom ćemo dokazati da je $a_n > a_{n+1}$. Za $n = 1$ tvrdnja je trivijalna.

Pretpostavimo da za dano n vrijedi $a_{n-1} > a_n$, i dokažimo da je tada $a_n > a_{n+1}$. Kako je

$$a_n = \frac{a_{n-1}(n-1)^{k+1} + n^k}{n^{k+1}} > \frac{a_n(n-1)^{k+1} + n^k}{n^{k+1}},$$

imamo

$$(*) \qquad a_n\big(n^{k+1} - (n-1)^{k+1}\big) > n^k.$$

Zbog
$$a_{n+1} = \frac{a_n n^{k+1} + (n+1)^k}{(n+1)^{k+1}},$$
dosta je dokazati da je
$$\big((n+1)^{k+1} - n^{k+1}\big)a_n > (n+1)^k.$$
Iz $(*)$ zaključujemo da je dovoljno dokazati
$$\frac{n^k}{n^{k+1} - (n-1)^{k+1}} \geq \frac{(n+1)^k}{(n+1)^{k+1} - n^{k+1}}.$$
To možemo zapisati u ekvivalentnom obliku kao
$$\frac{n^{k+1} - (n-1)^{k+1}}{n^k} \leq \frac{(n+1)^{k+1} - n^{k+1}}{(n+1)^k},$$
ili kao
$$n\bigg(1 - (\frac{n-1}{n})^{k+1}\bigg) \leq (n+1)\bigg(1 - (\frac{n}{n+1})^{k+1}\bigg),$$
tj.
$$n\bigg((\frac{n}{n+1})^{k+1} - (\frac{n-1}{n})^{k+1}\bigg) \leq 1 - (\frac{n}{n+1})^{k+1},$$
tj.
$$n^{2k+2} - (n^2-1)^{k+1} \leq n^k\big((n+1)^{k+1} - n^{k+1}\big),$$
tj.
$$(k+1)n^{2k} - \binom{k+1}{2}n^{2k-2} + \cdots \leq n^k\big((k+1)n^k + \binom{k+1}{2}n^{k-1} + \ldots\big),$$
što je očito istina.

8. Uvrštavajući $x = 0$ i zatim $y = 0$, dobivamo

(1) $$f(f(y)) = y + f(0), \quad f(x + f(0)) = f(x).$$

Sada je
$$f(x) = f(x + f(0)) = f(f(f(x))) = f(x) + f(0),$$
i prema tome $f(0) = 0$. Stoga iz (1) slijedi $f(f(y)) = y$. Nadalje je
$$f(x+y) = f\big(x + f(f(y))\big) = f(x) + f(y)$$
i neprekidnost od f povlači $f(x) = ax$ za neko $a \in \mathbf{R}$. Iz relacije u zadatku dobivamo
$$a(x + ay) = ax + y$$

Slika 9.

za sve $x, y \in \mathbf{R}$, tj. $a = \pm 1$. Prema tome je

$$f(x) = x \quad \text{ili} \quad f(x) = -x.$$

9. Označimo sa M točku u kojoj pravac EF siječe pravac AB. Primijetimo da točka M pripada segmentu AB. Pokazat ćemo da je M fiksna točka, tj.

$$\frac{MB}{MA} = \frac{BN}{AB}, \tag{1}$$

gdje je N točka u kojoj pravac CE siječe pravac AB.

Primjenom Menelajevog teorema na trokut ABD, s obzirom na pravac EF, dobivamo

$$\frac{MB}{MA} \cdot \frac{FA}{FD} \cdot \frac{ED}{EB} = 1,$$

tj.

$$\frac{MB}{MA} = \frac{FD}{FA} \cdot \frac{EB}{ED}. \tag{2}$$

Kako je CD paralelno sa AB, to je

$$\triangle AFB \sim \triangle DFC, \quad \triangle ECD \sim \triangle ENB,$$

i stoga

$$\frac{FD}{FA} = \frac{CD}{AB}, \quad \frac{EB}{ED} = \frac{BN}{CD}.$$

Uvrštavanjem tih relacija u (2) dobivamo (1).

10. Neka je E točka na pravcu BC takva da je $AE = AB$ i označimo sa AH visinu jednakokračnog trokuta BEA. Promatrajmo slučaj kad je E između točaka B i C (ako je B između E i C ili $AH \perp BC$, zaključujemo na sličan način). Kako je

$$AC^2 - CH^2 = AB^2 - BH^2,$$

Slika 10.

imamo

$$\begin{aligned} AC^2 - AB^2 = CH^2 - BH^2 = \\ = (CH - BH)(CH + BH) = (CH - EH)BC = \\ = CE \cdot BC. \end{aligned}$$

Jednakost $BC = 2AC - 2AB$ povlači

$$2AB + \frac{1}{2}BC = 2CE. \tag{1}$$

a) Ako je $\angle ABD = 2\angle ADB$, tada je $\angle AEB = 2\angle ADE$ i trokut ADE je jednakokračan, tako da je $AB = AE = DE$. Prema tome (1) pokazuje da je $2DE + \frac{1}{2}BC = 2CE$, što je ekvivalentno sa $BD = 3CD$.
b) Obratno, iz $BD = 3CD$ slijedi da je $2DE + \frac{1}{2}BC = 2CE$, pa (1) povlači $AB = DE$. Zbog $AB = AE$ imamo $AE = DE$. Stoga je $\angle ABD = 2\angle ADB$.

11. a) Pretpostavimo da je ispunjena nejednakost u zadatku. Ako je $A = B$, tada je $PA \geq PC$ za sve P i odatle $A = C$.

Neka je $A \neq B$. Najprije ćemo dokazati da C leži na pravcu AB. Pretpostavimo, naprotiv, da $C \notin AB$ i neka je P točka na simetrali segmenta AB takva da P i C leže na suprotnim stranama simetrale segmenta AC. Tada je $PA = PB$, $PA < PC$, tako da imamo

$$PA^{1989} + PB^{1989} = 2PA^{1989} < 2PC^{1989},$$

što je kontradikcija. Prema tome C leži na pravcu AB.

Označimo sa O središte segmenta AB. Bez gubitka općenitosti možemo pretpostaviti da je O između točaka B i C. Promatrajmo točku $P \in AB$ desno od B i neka je $PO = x$, $OC = c$, $AO = BO = a$. Koristeći se nejednakošću u zadatku, dobivamo da je

$$f(x) = (x-a)^{1989} + (x+a)^{1989} - 2(x+c)^{1989} \geq 0$$

za sve $x \geq 0$. Lako se vidi da je $f(x)$ polinom čiji slobodni član je jednak $-2c^{1989}$. Kako je $c \geq 0$ i $f(x) \geq 0$ za sve $x \geq 0$, slijedi da je $c = 0$, tj. C je polovište segmenta AB.

b) Obratno, neka je C polovište segmenta AB. Tada je

$$\frac{PA + PB}{2} \geq PC$$

za sve točke P, i iz poznate nejednakosti

$$\frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^n, \quad \forall x, y \geq 0$$

dobivamo

$$\frac{PA^{1989} + PB^{1989}}{2} \geq \left(\frac{PA + PB}{2}\right)^{1989} \geq PC^{1989},$$

što je i trebalo dokazati.

NAPOMENA. Tvrdnja vrijedi i u slučaju ako se 1 989 zamijeni proizvoljnim prirodnim brojem n.

12. Neka je X proizvoljna točka iz $ABCD$. Označimo sa M, N, P, Q ortogonalne projekcije točke X na odgovarajuće strane BCD, CAD, ABD, ABC, i neka je

$$XM = x, \quad XN = y, \quad XP = z, \quad XQ = t.$$

Kako su dužine XM, XN i XP u parovima okomite, imamo

$$V_{MNPX} = \frac{1}{6} xyz.$$

Slika 12.

Lako je provjeriti da je

$$V_{PQMX} = \frac{1}{6} xzt \sin\alpha,$$

gdje je α kut između pravca XQ i njegove ortogonalne projekcije na ravninu (XPM). Kako su ravnine (XPM) i (ACD) paralelne, α je kut između visine piramide povučene iz vrha D i jedne od strana. Možemo pretpostaviti da je $AD = BD = CD = 1$. Tada je $AB = BC = CA = \sqrt{2}$ i $\sin\alpha = \sqrt{3}/3$. Stoga imamo

$$V_{PQMX} = \frac{1}{6}\frac{\sqrt{3}}{3} xzt, \quad V_{QMNX} = \frac{1}{6}\frac{\sqrt{3}}{3} xyt,$$

itd. Prema tome je

$$V(X) = V_{MNPQ} = \frac{1}{6}\big(xyz + \frac{\sqrt{3}}{3} t(xy + yz + zx)\big).$$

Neka su x', y', z' udaljenosti od točke Q do strana BCD, CAD i ABD piramide.

Tada je

$$\begin{aligned} x' &= x + t\sin\alpha = x + \frac{t}{\sqrt{3}}, \\ y' &= y + \frac{t}{\sqrt{3}}, \\ z' &= z + \frac{t}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Sada imamo

$$\begin{aligned} V(Q) &= \frac{1}{6}\big(x + \frac{t}{\sqrt{3}}\big)\big(y + \frac{t}{\sqrt{3}}\big)\big(z + \frac{t}{\sqrt{3}}\big) \\ &\geq \frac{1}{6}\big(xyz + \frac{\sqrt{3}}{3}t(xy + yz + zx)\big) = V(X), \end{aligned}$$

i jednakost vrijedi jedino za $t = 0$, tj. za $X = Q$. Prema tome možemo uzeti da točka X leži u trokutu ABC. U tom slučaju je $t = 0$ i

$$\frac{1}{6} = V_{ABCD} = \frac{1}{6}(x + y + z),$$

tj.

$$x + y + z = 1.$$

Kako je $V(X) = \frac{1}{6}xyz$, iz aritmetičko–geometrijske nejednakosti dobivamo da je $V(X)$ maksimalno ako je $x = y = z = \frac{1}{3}$, tj. kad je X težište trokuta ABC.

13. Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ vrhovi n–terokuta, α_i kut pri vrhu A_i,

$$a_1 = |A_1A_2|,\ a_2 = |A_2A_3|, \ldots, a_n = |A_nA_1|,$$

i S_i površina trokuta $A_{i-1}A_iA_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots n$ ($A_0 = A_n$, $A_{n+1} = A_1$). Tada je

$$2S_i = a_{i-1}a_i \sin\alpha_i.$$

Neka je $S = \min(S_1, S_2, \ldots, S_n)$. Imamo

$$2S \leq a_{i-1}a_i \sin\alpha_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

i

$$(2S)^n \leq \prod_{i=1}^n a_i^2 \prod_{i=1}^n \sin a_i \leq \prod_{i=1}^n a_i^2.$$

Koristeći nejednakost

$$\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n},$$

Slika 13.

dobivamo

$$2S \leq \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \right)^2.$$

Ako su p_i i q_i duljine projekcija stranice a_i na stranice kvadrata, tada je

$$a_i \leq p_i + q_i$$

tj.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \leq \sum_{i=1}^{n} p_i + \sum_{i=1}^{n} q_i \leq 4.$$

Prema tome je

$$S \leq \frac{8}{n^2}.$$

Alternativno rješenje. Neka su p_i' i q_i' odgovarajuće duljine projekcija dužine $A_{i-1}A_{i+1}$. Zadržavši oznake iz prošlog rješenja, kao direktnu posljedicu konveksnosti n–terokuta imamo:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i' \leq \sum_{i=1}^{n} (p_{i-1} + p_i) = 2 \sum_{i=1}^{n} p_i \leq 4,$$

i na sličan način $\sum_{i=1}^{n} q_i' \leq 4$. Tada iz

$$(p_1' + q_1') + (p_2' + q_2') + \cdots + (p_n' + q_n') \leq 8$$

dobivamo pomoću Dirichletova principa da postoji i takvo da je $p'_i + q'_i \leq 8/n$. Prema tome, za površinu pripadnog trokuta vrijedi

$$S_i \leq \frac{1}{2}p'_i q'_i \leq \frac{1}{2}p'_i(\frac{8}{n} - p'_i) \leq \frac{8}{n^2}.$$

14. Neka je $n_1 = n^{n^{n^n}} - n^{n^n}$ i $n_2 = n^{n^n} - n^n$. Tada imamo

$$n_1 = n^{n^n}(n^{n_2} - 1).$$

Pokazat ćemo da

$$(1) \qquad 3 \cdot 2^4 \,|\, n_2.$$

Primijetite da je $n_2 = n^n(n^{n^n - n} - 1)$ i $n^n - n$ je paran broj, prema tome $\varphi(3) \,|\, n^n - n$, i zato

$$(2) \qquad 3 \,|\, n_2.$$

Ako je n paran, tada $n^n \,|\, n_2$, odnosno

$$(3') \qquad 2^n \,|\, n_2$$

i $2^4 \,|\, n_2$ jer je $n \geq 3$. Ako je n neparan, $n = 2k+1$, tada je

$$\begin{aligned} n^n - n &= (2k+1)\big((2k+1)^{2k} - 1\big) = \\ &= (2k+1)\big((4k(k+1)+1)^k - 1\big) = \\ &= (2k+1)\big((8l+1)^k - 1\big) = 8p. \end{aligned}$$

Prema tome $8 \,|\, n^n - n$. Iz $\varphi(2^4) \,|\, n^n - n$ dobivamo

$$(3'') \qquad 2^4 \,|\, n^{n^2 - n} - 1.$$

Sada (1) slijedi iz (2), (3') i (3").

Relacija (1) povlači $\varphi(3^2) = 6 \,|\, n_2$, odakle je

$$(4) \qquad 3^2 \,|\, n^2(n^{n_2} - 1).$$

Slično $\varphi(13) \,|\, n_2$ i $\varphi(17) \,|\, n_2$, tako da

$$(5) \qquad 13 \,|\, n(n^{n_2} - 1)$$
$$(6) \qquad 17 \,|\, n(n^{n_2} - 1).$$

Iz (4), (5) i (6) zaključujemo da $1989 = 3^2 \cdot 13 \cdot 17 \,|\, n_1$.

15. Primijetimo da iz $a_k \equiv 0 \pmod{11}$ slijedi

$$\begin{aligned} a_{k+1} &\equiv 0^2 - 0 + 5 \equiv 5 \pmod{11}, \\ a_{k+2} &\equiv 5^2 - 5 + 5 \equiv 3 \pmod{11}, \\ a_{k+3} &\equiv 3^2 - 3 + 5 \equiv 0 \pmod{11}. \end{aligned}$$

Prema tome, dovoljno je dokazati djeljivost barem jednog od brojeva

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5$$

sa 11. Neposrednom provjerom dobivamo da

$$\begin{array}{llll} \text{iz} & a_0 \equiv 1,\,2,\,10 \pmod{11} & \text{slijedi} & a_3 \equiv 0 \pmod{11}, \\ \text{iz} & a_0 \equiv 3,\,9 \pmod{11} & \text{slijedi} & a_1 \equiv 0 \pmod{11}, \\ \text{iz} & a_0 \equiv 4,\,8 \pmod{11} & \text{slijedi} & a_5 \equiv 0 \pmod{11}, \\ \text{iz} & a_0 \equiv 5,\,7 \pmod{11} & \text{slijedi} & a_2 \equiv 0 \pmod{11}, \\ \text{iz} & a_0 \equiv 6 \pmod{11} & \text{slijedi} & a_4 \equiv 0 \pmod{11}. \end{array}$$

Time je tvrdnja dokazana.

16. Neka je $x_i = (a_i, S_i)$ i $y_i = [a_i, S_i]$. Tada imamo $x_i y_i = a_i S_i$ ($i = 3, 4, \ldots, 1989$) i relacija iz zadatka se može zapisati u obliku

$$a_i + S_i = x_i + \frac{a_i S_i}{x_i},$$

tj. $x_i^2 - (a_i + S_i)x_i + a_i S_i = 0$. Prema tome ako je $a_i \,|\, S_i$ tada imamo $x_i = a_i$.

Stoga možemo uzeti $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ i $a_i = 2^{i-3} \cdot 3$, $i \geq 3$, nakon čega je $S_i = 3 \cdot 2^{i-2}$, $i = 3, 4, \ldots, 1\,989$.

17. Neka je $x \leq y \leq z$, n neko rješenje. Očito je da vrijedi $z - x \geq y - x \geq 0$ i $z + x > y > 0$. Prema tome je $(z - x)(z + x) \geq y(y - x)$, tj.

$$z^2 \geq x^2 + y^2 - xy = \frac{x^3 + y^3}{x + y},$$

ili

$$x + y \geq \frac{x^3 + y^3}{z^2}.$$

Tada se lako vidi da je

$$z = nx^2y^2 - \frac{x^3 + y^3}{z^2} \geq nx^2y^2 - (x + y) > 0,$$

osim za $x = y = 1$, $n = 1, 2$ (u tom slučaju ne postoji rješenje problema). Međutim, zbog $z^2 \mid x^3 + y^3$ je

$$x^3 + y^3 \geq z^2 \geq (nx^2y^2 - (x+y))^2.$$

Prema tome je

$$n^2x^4y^4 \leq x^3 + y^3 + 2nx^2y^2(x+y) - (x+y)^2,$$

tj.

$$n^2x^4y^4 < 2nx^2y^2(x+y) + x^3 + y^3$$

ili

$$nxy < 2(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}) + \frac{1}{nx^3} + \frac{1}{ny^3}.$$

Ako je $x \geq 2$, tada imamo $y \geq x \geq 2$ i $nxy \geq 4$. Tada slijedi da je

$$2(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}) + \frac{1}{nx^3} + \frac{1}{ny^3} \leq 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} < 3,$$

što je kontradikcija. Stoga je $x = 1$, pa imamo

$$ny < 2 + \frac{2}{y} + \frac{1}{n} + \frac{1}{ny^3}.$$

Ako je $y \geq 4$, imamo $ny \geq 4$ i

$$2 + \frac{2}{y} + \frac{1}{n} + \frac{1}{ny^3} < 2 + \frac{2}{4} + 1 + \frac{1}{4} < 4,$$

što je nemoguće. Prema tome je $y \leq 3$. Nadalje $z^2 \mid x^3 + y^3$, tj. $z^2 \mid 1 + y^3$ i $z \geq y$, pa

(i) iz $y = 1$ slijedi $1 + y^3 = 2$, tj. $z = 1$;
(ii) iz $y = 2$ slijedi $1 + y^3 = 9$, tj. $z = 3$;
(iii) iz $y = 3$ slijedi $1 + y^3 = 28$, tj. z ne postoji.

Ako je $x = y = z = 1$, tada dobivamo $n = 3$. Ako je $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$, tada je $n = 1$.

Stoga su sva rješenja zadatka

$$(1,1,1,3) \quad (1,2,3,1) \quad (2,1,3,1) \quad (1,3,2,1)$$
$$(3,1,2,1) \quad (3,2,1,1) \quad (2,3,1,1).$$

18. Neka je z zajednički korijen polinoma $x^5 - px - 1$ i $x^2 - ax + b$. Ako je z racionalan, zbog $z^5 - pz - 1 = 0$ je $z = \pm 1$. Prema tome je $p = 0$ ili $p = 2$. Lako se vidi da $p = 0$ ili $p = 2$ ispunjavaju uvjete u zadatku.

Pretpostavimo da z nije racionalan. Tada iz

$$\begin{aligned} pz+1 = z^5 = z(az-b)^2 &= z(a^2z^2-2abz+b^2) = \\ &= z(a^2(az-b)-2abz+b^2) = (a^3-2ab)z^2+(b^2-a^2b)z = \\ &= (a^3-2ab)(az-b)+(b^2-a^2b)z = \\ &= (a^4-3a^2b+b^2)z+2ab^2-a^3b. \end{aligned}$$

Zaključujemo da je

$$\begin{aligned} a^4-3a^2b+b^2 &= p \\ 2ab^2-a^3b &= 1. \end{aligned}$$

Pomnožimo prvu jednadžbu sa $-2a$ i dodajmo je drugoj. Tada je

$$b = \frac{2a^5-2ap+1}{5a^3},$$

i uvrštavajući to u drugu jednadžbu, nakon kratkog računa dobivamo

$$a^{10}+3pa^6+11a^5-4p^2a^2+4pa-1=0.$$

Kako je a racionalan i p cijeli broj, dobivamo da je $a=\pm 1$.

Neka je $a=1$. Tada imamo $-4p^2+7p+11=0$ i stoga p nije cijeli broj.

Neka je $a=-1$. Tada je $-4p^2-p-11=0$, pa niti ovdje p nije cijeli broj.

Stoga su jedina rješenja $p=0$ i $p=2$.