Zahvaljujem Društvu matematičara Srbije (http://www.dms.org.rs/) i njegovom predsjedniku dr. Zoranu Kadelburgu na dopuštenju da iz časopisa "Matematički list za učenike osnovne škole" skeniram stranice koje sadrže zadatke i rješenja s republičkih natjecanja (SR Hrvatke) i saveznih natjecanja (SFRJ) i skenove objavim na web stranici http://public.carnet.hr/mat-natj .

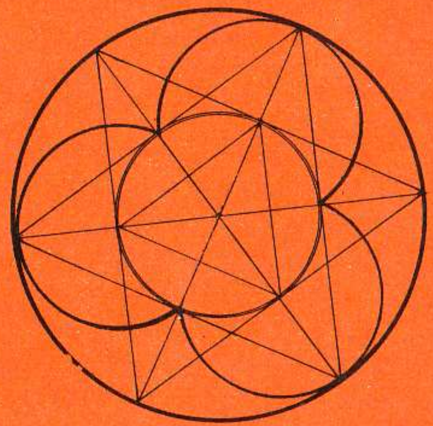
Antonija Horvatek
http://public.carnet.hr/~ahorvate/

# MATEMATIČKI LIST

ZA UČENIKE OSNOVNE ŠKOLE

XIX

1



BEOGRAD
1984.

SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATIČARA, FIZIČARA I ASTRONOMA JUGOSLAVIJE

**MATEMATIČKI LIST**

**za učenike osnovne škole**

God. XIX, broj 1 (1984)

Izlazi šest puta godišnje

**IZDAJE DRUŠTVO MATEMATIČARA SR SRBIJE**

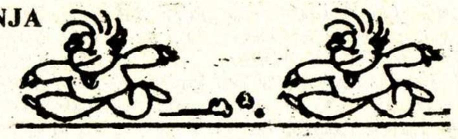
**Beograd, Knez Mihailova 35/IV, p. p. 728.**



**Oslobođeno plaćanja poreza na promet na osnovu rešenja Republičkog sekretarijata za kulturu SR Srbije br. 413-186-03 od 11. 1. 1973. godine**

**Štampa: Beogradski izdavačko-grafički zavod, Beograd, Bul. vojvode Mišića br. 17**

# MATEMATIČKA TAKMIČENJA



## XV SAVEZNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA BAR, 3. 6. 1984. g.

Posle 7 godina Savezno takmičenje je ponovo održano na Crnogorskom primorju. Osnovna škola «Jugoslavija« u Baru bila je domaćin takmičenja. Ovog puta učestvovao je rekordan broj učenika, njih 96, od čega su 52 bili učenici VIII razreda i 44 učenici VII razreda. Takmičari su imali na raspolaganju 150 minuta za rešavanje 5 zadataka. Iako su zadaci bili dosta teški, bilo je učenika sa osvojenim maksimalnim brojem poena, koji su posebno nagrađeni besplatnim boravkom u hotelu «Ineks-turist« u Sutomoru. Učenicima i ostalim učesnicima takmičenja ostaće u sećanju zalaganje i pažnja koju je osoblje ovog hotela uložilo da bi boravak svima bio što prijatniji. Oko pripreme takmičenja posebno se založio drug Nikola Stanišić, potpredsednik Izvršnog saveta Skupštine opštine Bar, koji je obavio svečano otvaranje i zatvaranje takmičenja. Uz pomoć domaćih profesora matematike članovi Savezne komisije su ocenili radove učenika. Uveče, u bašti restorana, najboljima su uručene nagrade i diplome, darovi tradicionalnog organizatora i finansijera Saveznih takmičenja učenika osnovnih škola, *MATEMATIČKOG LISTA*, časopisa namenjenog mladim matematičarima.

**Nagrađeni su i pohvaljeni sledeći učenici.**

### VII RAZRED

**Rade Todorović,** OŠ »8. septembar«, Pirot (I nagrada); **Predrag Grković,** OŠ »S. Nikolajević«, Beograd (I nagrada); **Mea Bombardeli,** OŠ »Đ. Seljanović«, Split (I nagrada); **Vladan Vučković,** OŠ »R. Vukićević«, Niš (II nagrada); **Marija Jurišić,** OŠ »V. Mihaljević«, Makarska (II nagrada); **Aleksandar Angelus,** OŠ »Zmaj J. Jovanović«, Beograd (II nagrada); **Nebojša Nikolić,** OŠ «V. Karadžić«, Potočac (II nagrada); **Dalibor Tužinski,** OŠ »Mladost«, Jakšić (II nagrada); **Aleksandar Mićić,** OŠ «M. Višnjić«, Banja Luka (III nagrada); **Tamara Nestorović,** OŠ »Maršal Tito«, Niš (III nagrada); **Siniša Kruška,** OŠ »J. Popović«, Novi Sad (III nagrada); **Željko Savić,** OŠ »S. Marković«, Kragujevac (pohvala); **Dragoljub Pokrajac,** OŠ »Vožd Karađorđe«, Niš (pohvala); **Igor Srb,** OŠ »G. Krklec«, Zagreb (pohvala); **Nikola Tuneski,** OŠ »V. I. Lenjin«, Skopje (pohvala); **Rastko Šelmić,** OŠ »B. Radičević«, Beograd (pohvala); **Nenad Lončar,** OŠ »D. Obradović«, Zrenjanin (pohvala); **Katja Rebernik,** OŠ »Heroj V. Vlahović«, Ljubljana (pohvala); **Dejana Mijušković,** OŠ »S. Pejanović«, Titograd (pohvala); **Slobodan Kovačević,** OŠ »I. Andrić«, Beograd (pohvala); **Aleksandar Blaževski,** OŠ »V. Nazor«, Skopje (pohvala).

### VIII RAZRED

**Vlado Kešelj,** OŠ »G. Janković«, Blažuj (I nagrada); **Zoran Črnja,** OŠ »V. Vlahović«, Rijeka (I nagrada); **Aleksandra Smiljanić,** OŠ »B. Radičević«, Beograd (II nagrada); **Dragan Stojković,** OŠ »M. Kosovac«, Šabac (II nagrada); **Kristijan Vlašić,** OŠ »M. Držić«, Zagreb (II nagrada); **Živomir Babić,** OŠ »P. Kočić«, N. Topola (II nagrada); **Momir Pešić,** OŠ »Đ. Jakšić«, Zrenjanin (II nagrada); **Rajna Rajić,** OŠ »P. Preradović«, Zagreb (III nagrada); **Aleksandar Jovančević,** OŠ »V. Karadžić«, Čačak (III nagrada); **Dragan Mašulović,** OŠ »S. Marković«, Novi Sad (III nagrada); **Amir**

**Tokić**, OŠ »J. Jakubović«, Tuzla (III nagrada); **Edi Vovk**, OŠ »Vinžgar«, Lesce (III nagrada); **Srđan Mijatović**, OŠ »IV kralj. bataljon«, Kraljevo (III nagrada); **Boris Krstajić**, OŠ »V. Nazor«, Živinice (III nagrada); **Kornelija Passek**, OŠ »25. maj«, Zagreb (pohvala); **Bekim Imeri**, OŠ »P. Zdravkoski«, Skopje (pohvala); **Aleksandar Jocić**, OŠ »I. G. Kovačić«, Foča (pohvala); **Dejan Vuković**, OŠ »V. Nazor«, Priština (pohvala); **Alenka Jaklin**, OŠ »P. Preradović«, Zagreb (pohvala); **Jovan Jevtić**, OŠ »R. Domanović«, Beograd (pohvala); **Martina Kramar**, OŠ »IX korpus NOVJ«, N. Gorica (pohvala); **Tatjana Petković**, OŠ »S. Marković«, Leskovac (pohvala).

Dobitnici I nagrade, zajedno sa još 24 učenika koji su se najbolje pokazali na republičkim i pokrajinskim takmičenjima, nagrađeni su od strane *Matematičkog lista* besplatnim destodnevnim boravkom u Letnjoj školi Društva matematičara SR Srbije, koja se održava svake godine od 30. 6. do 10. 7. u odmaralištu «Šuplja stena«, na Avali.

## ZADACI SA XV SAVEZNOG TAKMIČENJA

### VII RAZRED

**1.** Dokazati da ostatak deljenja sa 30 bilo kog prostog broja je takođe prost broj ili 1.

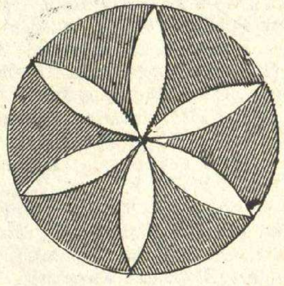
**2.** Na testiranju je učestvovalo 22 učenika iz osam škola. Oni su tačno rešili ukupno 50 zadataka. Svaki učenik iz iste škole rešio je jednak broj zadataka, a učenici iz raznih škola rešili su različit broj zadataka. Svaki učenik je rešio bar jedan zadatak. Koliko je ukupno učenika rešilo samo po jedan zadatak?

**3.** »Saša i ja, reče Duško, možemo završiti neki posao za 20 dana, no, ako mi date Nikolu umesto Saše, možemo završiti posao za 15 dana.«

»Imam bolju kombinaciju, reče Niikola, ako uzmem Sašu za pomoćnika, završićemo posao za 12 dana.«

Za koliko bi dana svaki od njih završio taj posao?

**4.** Koliko procenata površine (ploštine) kruga zauzima osenčeni deo na datoj slici 1?



Sl. 1

**5.** Dvije kružnice se dodiruju iznutra u točki $A$. Iz središta veće kružnice $O$ nacrtan je polumjer (poluprečnik) $OB$ veće kružnice, koji je ujedno i tangenta manje kružnice u točki $C$. Odrediti kut (ugao) $BAC$.

### VIII RAZRED

**1.** Ako se kvadratu bilo kog prirodnog broja doda broj 101010, dobijena suma ne može biti kvadrat prirodnog broja. Dokazati.

**2.** Dat je razlomak $A=\dfrac{2x-1}{x-4}$, gde je $x$ cio broj, različit od 4.

a) Za koje vrijednosti broja $x$ dati razlomak $A$ postaje cio broj?

b) Za koje vrijednosti prirodnog broja $x$ $(x>4)$ razlomak $A$ ima najmanju vrijednost?



**3.** Naći sve dvocifrene (dvoznamenkaste) brojeve koji su jednaki dvostrukom proizvodu (produktu) svojih cifara (znamenki).

**4.** Dokazati da se u krug poluprečnika (polumjera) $r=19$ ne može smjestiti 400 tačaka sa međusobnom udaljenošću većom od 2.

**5.** Date su redom tačke $A$, $B$, $C$ na pravoj (pravcu) $p$ i tačke $D$ i $E$ sa iste strane van prve $p$, takve da su trouglovi (trokuti) $ABD$ i $BCD$ jednakostranični. Neka je $M$ tačka duži (dužine) $AE$ i $N$ tačka duži $CD$, tako da je $ME=2\,AM$ i $CN=2\,DN$.

Dokazati da je trougao $BMN$ jednakostraničan.

## Rešenja zadataka

### VII RAZRED

**1.** Deljenje broja $p$ sa 30 predstavimo jednakošću: $p=30\,k+r$. Ostatak deljenja, broj $r$, ne može biti deljiv sa 2, sa 3, sa 5 jer bi u tom slučaju zbir $30\,h+r$ takođe bio deljiv sa 2, sa 3 ili sa 5, pa bi, prema navedenoj jednakosti, i prost broj $p$ bio deljiv istim brojem, što nije moguće. Kako je $r<30$, sledi da ostatak $r$ mora biti jedan od brojeva: 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, a to se upravo i tvrdilo.

**2.** Uzmimo iz svake škole po jednog učenika i pretpostavimo da je prvi rešio 1 zadatak, drugi 2 zadatka, treći 3, itd, na kraju da je osmi rešio 8 zadataka. U tom slučju, ovih 8 učenika rešilo je $1+2+3+4+5+6+7+8=36$ zadataka. Znači, od naših 22 učenika preostalo je još 14, a kako je rešeno ukupno 50 zadataka, izlazi da je ovih 14 učenika rešilo tačno 14 zadataka (jer je $50-36=14$). Dakle, oni su rešili samo po jedan zadatak. Konačno, po 1 zadatak rešilo je ukupno 15 učenika.

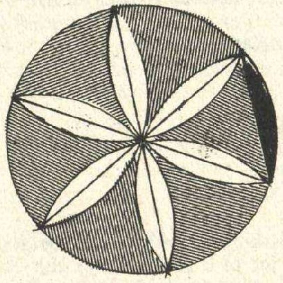
**3.** Pretpostavimo da je Saši potrebno $s$, Dušku $d$, a Nikoli $n$ dana za samostalno izvršenje posla. Računajući koliki bi deo posla ovi dečaci uradili za jedan dan, dobićemo jednačine: $\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{s}=\dfrac{1}{20}$, $\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{15}$ i $\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{s}=\dfrac{1}{12}$. Sabiranjem ovih triju jednakosti dobićemo: $\dfrac{2}{d}+\dfrac{2}{n}+\dfrac{2}{s}=\dfrac{12}{60}$, tj. $\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{s}=\dfrac{1}{10}$. Oduzimanjem, jedne po jedne, prvih triju jednačina od poslednje, dobijamo: $\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{20}$, $\dfrac{1}{s}=\dfrac{1}{30}$, $\dfrac{1}{d}=\dfrac{1}{60}$. Znači, ako sam radi, Saši treba 30 dana, Dušanu 60, a Nikoli 20 dana.

**4.** Neosenčeni deo je prečnicima, kao na sl. 2, podeljen na 12 delova, od kojih je svaki jednak odsečku koji je na sl. 2 tamno osenčen. Površina ovog odsečka je $P_0=\dfrac{1}{6}r^2\pi-\dfrac{r^2\sqrt{3}}{4}$, gde je $r$ poluprečnik kruga. Prema tome, površina $P$ osenčenog dela je $P=r^2\pi-12\left(\dfrac{1}{6}r^2\pi-\dfrac{r^2\sqrt{3}}{4}\right)=3\,r^2\sqrt{3}-r^2\pi$. Ovo je deo $\dfrac{3r^2\sqrt{3}-r^2\pi}{r^2\pi}$

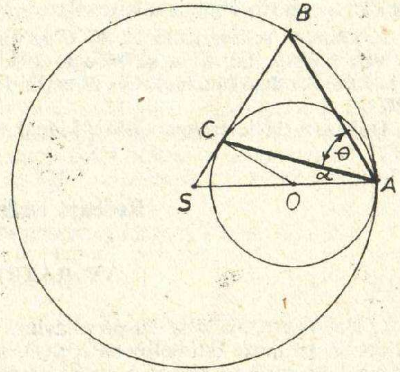


1984. - savezno natjecanje - 7. i 8. razred
Matematički list za učenike osnovne škole
http://www.dms.org.rs/index.php?action=matematicki_list
http://public.carnet.hr/mat-natj

od površine celog kruga, a to je: $\frac{3\sqrt{3}-\pi}{\pi}$. Uzimajući $\pi=3{,}14$ i $\sqrt{3}=1{,}73$, dobijemo: $\frac{2{,}05}{3{,}14}\approx 0{,}65=65\%$.



Sl. 2




Sl. 3

**5.** Neka je $\theta=\sphericalangle BAC$ traženi ugao, sl. 3, i neka je $\sphericalangle SAC=\alpha$ i $\sphericalangle SBA=\beta$. Po pretpostavci su trouglovi $SAB$ i $ACO$ jednakokraki (jer je $SA=SB$ i $OA=OC$), a trougao $SOC$ je pravougli. Neka je $\sphericalangle ASB=\varphi$. Tada je iz trougla $ABS$: $2\beta+\varphi=180°$, tj. $\beta=90°-\frac{\varphi}{2}$. Dalje, ugao $SOC$ je spoljašnji za trougao $ACO$, pa je $\sphericalangle SOC=\sphericalangle OAC=\sphericalangle OCA=2\alpha$. Zatim, iz trougla $SOC$: $\varphi+2\alpha=90°$, odakle je $\alpha=45°-\frac{\varphi}{2}$.

Vidimo da je traženi ugao: $\theta=\sphericalangle SAB-\alpha=\beta-\alpha$, pa zamenjujući dobijene vrednosti za $\alpha$ i $\beta$, dobićemo: $\theta=90°-\frac{\varphi}{2}-\left(45°-\frac{\varphi}{2}\right)=45°$. Traženi ugao je $\theta=45°$.

## VIII RAZRED

**1.** Ako je moguća sledeća jednakost: $n^2+101010=k^2$, gde su $n$ i $k$ prirodni brojevi, onda je $k^2-n^2=101010$, odnosno: $(k-n)(k+n)=2\cdot 50505$. Lako je dokazati da ne postoje prirodni brojevi $k$ i $n$ koji zadovoljavaju ovu jednakost. Razmotrićemo sve slučajeve.

Ako su $k$ i $n$ dva parna broja, onda su $(k-n)$ i $(k+n)$ takođe parni brojevi i njihov proizvod mora biti deljiv sa 4. Međutim, na desnoj strani jednakosti je paran broj koji nije deljiv sa 4. Slično se dokazuje da $k$ i $n$ ne mogu biti dva neparna broja. Na kraju, ako je jedan od ovih brojeva paran, a drugi neparan, tada su $(k-n)$ i $(k+n)$ dva neparna broja i njihov proizvod je takođe neparan, pa ne može biti jednak $2\cdot 50505$.

Prema tome, nije moguća jednakost $n^2+101010=k^2$, tj. suma na levoj strani jednakosti ne može biti kvadrat prirodnog broja.

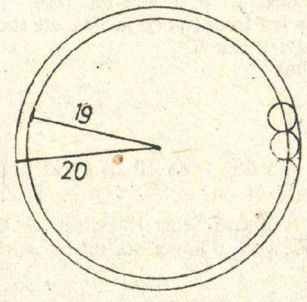


**2.** a) Dati razlomak možemo predstaviti na sledeći način: $A=\frac{2x-8-6}{x-4}=\frac{2(x-4)}{x-4}-\frac{6}{x-4}=2-\frac{6}{x-4}$. Ovaj izraz će biti ceo broj ako je 6 deljivo sa $x-4$, a to je moguće ako je $x\in\{-2, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10\}$.

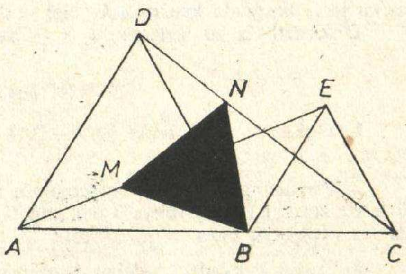
b) Razlomak A imaće najmanju vrednost onda kad razlomak $\frac{6}{x-4}$ ima najveću vrednost, a to je ispunjeno za $x-z=1$, odnosno za $x=5$.

**3.** Neka su $x$ i $y$ cifre tog broja. Tada važi uslov: $10x+y=2xy$, koji daje jednakost: $y=2xy-10x$, odnosno: $y=2x(y-5)$. Kako je $y$ cifra,. dakle $y>0$, to i desna strana jednakosti mora biti pozitivna, pa mora biti i $y>5$. Iz poslednje jednakosti vidimo da je $y$ paran broj, dakle $y=6$ ili $y=8$. Uslov je zadovoljen samo ako je $y=6$ i tada je $x=3$. Dakle, traženi broj je jedinstven, to je broj **36**.

**4.** Ako je udaljenost između ma koje dve tačke veća od 2, onda se oko svake od njih može opisati kružnica poluprečnika 1, tako da se ove kružnice ne seku među sobom. U našem krugu tačke se mogu rasporediti i uz samu kružnu liniju. Zbog toga, da bismo pokrili sve pomenute kružnice poluprečnika 1, opisane oko tačaka, opisaćemo krug poluprečnika 20, koncentričan sa našim datim krugom. Ako bi bilo moguće rasporediti 400 tačaka prema uslovima zadatka, tada bi površina najvećeg kruga svakako morala biti veća od zbira površina svih krugova poluprečnika 1, opisanih oko 400 tačaka. Međutim, površina najvećeg kruga je $P=20^2\pi=400\pi$, a zbir površina 400 malih krugova iznosi: $400P_1=400\cdot 1^2\pi=400\pi$. Dakle, nije $P>400P_1$, što znači da se u datom krugu ne mogu rasporediti 400 tačaka, kako se zahtevalo.




Sl. 4




Sl. 5

**5.** Vidimo da su trouglovi $ABE$ i $BCD$ podudarni, jer je $AB=BD$, $BE=BC$ i $\sphericalangle ABE=\sphericalangle DBC=120°$. Iz ove podudarnosti sledi da je $AE=CD$, a otuda i da je $AM=DN$ (kao trećina jednakih duži), a zatim i $\sphericalangle BAE=\sphericalangle BDN$. Iz ovoga proizlazi da su podudarni trouglovi $ABM$ i $BDN$, odakle zaključujemo da je $BM=BN$ $\sphericalangle ABM=\sphericalangle DBN$.

Izračunajmo sad ugao $MBN$: $\sphericalangle MBD+\sphericalangle DBN=\sphericalangle MBD+\sphericalangle ABM=\sphericalangle ABD=60°$

Dakle, u jednakokrakom trouglu $MBN$ je ugao kod vrha $B$ jednak $60°$, pa sledi da su mu i uglovi na osnovici $MN$ takođe od $60°$, što znači da je ovaj trougao jednakostraničan.