REPUBLIČKO NATJECANJE
UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA SR HRVATSKE
1985. godina

VII RAZRED

Druga grupa zadataka*

1. a) Odredi skup S svih cijelih brojeva x za koje vrijedi: $4 \leq x < 12$.
   b) U kvadrat 4x4 upisano je 8 od tih brojeva. Upiši preostalih 8 brojeva iz skupa S, ali tako da zbroj brojeva u svakom retku, stupcu i na obje dijagonale bude jednak („magični“kvadrat).

-1			-4
	1		
0	5	6	
11			8

2. Odredi sve racionalne brojeve r (r =p/q) za koje je izraz $r+\frac{1}{r}$ cijeli broj.

3. Zadana su tri pravca a,b,c i pri tome je $a \| b$. Konstruiraj jednakostranični trokut ABC duljine stranice 4, tako da mu po jedan vrh leži na danim pravcima. Obrazloži postupak.

4. U trapezu ABCD je opseg jednak 2dm, kut $\sphericalangle ABC=60°$, a dijagonala AC je okomita na stranicu $\overline{BC}$ i raspolavlja kut $\sphericalangle DAB$.
   a) Pokaži da je trapez jednakostraničan.
   b) Nađi duljine stranica trapeza.

---
* Po već ustaljenoj praksi, natjecatelji dobivaju i jednu skupinu lakših zadataka u vidu testova.

REPUBLIČKO NATJECANJE
UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA SR HRVATSKE
1985. godina

VIII RAZRED

1. U koordinatnom sastavu dane su točke: A(2,-3), B(-6,1), C(4,5).
 a) Odredi polinom prvog stupnja čiji graf sadrži točke A i B.
 b) Odredi jednadžbu pravca točkom C koji ima svojstvo da su točke A i B jednako od njega udaljene. Koliko ima rješenja?

2. Zadan je dolinom $P(x)=x^2-2$
a) Odredi polinom $P \circ P$.
Pomoć: $P \circ P\,(x) = P(P(x))$
b) Rastavi polinom $Q(x) = (P \circ P)(x) - x$ na faktore.

3. Nad stranicama pravokutnog trokuta nacrtani su jednakostranični trokuti i u njih upisani krugovi. Koja relacija povezuje površine P_a, P_b i P_c tih krugova?

4. U trokutu ABC zadano je : a=20, b=15, $\alpha - \beta = 90°$. Kolika je duljina c stranice AB?

Rješenja zadataka

REPUBLIČKO NATJECANJE
UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA SR HRVATSKE
1985. godina

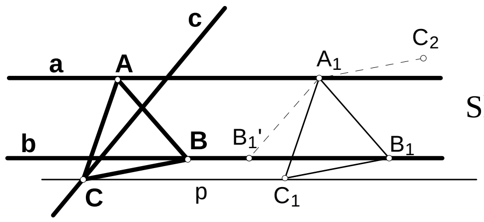
VII RAZRED

1. a) $x \in \{-4,-3,-2,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$.
b)

-1	10	9	-4
4	1	2	7
0	5	6	3
11	-2	-3	8

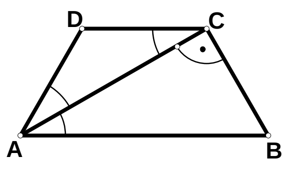
2. Izraz $r+\frac{1}{r}$ je cijeli broj samo ako je r=1 ili r=-1.

3. Neka su pravci dani kao na sl.1. Neka su A_1 i B_1 točke na danim pravcima a i b, takve da je $A_1B_1=4$. (Ako smo izabrali A_1, tada postoji još jedna tačka na pravcu b, to je točka B_1', takva da je $A_1B_1'=4$.) Sada nije teško konstruirati točku C_1 (ili C_2) tako da je trokut $A_1B_1C_1$ (ili $A_1B_1C_2$) jednakostraničan. Dalje konstruiramo pravac p kroz C_1, paralelan sa a i u presjeku pravaca p i c dobivamo vrh C traženog trokuta.
Dalje konstruiramo dužine AC i BC paralelne s A_1C_1 i B_1C_1.
Zadatak može imati 4 rješenja (dva uz korištenje točke B_1 i dva uz korištenje točke B_1'). Ako je razmak između pravaca a i b jednak 4, zadatak ima samo 2 rješenja, a ako je taj razmak veći od 4, onda zadatak nema rješenja.



Sl. 1

4.
a) Kutovi ∢BAC i ∢ACD jednaki su kao naizmjenični između paralelnih pravaca AB i CD. Kako je po pretpostavci AC simetrala kuta ∢BAD, slijedi da je i ∢CAD = ∢ACD. Zbog toga je trokut ACD jednakokračan (vidjeti sl.2.) i AD=CD. Dalje, kutovi ∢ABC i ∢BCD su suplemantarni, pa je ∢BCD=120°, a samim tim je ∢ACD=30°. Prema tome je i ∢BAD=60°=∢ABC, pa je trapez ABCD jednakokračan.
b) Trokut ABC ima kutove od 30°, 60° i 90°, što znači da on predstavlja polovinu jednakostraničnog trokuta, pa je AB=2 BC. Ako dužinu kraka označimo sa c, onda su osnovice duge c i 2c. Znači, opseg je 2c+c+c+c=5c, pa kako sve to iznosi 20 cm, slijedi da je c=4cm. Dakle stranice trapeza su: 8cm, 4cm, 4cm, 4cm.

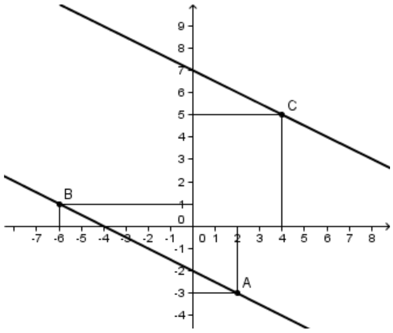


Sl. 2

Rješenja zadataka

REPUBLIČKO NATJECANJE
UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA SR HRVATSKE
1986. godina

VIII RAZRED

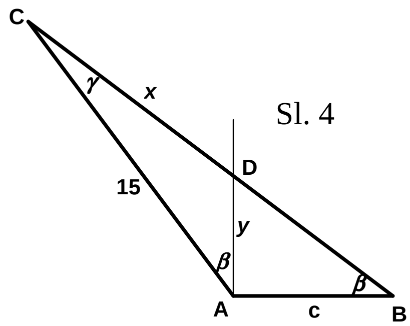


1. a) Traženi polinom je P(x)=ax+b gdje a i b treba odrediti tako da graf sadrži točke A(2,-3) i B(-6, 1). Ako graf sadrži točku A(2,-3), onda za x=2 vrijedi P(x)=-3. Zamjenom u polinom dobijamo: -3=2a+b. Slično, koristeći tačku B(-6, 1), dobivamo jednadžbu 1=-6a+b. Rješenje dobivenog sustava jednadžbi je: $a=-\frac{1}{2}$, b=-2. Dakle: $P(x)=-\frac{1}{2}x-2$.

b) Traženi pravac kroz C je paralelan graf polinoma P(x), pa je njen koeficijent uz x također $-\frac{1}{2}$. Jednadžba pravca ima oblik: $y=-\frac{1}{2}x+n$. Zamjenom koordinata točke C(4, 5) dobit ćemo jednadžbu: $5=-\frac{1}{2}\cdot 4+n$, odakle je n=7. Jednadžba pravca je: $y=-\frac{1}{2}x+7$. To je jedino rešenje.

2. a) $(P\circ P)(x) = P(P(x)) = (x^2-2)^2-2 = x^4-4x^2+2$.
b) $Q(x) = x^4-4x^2-x+2 = x^2(x^2-4)-(x-2) = x^2(x-2)(x+2)-(x-2) = (x-2)(x^3+2x^2-1)$.

3. Polumjer r_c najvećeg kruga, je trećina visine trokuta ABC: $r_c=\frac{1}{3}\cdot\frac{c\sqrt{3}}{2}=\frac{c\sqrt{3}}{6}$. Slično izračunamo: $r_a=\frac{a\sqrt{3}}{6}$ i $r_b=\frac{b\sqrt{3}}{6}$. Prema tome imamo: $P_a+P_b=\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2\pi+\left(\frac{b\sqrt{3}}{6}\right)^2\pi=$ $\frac{1}{12}a^2\pi+\frac{1}{12}b^2\pi=\frac{\pi}{12}(a^2+b^2)=\frac{\pi}{12}c^2=P_c$. Tražena relacija je: $P_a+P_b=P_c$.



Sl. 4

4. Konstruiramo točku D na stranici BC, tako da je ∢BAD=90° (sl.4). Kako je $\alpha=90°+\beta$, slijedi da je ∢CAD=β. Trokuti ABC i ACD imaju po dva kuta jednaka (γ je zajednički kut), pa su zbog toga slični. Iz ove sličnosti dobivamo proporcije: BC:AC = AC:CD i BC:AB = AC:AD. Prva proporcija daje: 20:15=15:x, odakle je $x=\frac{45}{4}$, pa dobivamo: $BD = 20-\frac{45}{4}=\frac{35}{4}$. Iz druge proporcije bit će: 20:c = 15:y , odakle je: $y=\frac{3}{4}c$. Sada iz pravkutnog trokuta ABD, koristeći Pitagorin poučak, dobit ćemo: $AB^2-AD^2=BD^2$, odnosno: $c^2-\left(\frac{3}{4}c\right)^2=\left(\frac{35}{4}\right)^2$. Odavde je $c^2=49$, pa je c=7.