XVI. SAVEZNO NATJECANJE ZA UČENIKE OSNOVNIH ŠKOLA
SFRJ
1985. godina

VII RAZRED

1. Dokazati da za svaki prosti broj, veći od 3, vrijedi da je produkt (umnožak) njegovih susjednih brojeva djeljiv sa 24.

2. Janez će 1986. godine imati onoliko godina koliko iznosi zbroj znamenaka godine njegovog rođenja. Koliko će godina imati Janez u 1986. godini?

3. Četiri putnika su putovala taksijem u istom smjeru, u četiri mjesta koja su jednako udaljena od svojih susjednih mjesta. Prvi putnik je pri izlasku platio četvrtinu sume novca koju je tad pokazao taksimetar, drugi je platio trećinu, a treći i četvrti polovinu sume novca koju je taksimetar pokazao u trenutku izlaska. Da li je taksista naplatio više ili manje nego kada bi vozio jednog putnika na cijeloj relaciji, i za koliko?

4. Dokazati da je u svakom konveksnom četverokutu poluzbroj umnožaka susjednih stranica koje polaze iz nesusjednih vrhova veći ili jednak površini tog četverokuta.

5. U jednakokračnom trokutu ABC točka M je polovište osnovice AB. Neka je N točka kraka BC, takva da je MN $\perp$ BC i neka je točka S središte dužine MN. Dokazati da je pravac AN okomit na pravac CS.

XVI. SAVEZNO NATJECANJE ZA UČENIKE OSNOVNIH ŠKOLA
SFRJ
1985. godina

VIII RAZRED

1. Znamenkama 4, 5, 6, 7, 8, 9 napisan je jedan šesteroznamenkasti broj. Zoran, Dušan i Nikola pogađali su taj broj. Zoran: **574698**, Dušan: **786945**, Nikola: **456789**. Ispostavilo se da je Zoran pogodio točna mjesta za tri znamenke. Isto toliko je pogodio i Dušan, dok je Nikola pogodio mjesto samo jedne znamenke. Koji je taj šesteroznamenkasti broj?

2. Za koji je par vrijednosti x i y polinom
   $P(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13$
   ima najmanju vrijednost?

3. Duljine stranica trokuta su tri uzastopna prirodna broja, ne manja od 3. Dokazati da visina trokuta spuštena na srednju po veličini stranicu dijeli tu stranicu na dijelove čija je razlika 4.

4. Zadan je kvadrat MNPQ sa stranicama duljine 1 m. Na stranicama tog kvadrata istaknute su točke A, B, C.
   - točka A je na $\frac{1}{3}$ stranice NP od točke N,
   - točka B je na $\frac{2}{3}$ stranice MQ od točke M,
   - točka C je polovište stranice MN

   Trokut ABC nije pravokutan. Na koju stranu i za koliko treba pomaknuti točku C tako da trokut ABC bude pravokutan?

5. U paralelogramu ABCD je AC duža dijagonala. Iz vrha C spuštene su okomice CE i CF na produžetke stranica AB i AD. Dokazati da je $AC^2 = AB \cdot AE + AD \cdot AF$.

Rješenja zadataka

XVI. SAVEZNO NATJECANJE ZA UČENIKE OSNOVNIH ŠKOLA
SFRJ
1985. godina

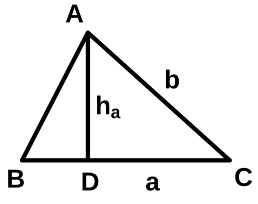
VII RAZRED

1. Svaki prost broj veći od 3 je neparan, pa su njegovi susjedni prirodni brojevi dva uzastopna parna broja. Zbog toga je jedan od ovih parnih brojeva djeljiv sa 4. Ova dva parna broja i naš prost broj čine tri uzastopna prirodna broja, pa je jedan od ovih parnih brojeva djeljiv i sa 3. Dakle, produkt ova dva parna broja je djeljiv s $4\cdot 2\cdot 3$, tj. djeljiv je s 24.

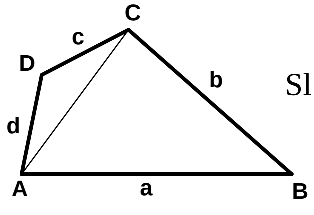
2. Godina rođenja Janeza je (1900+10x+y). Prema uslovu je 1986-(1900+10x+y) = 1+9+x+y, odakle dobivamo jednadžbu: 76=11x+2y. U skupu prirodnih brojeva ova jednadžba ima samo jedno rješenje x=6, y=5. Dakle, Janez je rođen 1965. godine i 1986. imati će 21 godinu.

3. Kad su putnici ušli, taksist je uključio taksimetar na kome se pojavio iznos od x dinara. Pri prelaženju udaljenosti do prvog, zatim drugog, pa trećeg i četvrtog mjesta, cijena se povećala za svaki put za y dinara. Tako su putnici plaćali redom: $\frac{1}{4}(x+y)$, $\frac{1}{3}(x+2y)$, $\frac{1}{2}(x+3y)$, $\frac{1}{2}(x+4y)$. Cijena vožnje je (x+4y) kuna, a naši putnici su platili ukupno: $\frac{1}{4}(x+y)+\frac{1}{3}(x+2y)+\frac{1}{2}(x+3y)+\frac{1}{2}(x+4y)=\frac{19}{12}x+\frac{53}{12}y=(x+4y)+\frac{7}{12}x+\frac{5}{12}y$. Plaćeno je više za blizu 50% od stvarne cijene.

4. Dokazat ćemo da je u svakom trokutu ABC, sa stranicama duljina a, b, c ispunjen uvjet $\frac{ab}{2}\geq P$. Radi toga uočimo trokut na sl. 1. Njegova površina je $P=\frac{1}{2}ah_a$. Međutim, u pravokutnom trokutu ACD je duljina b, kao hipotenuza, najveća, pa je $h_a\leq b$ (znak jednakosti vrijedi ako je $D\equiv A$). Zbog toga je točno $P\leq\frac{1}{2}ab$. Uzmimo sada proizvoljan konveksni četverokut ABCD i dijagonalom AC podijelimo ga na dva trokuta (sl. 2). Na dobivene trokute ABC i ACD primijenimo zaključak sa sl. 1. Dobit ćemo: $\frac{1}{2}a\cdot b+\frac{1}{2}c\cdot d\geq P_1+P_2=P$, tj. $\frac{ab+cd}{2}\geq P$, što je i trebalo dokazati.

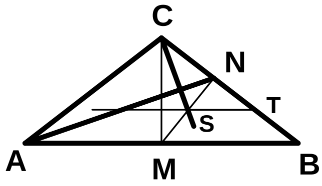


Sl. 1



Sl. 2

5. Zadan je jednakokračan trokut ABC i točke M, N, S kao što je to predstavljeno na sl. 3. Na osnovu osobina jednakokračnih trokuta znamo da je dužina CM visina na osnovicu AB. Neka je točka T polovište dužine BN. Tada je dužina ST srednjica trokuta BMN, pa je zbog toga paralelna sa AB i zbog toga je ST $\perp$ CM. Kako je i MN $\perp$ BC, slijedi da je točka S ortocentar trokuta CMT. Otuda zaključujemo da je CS treća visina ovog trokuta, pa je CS $\perp$ MT. Međutim, dužina MT je središnjica trokuta ABN, pa je paralelna sa AN, što dovodi do traženog zaključka, tj. da je CS $\perp$ AN.



Sl. 3

Rješenja zadataka

XVI. SAVEZNO NATJECANJE ZA UČENIKE OSNOVNIH ŠKOLA
SFRJ
1985. godina

VIII RAZRED

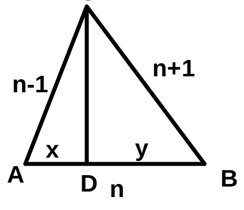
1. Zoran, Dušan i Nikola su o nepoznatom broju dali sljedeće pretpostavke:

Zoran:	5	7	4	6	9	8
Dušan:	7	8	6	9	4	5
Nikola:	4	5	6	7	8	9

   Vidimo da se pretpostavke Zorana i Dušana ne podudaraju ni kod jedne znamenke, pa, kako je svaki od njih pogodio tri znamenke, proizlazi sa su to po tri različite znamenke. Zbog toga je znamenka koju je pogodio Nikola na istom mjestu ili kod Zorana, ili kod Dušana. Vidimo da to može biti samo znamenka 6. Dakle, Dušan je pogodio znamenku 6, što znači da Zoran nije pogodio tu znamenku. Zbog toga je na četvrtom mjestu točna pretpostavka Dušanova, tj. četvrta znamenka je 9. Razmišljajući na isti način zaključujemo da je Dušan pogodio treću, četvrtu i petu znamenku, a Zoran prvu, drugu i šestu. Traženi broj je, dakle: **576 948**.

2. Zadani polinom možemo transformirati:
   $P(x,y) = x^2-4x+y^2+6y+4+9 = (x^2-4x+4)+(y^2+6y+9) = (x-2)^2+(y+3)^2 \geq 0$
   Najmanja vrijednost polinoma je 0 jer predstavlja zbroj dvaju kvadrata, a svaki kvadrat je uvijek veći ili jednak nuli. Da bi ovo bilo ispunjeno, mora biti $x-2=0$ i $y+3=0$, tj. $x+2$ i $y= -3$.

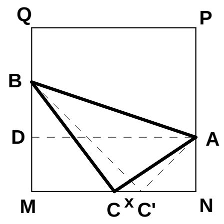
3. Neka je $h=CD$ visina koja odgovara srednjoj po veličini stranici AB i neka su x i y odsječci na koje točka D dijeli stranicu AB (sl. 4). Duljine stranica AC, AB, BC označimo redom s $n-1$, n, $n+1$. Tada je $x+y=n$. Iz pravokutnih trokuta ACD i BCD, na osnovu Pitagorinog poučka, dobivamo jednakosti: $(n-1)^2-y^2=h^2$ i $(n+1)^2-x^2=h^2$, odakle dobivamo: $(n-1)^2-y^2 = (n+1)^2-x^2$. Posljednju jednakost možemo napisati kao $x^2-y^2=(n+1)^2-(n-1)^2$, a odavde je: $(x-y)(x+y)=4n$. Kako $x+y=n$, bit će: $(x-y)\cdot n=4n$, odakle dobivamo traženu relaciju: $x-y=4$.



Sl. 4

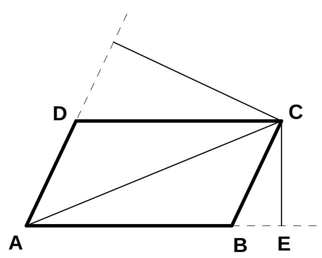
4. Pretpostavimo da točku C treba pomaknuti u položaj C', da bi trokut ABC' (sl. 5) bio pravokutan. Neka je $x=CC'$ duljina koju treba odrediti. Neka je, dalje, D polovište dužine MB. Tada je $BD=\frac{1}{3}=AN$ i $MC=NC=\frac{1}{2}$. Uočimo pravokutne trokute: ABD, ANC', MBC', MBC' i ABC'. Iz njih računavamo: $AB^2=1+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{10}{9}$,

$AC'^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-x\right)^2$ i $BC'^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{2}+x\right)^2$. U trokutu ABC' je AB hipotenuza, pa imamo uvjet $AC'^2+BC'^2=AB^2$. Koristeći prethodne jednakosti dobit ćemo: $\frac{1}{9}+\frac{1}{4}-x+x^2+\frac{4}{9}+\frac{1}{4}+x+x^2=\frac{10}{9}$, a odavde je $2x^2=\frac{1}{18}$, odnosno $x^2=\frac{1}{36}$. Slijedi da je $x=\frac{1}{6}$, a može biti i $x=-\frac{1}{6}$, što znači da točku C treba pomaknuti lijevo ili desno za $\frac{1}{6}$.



Sl. 5

5. Koristeći se pravokutnim trokutima ACE i BCE sa sl. 6 dobivamo: $CE^2=AC^2-AE^2$ i $CE^2=BC^2-(AE-AB)^2$. Eliminiranjem CE^2 dobivamo: $AC^2-AE^2=BC^2-(AE-AB)^2$. Sličnim postupkom, iz trokuta ACF i CDF dobivamo jednakost: $AC^2-AF^2=CD^2-(AF-AD)^2$. Zbrajanjem dviju posljednjih jednakosti i sređivanjem dobivamo: $2AC^2-AE^2-AF^2 = BC^2-AE^2+2AE\cdot AB-AB^2+CD^2-AF^2+2AF\cdot AD-AD^2$. Kako je AD=BC i CD=AB, ostaje: $AC^2=2AE\cdot AB+AF\cdot AB$, odakle poslije skraćivanja sa 2 dobivamo traženu jednakost.



Sl. 6