REPUBLIČKO NATJECANJE
UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA SR HRVATSKE
1986. godina

VII RAZRED

1. Suma brojnika i nazivnika razlomka je 4140. Poslije skraćivanja dobije se razlomak $\frac{7}{13}$. Odredi razlomak prije skraćivanja

2. Da li postoje 22 uzastopna prirodna broja čija je suma djeljiva sa 22? Obrazloži.

3. Zadan je paralelogram ABCD kojemu duljine stranica AB i AD iznose 5 cm i 2 cm. Simetrala kuta kod vrha A siječe stranicu CD u točki E. Koliko je puta ploština trapeza ABCE veća od ploštine trokuta AED?

4. Duljine dviju stranica trokuta su 6 cm i 3 cm. Odredi duljinu treće stranice trokuta, ako je poluzbroj duljina visina spuštenih na zadane stranice, jednak duljini treće visine.

REPUBLIČKO NATJECANJE
UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA SR HRVATSKE
1986. godina

VIII RAZRED

1. Odredi peteroznamenkasti broj $\overline{abcde}$ sa svojstvom da vrijedi: b+c+d+e=23, c+d+e+a=18, d+e+a+b=25, e+a+b+c=21, a+b+c+d=17.

2. Dokaži da je suma n^3+6n^2-4n+3, djeljiva sa 3, za bilo koji prirodni broj n.

3. Visina na hipotenuzu pravokutnog trokuta dijeli je na segmente 9 cm i 16 cm. Iz vrha većeg od preostala dva kuta trokuta povuci pravac kroz polovište zadane visine. Odredi duljinu onog dijela pravca koji se nalazi unutar trokuta.

4. A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 su uzastopni vrhovi pravilnog deseterokuta upisanog u kružnicu središta O. Polumjeri OA_3 i OA_4 sijeku tetivu A_2A_5 u točkama M i N. Dokaži, da je zbroj MN i A_3A_4 jednak polumjeru kružnice.

Rješenja zadataka

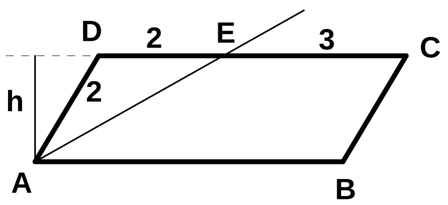
REPUBLIČKO NATJECANJE
UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA SR HRVATSKE
1986. godina

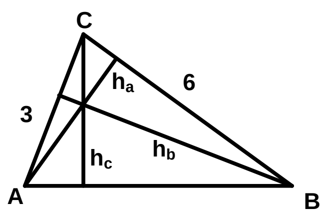
VII RAZRED

1. Neka je razlomak skraćen sa x. Tada je prije skraćivanja ovaj razlomak bio $\frac{7x}{13x}$. Kako je 7x+13x=4140, to je x=207. Prije skraćivanja imali smo: $\frac{7 \cdot 207}{13 \cdot 207}$, tj. $\frac{1449}{2691}$.

2. Jedan od ovih brojeva mora biti djeljiv sa 22, a ostali pri dijeljenju sa 22 daju različite ostatke (ostaci se redom povećavaju za 1). Prema tome, ako zbroj bilo koja 22 uzastopna broja podijelimo sa 22, zbroj pojedinačnih ostataka biti će: 0+1+2+… +10+11+12+… +20+21=(1+21)+(2+20)+… +(10+12)+11=10·22+11. Odavde zaključujemo da će zbroj bilo koja 22 uzastopna broja pri dijeljenju sa 22 dati ostatak 11.

3. Po uvjetima je $\sphericalangle$DAE=$\sphericalangle$BAE. Međutim, kako su kutovi BAE i DEA sa paralelnim kracima, naizmjenični, to je $\sphericalangle$BAE=$\sphericalangle$DEA. Samim tim je i $\sphericalangle$DAE=$\sphericalangle$DEA, pa je trokut DAE jednakokračan i DE=DA=2 cm. Preostaje: CE=3 cm. Trokut ADE i trapez ABCE imaju zajedničku visinu h, sl. 1. Prema tome, njihove površine P_1 i P_2 stoje u razmjerima: P1:P2=$\frac{AB+CE}{2} \cdot h : \frac{1}{2}$ DE·h=4:1. Dakle, trapez ima 4 puta veću površinu.





Sl. 1

4. Neka je a=6 cm, sl. 2. Koristit ćemo formule za površinu trokuta. Iz njih dobijamo jednakost $a \cdot h_a = b \cdot h_b$, tj. $6h_a=3h_b$, odakle je $h_a=2h_b$. Prema uslovu je $h_c=\frac{1}{2}(h_a+h_b)=$ $=\frac{3}{2}h_a$. Iz formule $c \cdot h_c = a \cdot h_a$, dobivamo: $\frac{3}{2} c \cdot h_a = 6h_a$, tj. $\frac{3}{2}$c=6, pa je c=4 cm.

Rješenja zadataka

REPUBLIČKO NATJECANJE
UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA SR HRVATSKE
1986. godina

VIII RAZRED

1. Ako zbrojimo date jednakosti dobit ćemo: 4 (a+b+c+d+e)=104, odakle je a+b+c+d+e=26. Oduzimanjem datih jednakosti od ove dobivene jednakosti, izračunat ćemo redom: a=3, b=8, c=1, d=5, e=9. Traženi broj je 38 159.

2. Zadanu sumu možemo transformirati na sljedeći način: $n^3+6n^2-4n+3 = n^3+3n^2-4n+3n^2+3 = n(n^2+3n-4)+3(n^2+1) = n(n^2-4n+n-4)+3(n^2+1) = n(n(n-4)+(n-4))+3(n^2+1) = n(n-4)(n+1)+3(n^2+1)$. Drugi pribrojnik, tj. $3(n^2+1)$ uvijek je djeljiv sa 3. Dokažimo da je i n(n-4)(n+1) uvijek djeljivo sa 3. Prirodan broj n uvijek se može izraziti kao 3k ili 3 k+1 ili 3k+2. Ako je n=3k, tj. ako je n djeljiv s 3, bit će i n(n-4)(n+1) = 3k(n-4)(n+1) djeljivo sa 3. Ako je n=3k+1, onda je n-4 = 3k-3, što znači djeljivo je sa 3, pa je i n(n-4) (n+1) djeljivo sa 3. Ako je n=3k+2, tada je n+1=3k+3, tj. djeljivo je sa 3, a također i n(n-4)(n+1). Time je dokazana tvrdnja zadatka.

3. Neka je ABC dati trokut, AE dati pravac, P središte hipotenuzine visine h=CD i Q središte katete BC sl. 3. Znamo da je $h^2=AD\cdot BD=9\cdot 16=144$, pa je h=12 cm. Sada koristeći se Pitagorinim teoremom lako izračunamo: AC=15 cm, BC=20 cm. U pravokutnom trokutu ADP je AD=9 cm, DP=6 cm, pa je $AP=3\sqrt{13}$ cm.
   Dužina PQ je srednja linija trokuta BCD, pa je PQ || BD i $PQ=\frac{1}{2}BD=8$ cm. Trokuti ABE i PQE su slični (jer je PQ || BD), pa ako uvedemo oznaku PE=x imat ćemo proporciju: AB:PQ=AE:PE, tj. $25:8=(x+3\sqrt{13}):x$. Odavde je $x=\frac{24}{17}\sqrt{13}$ cm.
   Tražena dužina je $AE=AP+PE=\frac{75}{17}\sqrt{13}$ cm.

4. Znamo da je unutrašnji kut pravilnog deseterokuta 144°, pa su kutovi kod A_6 i A_4 po 72° i, kao što se vidi na sl.4, kutovi jednakokračnog trapeza ONA_5A_6 su 72° i 108°. Zbog toga je $\sphericalangle NA_5A_4=144°-108°=36°$. Slijedi da je i kut kod N od 72°, pa je trokut NA_4A_5 jednakokračan i $NA_5=a$, gdje je a stranica deseterokuta, tj. $NA_5=A_3A_4$. Zbog jednakosti kutova kod A_5 i O, četverokut $AOMA_5$ je paralelogram i $A_5M=AO=r$. Prema tome: $MN+A_3A_4=MN+NA_5=MA_5=r$, kao što se i tvrdilo.