Najtoplije zahvaljujem **prof. Milanu Šariću** na dopuštenju da se dijelovi zbirke zadataka "Matematička natjecanja u Jugoslaviji 1987. godine - za učenike osnovnih škola" skeniraju i objave na http://public.carnet.hr/mat-natj .

Antonija Horvatek
http://public.carnet.hr/~ahorvate

MILAN ŠARIĆ

MATEMATIČKA NATJECANJA U JUGOSLAVIJI 1987. GODINE

ZA UČENIKE OSNOVNIH ŠKOLA

DMM »PITAGORA« BELI MANASTIR

Recenzent
Luka Čeliković, prof.

Grafički crteži i prilozi
Radanović Marija

Tekst otipkao
Peran Josip, dipl. ecc.

Tisak GRO »SLOVO« BELI MANASTIR 1498-88.

1987, republičko SRH

4. U ravnini je zadano 6 točaka od kojih nikoje tri ne leže na istom pravcu. Dokaži, da tri točke iz te šestorke čine trokut s kutom ne manjim od 120°.

PITANJA I ZADACI ZA REPUBLIČKI SUSRET UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA SR HRVATSKE

Pula, 28. 03. 1987.

VII RAZRED

1. Ako izmedju znamenaka dvoznamenkastog broja upišemo taj dvoznamenkasti broj, tada je novi četveroznamenkasti broj 77 puta veći od danog dvoznamenkastog broja.
Koji je to dvoznamenkasti broj?

2. Neka matematička zadaća sastojala se od tri zadatka. Prvi zadatak riješilo je ukupno 82% svih učenika, drugi 78%, treći 78%. Prvi i drugi zadatak riješilo je 62%, prvi i treći 66%, a drugi i treći 60%, dok je sva tri zadatka riješilo 25 učenika.

Koliko je učenika rješavalo zadaću?

3. Za koju vrijednost parametra m sustav
$mx - y = 2$
$2x + y = 3m$
ima cjelobrojno rješenje?

4. Koliki je zbroj pet kutova u šiljcima bilo koje petokrake zvijezde?

5. Na simetrali vanjskog kuta $\measuredangle$ trokuta ABC odredi točku D tako, da zbroj udaljenosti $|CD| + |BD|$ bude što manji.

VIII RAZRED

1. Odredi četiri uzastopna prirodna broja, ako je umnožak prvog i drugog za 38 manji od umnoška trećeg i četvrtog.

2. Nadji jednadžbe dvaju pravaca koji prolaze točkom T (3,4), ako jedan od njih prolazi ishodištem, a s osi x zatvaraju trokut površine P = 14.

3. Tri jednaka traktora obradjuju dva polja različitih površina. Ako sva tri traktora najprije preoru prvo polje, a zatim dva od njih preoru i drugo, posao ukupno traje 12 sati. Ako sva tri traktora završe polovicu ukupnog posla, a drugu polovicu obavi jedan traktor, ukupno je potrebno 20 sati.
Za koliko vremena mogu dva traktora preorati prvo polje?

4. Na stranicama $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ jednakokračnog trokuta ABC ($\overline{AB} = \overline{AC} = 5$, $\overline{BC} = 6$) odabrane su točke D, odnosno E, tako da bude $\overline{AD} = \overline{CE} = 2$. Dužine $\overline{AE}$ i $\overline{BD}$ sijeku se u točki S.
Izračunaj površinu trokuta ABS.

5. U prve razrede jednog srednjoškolskog centra upisalo se ukupno 110 učenika. Svaki od njih poznaje otprije barem jedanaestoricu. Dokaži da svaki učenik prvog razreda ima dva poznanika kojima on nije jedini zajednički poznanik.

Rješenja

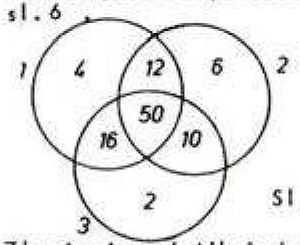
REPUBLIČKO NATJECANJE

VII RAZRED

1987.

1. Neka je $10a+b$ dati broj. Prema uvjetu je: $1000a+100a+10b+b=77(10a+b)$. Sredjivanjem ovog izraza dobijemo: $5a=b$. Kako su a i b znamenke i $a\neq 0$, izlazi da je $a=1$ i $b=5$. Dvoznamenkasti broj je 15.

2. Zbrajanjem postotaka $(82+78+78)$ utvrdimo da je zadatke rješavalo 238 postotaka učenika. Kako učenika ima točno 100%, višak od 138% označava koliko ima učenika koji su izradili više od jednog zadatka. Zbrajanjem datih postotaka učenika koji su riješili po dva zadatka, utvrdimo da ih ima 188% ili 50% više od nadjenih 138%. Tih 50% viška su učenici koji su riješili sva tri zadatka. Kako je poznato da takvih učenika ima 25, slijedi da je zadatke rješavalo ukupno 50 učenika, sl. 6.

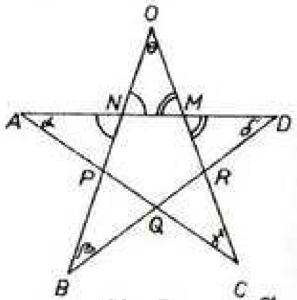


Sl. 6

3. Zbrajanjem datih jednadžbi dobijamo: $(m+2)x=3m+2$, koja ima rješenje $x=\frac{3m+2}{m+2}$. Na osnovu prve jednadžbe zaključujemo, ako je vrijednost x cijeli broj, onda je y cijeli broj. Medjutim: $x=\frac{3m+6-4}{m+2}=\frac{3(m+2)-4}{m+2}=3-\frac{4}{m+2}$. Ovaj izraz je cijeli broj ako se $(m+2)$ sadrži u 4, a to je za $m\in\{-6,-4,-3,-1,0,2\}$.

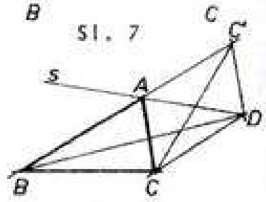
Rješenja – 1987. republičko SRH

4. Uočimo petokraku zvjezdu na sl.7 i na njoj trokut OMN. Vidimo da je $\sphericalangle OMN = \sphericalangle DMR = \alpha + \gamma$ (jer je $\sphericalangle DMR$ vanjski u trokutu ACM). Slično dokazujemo da je $\sphericalangle ONM = \beta + \delta$. Kako je zbroj kutova u trokutu 180°, odakle zamjenom dobijamo zbir traženih kutova: $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \theta = 180^\circ$.



Sl. 7

5. Neka je D bilo koja točka date simetrale s vanjskog kuta i neka je C′ točka simetrična sa C u odnosu na s. Točka C′ pripada pravcu $\overline{AB}$, sl. 8 . Tada je $\overline{DC'} = \overline{DC}$, pa je: $\overline{BD} + \overline{CD} = \overline{BD} + \overline{DC'}$, a na osnovu nejednakosti trokuta biće: $\overline{BD} + \overline{DC'} \geq BC$, gdje je dužina $\overline{BC'}$ fiksirana. Znak jednakosti važi samo ako $D \in \overline{BC'}$, a to će biti kada je D = A. Tražena točka je D = A.



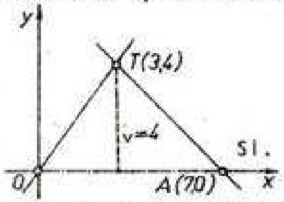
Sl. 8

VIII RAZRED

1. Neka su a, $a+1$, $a+2$, $a+3$ traženi brojevi. Tada je $a(a+1)+38 = (a+2)(a+3)$. Odavde je $a=8$, pa su traženi brojevi: 8, 9, 10, 11.

2. Jedan pravac je $\overline{OT}$, a drugi ćemo značiti sa $\overline{AT}$, sl. 9. Prema uvjetu, površina trokuta OAT je 14, pa kako je visina $v=4$, imamo: $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \overline{OA} = 14$, odakle je $\overline{OA} = 7$.

Sada nije teško odrediti jednadžbe ovih pravaca, jer su im poznate koordinate po dvije točke. Traženi pravci su: $\overline{OT}: 4x - 3y = 0$ i $\overline{AT}: x + y = 0$.



Sl. 9

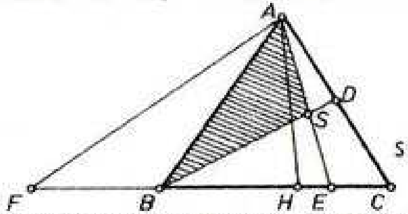
3. Pretpostavimo da bi jedan traktor obradio prvo polje za a sati i drugo polje za b sati. Tada dobijamo jednadžbe:

$$\frac{a}{3} + \frac{b}{2} = 12 \text{ i } \frac{1}{2}\left(\frac{a}{3} + \frac{b}{3}\right) + \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = 20.$$

Odavde dobijamo: $a=18$, $b=12$. Dakle, dva traktora mogu preorati prvo polje za 9 sati.

4. Površinu trokuta ABE lako izračunamo. Pomoću Pitagorinog teorema, iz trokuta ABH izračunamo dužinu visine $\overline{AH}$: $d(A,H)=4$, $P = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$.

Dokazaćemo da je točka S središte dužine $\overline{AE}$. Neka je na produžetku stranice $\overline{BC}$ točka F, takva da je $\overline{AF} \parallel \overline{BD}$, sl. 10 . Tada je $\overline{CD} : \overline{DA} = \overline{CB} : \overline{BF}$, odakle izlazi da je $\overline{BF} = 4$. Dakle, točka B je središte dužine $\overline{EF}$, pa je $\overline{BS}$ srednja linija trokuta AEF, što znači da je S središte dužine $\overline{AE}$. Prema tome, površina trokuta ABS, to je tražena površina, jednaka je polovini površine trokuta ABE, tj. tražena površina je 4.



Sl. 10

5. Pretpostavimo da postoji učenik A koji ima 11 poznanika i da medju njima ne postoje dva koji imaju još jednog zajedničkog poznanika, osim učenika A. Tada svaki od njih poznaje po 11 različitih učenika. Medjutim to nije moguće, jer bi tada bilo $1 + 11 \cdot 11 = 122$, odnosno 122 učenika.