Najtoplije zahvaljujem **prof. Milanu Šariću** na dopuštenju da dijelove knjižice "Matematička natjecanja u Jugoslaviji 1988. godine - za učenike osnovnih škola" skeniram i objavim na http://public.carnet.hr/mat-natj .

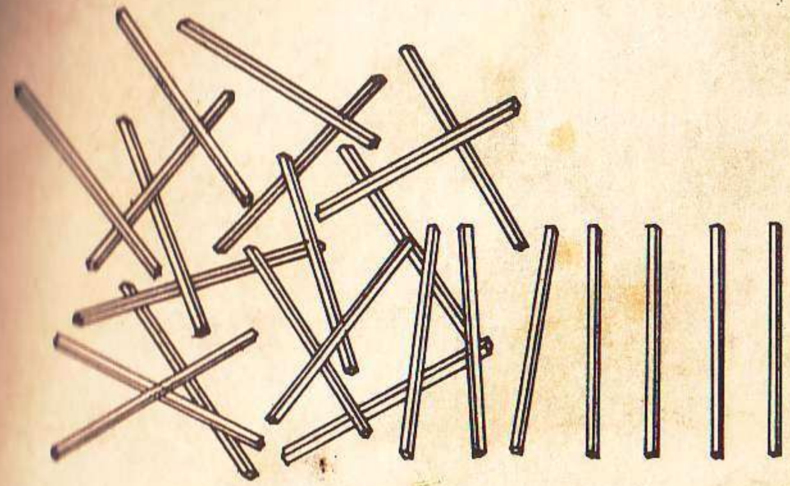
Antonija Horvatek
http://public.carnet.hr/~ahorvate

DMM »PITAGORA« BELI MANASTIR

PRIREDIO
MILAN ŠARIĆ

MATEMATIČKA NATJECANJA U JUGOSLAVIJI 1988. GODINE

ZA UČENIKE OSNOVNIH ŠKOLA



Beli Manastir, 1989.

D M M »P I T A G O R A« BELI MANASTIR

P R I R E D I O

MILAN ŠARIĆ

MATEMATIČKA NATJECANJA U JUGOSLAVIJI 1988. GODINE

ZA UČENIKE OSNOVNIH ŠKOLA

Beli Manastir, 1989.

Recenzent
Luka Čeliković, prof.

Grafički crteži i prilozi
Radanović Marija

Tekst otipkao
Peran Josip, dipl. ecc.

Tisak GRO »SLOVO« Beli Manastir

PITANJA I ZADACI ZA REPUBLIČKI SUSRET UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA SR HRVATSKE

Osijek, 01. 04. 1988.

VII RAZRED

1. Od znamenaka troznamenkastog broja moguće je sastaviti 6 različitih dvoznamenkastih brojeva. Koji troznamenkasti broj ima svojstvo da je jednak polovici zbroja svih 6 tako dobivenih dvoznamenkastih brojeva?

2. Odredi brojeve x, y i z za koje vrijede ove jednakosti

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1987$$
$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1988$$
$$\frac{1}{z} + \frac{1}{x} = 1989.$$

3. Brat i sestra mjerili su koracima duljinu i širinu vrta pravokutnog oblika. Kada je brat išao po duljoj stranici, a sestra po

kraćoj stranici, zajedno su načinili 270 koraka. No, kada je brat išao po kraćoj, a sestra po duljoj stranici pravokutnika, zajedno su načinili 290 koraka. Duljina koraka brata je 0.8 m, a duljina koraka sestre je 0.6 m. Kolika je površina vrta?

4. Vanjski kutovi trokuta odnose se kao 9 : 16 : 20. Povučena je simetrala najvećeg unutrašnjeg kuta i iz vrha istog kuta spuštena je okomica na suprotnu stranicu. Koliki kut zatvaraju ova dva pravca?

5. Svaki unutrašnji kut četverokuta ABCD manji je od 180°. Dokaži, da je zbroj udaljenosti $|AP| + |BP| + |CP| + |DP|$, gdje je P točka u ravnini četverokuta ABCD, najmanji ako je P sjecište dijagonala $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$.

VIII RAZRED

1. Odredi koordinate točke A koja je simetrična točki B (5, -2) u odnosu na pravac $3x - 2y - 6 = 0$.

2. Riješi algebarski i grafički sustav jednadžbi:

$$|x| - |y| = 3$$
$$|x| + |y| = 5$$

3. Na pravcu p dane su tri točke A, B i C tako, da je točka B između točaka A i C. Nad dužinama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ konstruirani su s iste strane pravca p jednakostranični trokuti ABE i BCD. Izračunaj površinu četverokuta ACDE ako je $|AB| = a$, $|BC| = b$.

4. Ako su a, b i c duljine stranica pravokutnog trokuta (c je duljina hipotenuze), dokaži da vrijedi

$$a + b \leqslant c\sqrt{2}.$$

Kada vrijedi znak jednakosti?

5. Zbroj nekoliko uzastopnih prirodnih brojeva jednak je 1000. Odredi te brojeve.

RJEŠENJA

REPUBLIČKO NATJECANJE

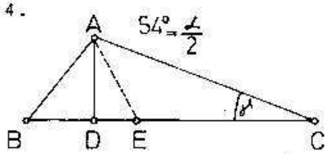
VII RAZRED

1. $\overline{abc}$ $\overline{ab}$, $\overline{ac}$, $\overline{ba}$, $\overline{bc}$, $\overline{ca}$, $\overline{cb}$
$(10a + b)+(10a + c)+(10b + a)+(10b + c)+(10c + a)+(10c + b) =$
$= 22(a + b + c)$. Polovica je $11(a + b + c)$.
$100a + 10b + c = 11(a + b + c)$, ili $89 \cdot a = 10c + b$.
Broj $10c + b$ je dvoznamenkast, pa je zato $a = 1$. To znači,
$10c + b = 89$, pa je $c = 8$, $b = 9$, $\overline{abc} = 198$.

2. Zbrojimo jednadžbe:
$2 \cdot (\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}) = 2 \cdot 2982$
$\frac{1}{x} = 994$, $\frac{1}{y} = 993$, $\frac{1}{z} = 995$. $x = \frac{1}{994}$, $y = \frac{1}{993}$, $z = \frac{1}{995}$

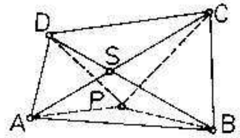
3. Neka je a dulja stranica, b kraća. Broj koraka obrnuto je proporcionalan duljini koraka. Da bi prešao pola opsega brat učini m koraka, a za isti put sestra učini n koraka.
$\frac{m}{n} = \frac{0.6}{0.8} = \frac{3}{4}$, $m + n = 270 + 290 = 560$. Rješenje ovog sustava je:
$m = 240$, $n = 320$, odatle ja $a + b = 192$.
Brat je u x koraka prešao dulju stranicu, a sestra u y koraka kraću stranicu. Zato imamo, $x \cdot 0.8 + y \cdot 0.6 = 192$
$\underline{x + y = 270}$
$x = 150$, $y = 120$, $a = 150 \cdot 0.8 = 120$ m, $b = 120 \cdot 0.6 = 72$ m.
Površina vrta je $8640\ m^2$.

4.



$\alpha' : \beta' : \gamma' = 9 : 16 : 20$
$\alpha' + \beta' + \gamma' = 9k + 16k + 20k = 45k = 360°$
Slijedi, $k = 8$, pa je
$\alpha' = 72°$, $\beta' = 128°$, $\gamma' = 160°$,
$\alpha = 108°$, $\beta = 52°$, $\gamma = 20°$.
$\measuredangle DAE = 90° - 74° = 16°$

5.

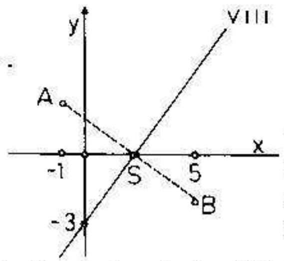


Uzmimo neku točku P različitu od S i spojimo je s vrhovima četverokuta.
$|AP| + |CP| > |AC|$ i $|BP| + |DP| > |BD|$.
Zbrojimo ove nejednakosti,

$$|AP| + |BP| + |CP| + |DP| > |AC| + |BD| = |AS| + |BS| + |CS| + |DS|.$$

VIII RAZRED

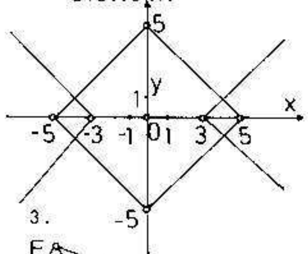
1.



Koeficijent smjera pravca $3x - 2y - 6 = 0$ jednak je $a = \frac{3}{2}$. Koeficijent smjera okomice na taj pravac jednak je $-\frac{2}{3}$.
Jednadžba okomice točkom B glasi
$y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$. Sjecište S ima koordinate S (2,0). Točka A(-1,2).

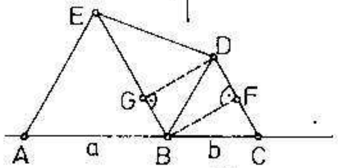
2. Zbrajanjem jednadžbi dobijamo $2|x| = 8$, $|x| = 4$, a oduzimanjem $|y| = 1$. Rješenja su (4,1), (-4,1), (-4,-1), (4,-1).

Grafički:



I kvadrant $x > 0$, $y > 0$ imamo pravce
$x - y = 3$ i $x + y = 5$.
II kvadrant $x < 0$, $y > 0$ i pravce
$-x - y = 3$ i $-x + y = 5$
III kvadrant $x < 0$, $y < 0$ i pravce
$-x + y = 3$ i $-x - y = 5$.
IV kvadrant $x > 0$, $y < 0$ i pravce
$x + y = 3$ i $x - y = 5$.

3.



$P(ABE) = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$, $P(BCD) = \frac{b^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$. DG je visina trokuta BDE i $|DG| = |BF| = \frac{b \cdot \sqrt{3}}{2}$.
$P(BDE) = \frac{1}{2}|BE| \cdot |DG| = \frac{1}{2} a \frac{b \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{ab \cdot \sqrt{3}}{4}$
$P = (a^2 + ab + b^2)\frac{\sqrt{3}}{4}$

4. $a + b \leq c\sqrt{2}/2$, $a^2 + 2ab + b^2 \leq 2c^2$, $2ab \leq c^2$, $0 \leq (a - b)^2$.

5. Uzmimo da su to brojevi $k+1$, $k+2, \ldots, n-1, n$. Tada je $\frac{(n+1)n}{2} - \frac{(k+1)k}{2} = 1000$, ili $n^2 + n - k^2 - k = 2000$, $(n+k+1)(n-k) = 2^4 \cdot 5^3$. Brojevi $n+k+1$ i $n-k$ su suprotne parnosti (zbroj im je neparan) i još je $n+k+1 > n-k$.

Imamo ove mogućnosti:

1. Iz $n+k+1 = 2000$ i $n-k = 1$ slijedi $n = 1000$
2. Iz $n+k+1 = 400$ i $n-k = 5 \Rightarrow n = 202$, pa je $198, \ldots, 201, 202$.
3. Iz $n+k+1 = 80$ i $n-k = 25 \Rightarrow n = 52$, pa je $28, 29, \ldots, 52$
4. Iz $n+k+1 = 125$ i $n-k = 16 \Rightarrow n = 70$, pa je $54, 55, \ldots, 70$.