Najtoplije zahvaljujem **prof. Milanu Šariću** na dopuštenju da dijelove knjižice "Matematička natjecanja u Jugoslaviji 1988. godine - za učenike osnovnih škola" skeniram i objavim na http://public.carnet.hr/mat-natj .

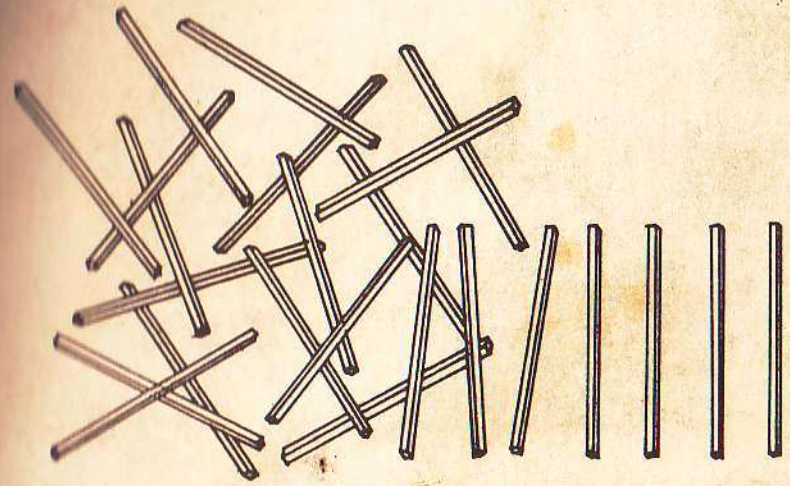
Antonija Horvatek
http://public.carnet.hr/~ahorvate

DMM »PITAGORA« BELI MANASTIR

PRIREDIO
MILAN ŠARIĆ

MATEMATIČKA NATJECANJA U JUGOSLAVIJI 1988. GODINE

ZA UČENIKE OSNOVNIH ŠKOLA



Beli Manastir, 1989.

DMM »PITAGORA« BELI MANASTIR

PRIREDIO

MILAN ŠARIĆ

MATEMATIČKA NATJECANJA U JUGOSLAVIJI 1988. GODINE

ZA UČENIKE OSNOVNIH ŠKOLA

Beli Manastir, 1989.

Recenzent
Luka Čeliković, prof.

Grafički crteži i prilozi
Radanović Marija

Tekst otipkao
Peran Josip, dipl. ecc.

Tisak GRO »SLOVO« Beli Manastir

S. Palanka, 04. 06. 1988.

XIX SAVEZNO TAKMIČENJE
MLADIH MATEMATIČARA UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA

VII RAZRED

1. Šestina od ukupne količine neke robe prodata je sa zaradom od 20%, a polovina ukupne količine iste robe prodata je sa gubitkom od 10%. Sa koliko procenata (postotaka) zarade treba prodati ostatak robe da bi se pokrio gubitak?

2. Dan je broj n čije su znamenke (cifre) 60 sedmica i izvjestan broj nula. Dokazati da je vrijednost razlomka $\frac{n-27}{3}$ cio broj, a vrijednost razlomka $\frac{n+27}{9}$ nije cio broj.

3. Odrediti prirodne brojeve $n_1, n_2, \dots, n_k$ (koji ne moraju biti različiti medju sobom) tako da je $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k = 1988$ i $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = 1988$. Koliko ima različitih rešenja? $(k>1)$

4. Na simetrali spoljašnjeg ugla (vanjskog kuta) kod temena (vrha) C trougla (trokuta) ABC izabrana je proizvoljna tačka M. Dokazati da je $MA + MB \geq AC + BC$.

5. U jednakokrakom (jednakokračnom) trouglu (trokutu) ABC, $AC = BC$, kome je ugao (kut) $\measuredangle ACB = 80^\circ$, data je tačka O, takva da je $\measuredangle BAO = 10^\circ$ i $\measuredangle ABO = 30^\circ$. Izračunati ugao $\measuredangle ACO$.

VIII RAZRED

1. Dva broda kreću iz mjesta A i B jedan drugome u susret. Svaki od njih kad stigne u jedno mjesto vraća se natrag u ono drugo. Prvi put brodovi se susreću na 5 km od A, a drugi put na 3 km od B. Odrediti rastojanje od A do B.

2. Date su linearne funkcije (jednadžbe pravaca) $y = -1$, $y = \frac{3}{2}x - 4$, $y = \frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$ i $y = 2x + 7$. Izračunati koordinate temena (vrhova) i površinu četvorougla (četverokuta) kojeg ograničavaju grafovi datih funkcija.

3. Dokazati da razlika broja u zapisu sastavljenog od 100 jedinica i broja u zapisu sastavljenog od 50 dvojki, predstavlja kvadrat cijelog broja.

4. U pravougaoniku (pravokutnik) ABCD tačka M je na stranici CD takva, da je $DM = 2\,CM$. Ako se prave (pravci) AC i BM seku pod pravim uglom (kutom), izračunati ugao $\measuredangle BOM$, gde je tačka O presek (sjecište) dijagonala.

5. Dan je trokut (trougao) ABC i točka M unutar njega. Dokaži, da je $AM \cdot BC + BM \cdot AC + CM \cdot AB \geq 4P$, pri čemu je P površina trokuta (trougla) ABC.

REŠENJA

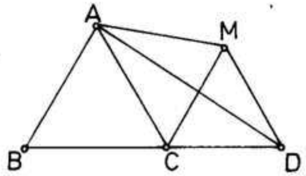
VII RAZRED

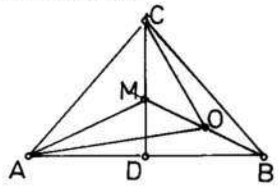
1. Neka je k ukupna količina robe, a c planirana cena. Iz datih podataka dobijamo jednačinu
$$\frac{k}{6} \cdot 0{,}2c + \frac{k}{3} \cdot x \cdot c = \frac{k}{2} \cdot 0{,}1c,$$ gde je x traženi procenat. Rešavajući po x dobijamo $x = 0{,}05 = 5\%$.

2. Zbir cifara broja n je $60 \cdot 7 = 420$. Dakle, n je deljivo sa 3, pa je i $n-27$ deljivo sa 3. Kako 420 nije deljivo sa 9, to ni n nije deljivo sa 9, pa zbog toga ni $n+27$ nije deljivo sa 9.

3. Zbog $1988 = 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 71$ i $2+2+7+71 = 82$, jedno od rešenja će biti $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k = 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 71 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1$ (1906 jedinica). Rešenja ima 10(onoliko koliko ima različitih načina faktorisanja broja 1988).

4. Neka je D tačka na produžetku duži BC, takva da je $CD = CA$ (tj. simetrična sa A u odnosu na CM). Lako se dokazuje da su trouglovi ACM i DCM podudarni, pa je $DM = AM$. Zbog toga je: $MA + MB = MD + MB > BD = BC + CD = BC + AC$.





5. Neka je M presečna tačka visine CD trougla i prave BO (slika). Trougao ABM je jednakokrak, pa je $\measuredangle MAB = \measuredangle MBA = 30^\circ$. Prema tome: $\measuredangle CAM = 20^\circ = \measuredangle MAO$. Sem toga je $\measuredangle ACD = 40^\circ$ (polovina od 80°) i $\measuredangle AOM = \measuredangle OAB + \measuredangle OBA = 40^\circ$. Trouglovi AOM i AMC imaju po dva jednaka ugla i zajedničku stranicu AM, pa su podudarni. Zbog toga je $AO = AC$, pa je AOC jednakokrak trougao i zbog $\measuredangle CAO = 40^\circ$ dobijamo da je $\measuredangle ACO = 70^\circ$.

VIII RAZRED

1. Označimo rastojanje od A do B sa x, brzine brodova sa v_1 i v_2, vreme do prvog susreta sa t_1, a vreme od prvog do drugog susreta sa t_2

Onda je $v_1 t_1 = 5$, $v_2 t_1 = x-5$, $v_1 t_2 = 3+(x-5)$ i $v_2 t_2 = 5+(x-3)$.

Iz $\frac{5}{x-2} = \frac{x-5}{x+2}$ dobijamo $12x - x^2 = 0$, pa je zbog $x > 0$, $x = 12$.

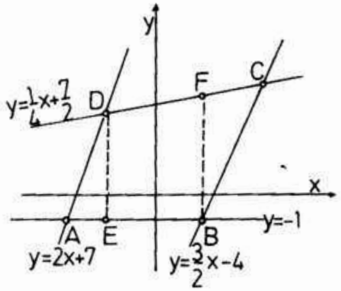
2. Označimo sa A, B, C i D pomenuta temena kao na slici. Njihove koordinate su A(−4, −1), B(2, −1), C(6, 5), D(−2, 3).

Tražena površina je

$P = \frac{1}{2} AE \cdot ED + \frac{1}{2}(ED + BF) \cdot$

$\cdot EB + \frac{1}{2} BF \cdot h_{BF} = \frac{2 \cdot 4}{2} + \frac{4+5}{2} \cdot$

$\cdot 4 + \frac{5 \cdot 4}{2} = 32.$

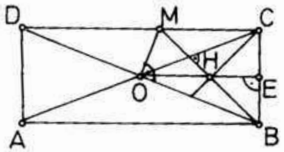


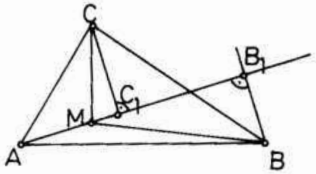
3. $111\ldots11 - 222\ldots22 = \frac{1}{9}(10^{100}-1) - \frac{2}{9}(10^{50}-1) =$

$= \frac{1}{9}(10^{100} - 1 - 2 \cdot 10^{50} + 2) = \frac{1}{9}(10^{2 \cdot 50} - 2 \cdot 10^{50} + 1) = \left(\frac{10^{50}-1}{3}\right)^2.$

Kako je $10^{50}-1$ deljivo sa 9, to je deljivo i sa 3, pa je tvrdjenje dokazano.

4. Neka je E središte stranice BC. Tada je OE⊥BC. Dakle, tačka H (slika) je ortocentar trougla OBC, pa je CH⊥OB. Medjutim, OH je srednja linija trougla DBM, pa je OH = 1/2 DM = MC. Zbog toga je četvoroogao OHCM paralelogram i OM ∥ CH, a otuda i OM⊥OB.





5. Neka su B_1 i C_1 podnožja normala iz B i C na pravu AM (slika).

Tada je $P(ABM) = \frac{1}{2} AM \cdot BB_1$ i $P(ACM) = \frac{1}{2} AM \cdot CC_1$, odakle

$P(ABM) + P(ACM) = \frac{1}{2} AM(BB_1 + CC_1) \leq \frac{1}{2} AM \cdot BC$. Analogno se dobija

$P(ACM) + P(BCM) \leq \frac{1}{2} CM \cdot AB$ i $P(ABM) + P(BCM) \leq \frac{1}{2} BM \cdot AC$.

Sabirajući te tri relacije dobijamo tvrdjenje koje se dokazuje.