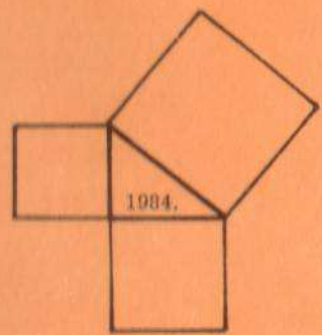
Najtoplije zahvaljujem **prof. Luki Čelikoviću** i **dr. Zdravku Kurniku** na dozvoli da knjižicu
"Matematička natjecanja srednjoškolaca u SFRJ u 1988. godini "
skeniram i objavim na http://public.carnet.hr/mat-natj .
Ovdje možete naći zadatke i rješenja s republičkog natjecanja u SR Hrvatskoj.

Antonija Horvatek
http://public.carnet.hr/~ahorvate

DRUŠTVO MLADIH MATEMATIČARA
»P I T A G O R A«
BELI MANASTIR

Priredili:
Luka Čeliković
dr. Zdravko Kurnik

MATEMATIČKA NATJECANJA SREDNJOŠKOLACA U SFRJ U 1988. GODINI



Beli Manastir, 1990.

DRUŠTVO MLADIH MATEMATIČARA
»P I T A G O R A«
BELI MANASTIR

Priredili:
Luka Čeliković
dr. Zdravko Kurnik

MATEMATIČKA NATJECANJA SREDNJOŠKOLACA U SFRJ U 1988. GODINI

Beli Manastir, 1990.

MATEMATIČKA NATJECANJA SREDNJOŠKOLACA U SFRJ
U 1988. GODINI

Pripremili:

Luka Čeliković
dr. Zdravko Kurnik

Izdavač:

DRUŠTVO MLADIH MATEMATIČARA »PITAGORA«
BELI MANASTIR
Školska 3, 54300 Beli Manastir

Urednici:

Luka Čeliković
Milan Šarić

Tehnički urednik:
Branko Vujaklija

Tisak:

GP »Slovo« Beli Manastir

Beli Manastir, 1990.

SADRŽAJ

P R E D G O V O R

Ova zbirka sadrži riješene zadatke sa matematičkih natjecanja srednjoškolaca u 1988. godini i to sa republičkih natjecanja svih naših Republika, pokrajinskog natjecanja SAP Vojvodine, »Arhimedesovog matematičkog turnira« (SR Srbija) i saveznog natjecanja.

Pri izradi zbirke korišteni su materijali natjecateljskih komisija. U prikupljanju tih materijala posebno su se angažirali prof. Anđelko Marić iz Sinja i prof. Ivo Vujičić iz Titograda.

Zadatke i potpuna rješenja sa »Arhimedesovog matematičkog turnira« dao je prof. Bogoljub Marinković iz Beograda. Dio zadataka pregledao je i dao većinu rješenja sa Saveznog natjecanja dr. Vladimir Volenec iz Zagreba. Pojedina rješenja uzeta su prema rješenjima dr. Vladimira Jankovića iz Beograda (Savezno II 2), Mirana Božičevića iz Zagreba (Savezno II 3), prof. Milovana Mladenovića iz Grocke (Savezno III i IV 2), dr. Pavla Mladenovića iz Beograda (Savezno III i IV 3), te Dijane Ilišević iz Belog Manastira (Republičko SR Crne Gore III 2, 3). Kontrolu kucanog teksta izvršili su Anđa Mijatović i Denis Vidović.

Svim spomenutim osobama najtoplije se zahvaljujemo. Također se zahvaljujemo radnim ljudima GP »Slovo« Beli Manastir, a posebno diplomiranom ekonomisti Dragi Pašajliću i Branku Vujakliji na štampanju zbirke, te radnim organizacijama Baranje, a posebno dipl. oecc. Milki Bošnjak—Mrđa na sufinanciranju zbirke. Unaprijed se zahvaljujemo i svima onima koji nam ukažu na eventualne štamparske greške.

Luka Čeliković
Zdravko Kurnik

SR HRVATSKA

POKRET "NAUKU MLADIMA" SR HRVATSKE

REPUBLIČKO NATJECANJE

Z a d a c i :

I razred:

1) Dokaži da je $\frac{x}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$ cio broj za svaki cijeli broj x.

2) Zadan je realan broj $k \neq 0$ i funkcija $f: R \rightarrow R$ tako da za sve $x \in R$ vrijedi:
$f(x) \neq 1$ i $f(x) \neq 0$, te $f(x+k)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}$.
Dokaži da je $f(x+4k)=f(x)$ za svaki $x \in R$.

3) Nadji sve polinome P za koje je $(P(x))^2=P(x^2)$.

4) U krug je upisan četverokut $ABCD$ čije su dijagonale međusobno okomite. Dokaži da je površina kruga $P=\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2)\pi$, gdje su a,b duljine dijelova dijagonale $\overline{AC}$ (računajući od sjecišta dijagonala do vrhova A i C), a analogno su c,d duljine dijelova dijagonale $\overline{BD}$.

II razred:

1) Riješi jednadžbu $2\cdot(\log_x y+\log_y x)=5$.

2) Po unutarnjoj strani obruča polumjera $2r$ kotrlja se, bez klizanja, kotač polumjera r. Dokaži da zadana točka kotača opisuje jedan promjer obruča.

3) Odredi maksimalnu vrijednost funkcije $f(x)=\frac{x}{ax^2+b}$, $a,b>0$.

4) Odredi one polinome $P(x)$ za koje vrijedi:
$(x+1)\cdot P(x)=(x-2)\cdot P(x+1)$.

III razred:

1) Dokaži da $10 \mid a_1+\ldots+a_{1988} \Rightarrow 10 \mid a_1^5+\ldots+a_{1988}^5$, $a_i \in N$, $i=1,\ldots,1988$.

2) Definirajmo niz: $u_1 = 1$, $u_2 = 3 + 5$, $u_3 = 7 + 9 + 11$, $u_4 = 13 + 15 + 17 + 19$, ... Odredi opći član niza u_k i parcijalnu sumu $\sum\limits_{i=1}^{k} u_i$.

3) Duljina visine uspravnog stošca dva puta je veća od polumjera baze. Nadji omjer volumena kugle pisane oko stošca i kugle upisane u stožac .

4) U prostoru su dane točke $A(2,1,3)$, $B(3,1,5)$, $C(3,3,1)$ i $D(3,0,-2)$. Nadji udaljenost mimoilaznih pravaca AB i CD .

__IV razred:__

1) Nadji sve funkcije $f: Q \longrightarrow R$ takve da za sve $x, y \in Q$ vrijedi: $f(x+y) = f(x).f(y)$, $f(1) = 2$.

2) Neka su $a, x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitivni realni brojevi, $n \geq 2$. Dokaži da je:

$$\frac{a^{x_1 - x_2}}{x_1 + x_2} + \frac{a^{x_2 - x_3}}{x_2 + x_3} + \ldots + \frac{a^{x_n - x_1}}{x_n - x_1} \geq \frac{n^2}{2(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)}$$ i

ispitaj kada nastupa jednakost.

3) Dokaži da je za svaki prirodan broj n izraz $(3 + 2\sqrt{2})^n + (3 - 2\sqrt{2})^n$ cijeli broj, koji nije djeljiv sa 5 .

4) Neka je R radijus kugle opisane oko pravilne četverostrane piramide, a r radijus kugle upisane u tu piramidu. Dokaži da je $\frac{R}{r} \geq \sqrt{2} + 1$.

R j e š e n j a :

__I razred:__

1) $$f(x) = \frac{x}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} = \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{6} = \frac{x(x+1)(x+2)}{6} .$$

Kako je produkt $x(x+1)(x+2)$ tri uzastopna cijela broja x, $x+1$, $x+2$ djeljiv sa 6 (dokažite to matematičkom indukcijom !), tada je očito $f(x)$ cio broj .

2) $$f(x + 2k) = f((x + k) + k) = \frac{1 + f(x+k)}{1 - f(x+k)} = \frac{1 + \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)}}{1 - \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)}} = - \frac{1}{f(x)} ,$$

$$f(x + 4k) = f((x + 2k) + 2k) = - \frac{1}{f(x + 2k)} = f(x), \text{ tj.}$$

$f(x + 4k) = f(x)$, $\forall x \in R$.

3) Neka je $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o$, $a_n \neq 0$. Tada je $P(0) = a_o$, $P(0^2) = a_o$ pa zbog uvjeta zadatka proizlazi $a_o^2 = a_o$, odakle je $a_o \in \{0,1\}$.

1^o) Pretpostavimo da je $a_o = 1$. Neka je k najmanji broj iz skupa $\{1,2,\ldots,n\}$ takav da je $a_k \neq 0$. Tada je

$$P(x) = a_n x^n + \ldots + a_k x^k + 1 ,$$

$$(P(x))^2 = 1 + 2a_k x^k + \ldots ,$$

$$P(x^2) = 1 + a_k x^{2k} + \ldots .$$

Odavde zaključujemo da je $(P(x))^2 \neq P(x^2)$. Dakle, a_o ne može poprimiti vrijednost 1.

2^o) Pretpostavimo da je $a_o = 0$ i k najmanji broj iz skupa $\{1,2,\ldots,n-1\}$ za koji je $a_k \neq 0$. Tada je

$$P(x) = a_n x^n + \ldots + a_k x^k = x^k(a_n x^{n-k} + \ldots + a_k) = x^k.Q(x) ,$$

$$P(x^2) = x^{2k}.Q(x^2) ,$$

$$(P(x))^2 = x^{2k}.(Q(x))^2 .$$

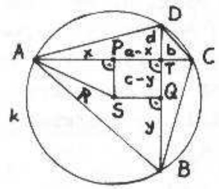
Iz uvjeta $(P(x))^2 = P(x^2)$ proizlazi $(Q(x))^2 = Q(x^2)$, pa na temelju razmatranja u 1^o zaključujemo da slobodni koeficijent a_k polinoma Q mora biti 0.

Dakle, mora biti $a_o = a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0$ i $a_n = 1$ (zašto?).

Traženi polinomi su $P(x) = x^n$, $n \in N$.

Još dva rješenja dobivamo uz pretpostavku da je P konstanta: $P(x) = c$. Naime $(P(x))^2 = P(x^2) \Rightarrow c^2 = c \Rightarrow c \in \{0,1\}$ i $P(x) = 0$, $P(x) = 1$.

4)



$|PA| = |PC| \Rightarrow x = a - x + b \Rightarrow x = (a + b)/2$,

$|QB| = |QD| \Rightarrow y = c - y + d \Rightarrow y = (c + d)/2$

$\Rightarrow c - y = c - (c+d)/2 = (c - d)/2$,

$ab = cd$ (potencija točke T s obzirom na kružnicu k),

ΔASP: $R^2 = x^2 + (c - y)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow R^2 = (\frac{a+b}{2})^2 + (\frac{c-d}{2})^2 \Rightarrow R^2 = \frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2+2ab-2cd) \Rightarrow$

$\Rightarrow R^2 = \frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2+2ab-2ab) \Rightarrow R^2 = \frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow P_k = R^2\pi = \frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2)\pi .$

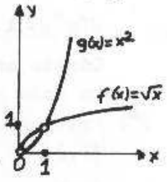
<u>II razred:</u>

1) Uvjeti: $x \in R^+ \setminus \{1\}$, $y \in R^+ \setminus \{1\}$.

$2(\log_x y + \log_y x) = 5 \Rightarrow 2(\log_x y + 1/\log_x y) = 5 \;/.\log_x y \Rightarrow$

$\Rightarrow 2.\log_x^2 y - 5.\log_x y + 2 = 0 \Rightarrow \log_x y = \frac{5 \mp 3}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} (\log_x y)_1 = 1/2 \Rightarrow y_1 = x^{1/2} \Rightarrow y_1 = \sqrt{x},\ x \in (R^+ \setminus \{1\}) \\ (\log_x y)_2 = 2 \Rightarrow y_2 = x^2,\ x \in (R^+ \setminus \{1\}) . \end{cases}$

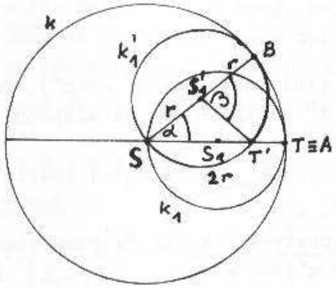


Neka je $f:(R^+ \setminus \{1\}) \longrightarrow (R^+ \setminus \{1\})$, $f(x) = \sqrt{x}$

i $g:(R^+ \setminus \{1\}) \longrightarrow (R^+ \setminus \{1\})$, $g(x) = x^2$.

Tada je očito $g^{-1} = f$, tj. $f^{-1} = g$ (provjerite to !).

2)



Neka je k obruč polumjera 2r, a k_1 kotač polumjera r koji se kotrlja po unutrašnjoj strani obruča . Uočimo neku točku T kotača k_1. U nekom momentu točka T će pasti u neku točku A obruča k. U nekom drugom momentu kotač k_1 će doći u neki položaj k_1' i dodirivat će obruč k u nekoj točki B. Pri tome će vrijediti $\widehat{BT'} = \widehat{BA}$, odakle je $|S_1'B|.\beta = |SA|.\alpha$, $r\beta = 2r\alpha$, $\beta = 2\alpha$. No kako je $\beta = 2.\sphericalangle T'SB$ (središnji kut β jednak je dvostrukom obodnom kutu $\sphericalangle T'SB$ nad istim kružnim lukom $\widehat{BT'}$), tada je $\alpha = \sphericalangle T'SB$, tj. T' leži na spojnici $\overline{SA}$.

3) $y = \frac{x}{ax^2+b} \Leftrightarrow ayx^2 - x + by = 0,$

$x \in R \Leftrightarrow D = B^2 - 4AC \geq 0 \Leftrightarrow (-1)^2 - 4ay.by \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - 4aby^2 \geq 0 \Leftrightarrow 4aby^2 \leq 1 \Leftrightarrow y^2 \leq \frac{1}{4ab} \Leftrightarrow |y| \leq \frac{1}{2\sqrt{ab}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y \in \left[-\frac{1}{2\sqrt{ab}}, \frac{1}{2\sqrt{ab}}\right] .$

Funkcija $y = \frac{x}{ax^2+b}$ će imati maksimum $y_M = \frac{1}{2\sqrt{ab}}$.

Ostaje još izračunati x_M :

$a.\frac{1}{2\sqrt{ab}}x^2 - x + b.\frac{1}{2\sqrt{ab}} = 0 \Rightarrow ax^2 - 2\sqrt{ab}x + b = 0 \Rightarrow (\sqrt{a}x - \sqrt{b})^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{b}{a}} \Rightarrow x_M = \sqrt{\frac{b}{a}}$.

Dakle, $M = (x_M, y_M) = (\sqrt{\frac{b}{a}}, \frac{1}{2\sqrt{ab}})$.

4) $(x+1).P(x) = (x-2).P(x+1) \quad (*)$,

$(x-2) \nmid (x+1)$ (općenito) $\overset{(*)}{\Rightarrow} x-2 \mid P(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(x) = (x-2).P_1(x) \quad (**) \Rightarrow P(x+1) = (x-1).P_1(x+1) \Rightarrow$

$\overset{(*),(**)}{\Rightarrow} (x+1).(x-2)P_1(x) = (x-2).(x-1)P_1(x+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x+1).P_1(x) = (x-1).P_1(x+1) \quad (***)$,

$x-1 \nmid x+1 \overset{(***)}{\Rightarrow} x-1 \mid P_1(x) \Rightarrow P_1(x) = (x-1).P_2(x) \quad (****) \Rightarrow$

$\Rightarrow P_1(x+1) = x.P_2(x+1) \overset{(***),(****)}{\Rightarrow} (x+1).(x-1)P_2(x) =$

$= (x-1).xP_2(x+1) \Rightarrow (x+1).P_2(x) = x.P_2(x+1) \quad (*****)$,

$x \nmid x+1 \overset{(*****)}{\Rightarrow} x \mid P_2(x) \Rightarrow P_2(x) = x.P_3(x) \quad (******) \Rightarrow$

$\Rightarrow P_2(x+1) = (x+1).P_3(x+1) \overset{(*****),(******)}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow (x+1).xP_3(x) = x.(x+1)P_3(x+1) \Rightarrow P_3(x) = P_3(x+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow P_3(x) = a$ (konstanta) $(*******) \overset{(******)}{\Rightarrow} P_2(x) = ax \Rightarrow$

$\overset{(****)}{\Rightarrow} P_1(x) = ax(x-1) \overset{(**)}{\Rightarrow} P(x) = ax(x-1)(x-2)$, $a \in R$.

<u>III razred:</u>

1) $\sum_{i=1}^{1988} a_i^5 = \sum_{i=1}^{1988} (a_i^5 - a_i) + \sum_{i=1}^{1988} a_i \quad (*)$.

Dokažimo prvo da $10 / n^5 - n$, $n \in N$ (**).
Dokaz provodimo matematičkom indukcijom:
(a) Za $n = 1$ tvrdnja vrijedi jer $10 / 0$.
(b) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = k$, tj. da $10 / k^5 - k$.
(c) Dokazati da tvrdnja vrijedi i za $n = k + 1$, tj. da $10 / (k+1)^5 - (k+1)$.
Dokaz:
$(k+1)^5 - (k+1) = k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1 - k - 1 =$
$= (k^5 - k) + 10(k^3 + k^2) + 5(k^4 + k) =$
$= (k^5 - k) + 10(k^3 + k) + 5k(k+1)(k^2 - k + 1)$, što je djeljivo sa 10 jer $10 / k^5 - k$ (prema (b)), $10 / 10(k^3 + k)$ i $10 / 5k(k+1)(k^2 - k + 1)$ (zbog $2 / k(k+1)$).

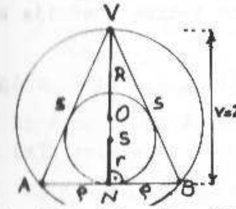
Prema (**) je $\sum_{i=1}^{1988} (a_i^5 - a_i)$ djeljivo sa 10, a po pretpostavci je $\sum_{i=1}^{1988} a_i$ djeljivo sa 10, pa je tvrdnja zadatka (na osnovu (*)) očigledna.

2) Prvo dokažimo matematičkom indukcijom da je $S_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ (*).
(a) Za $n = 1$ tvrdnja vrijedi jer je $1 = 1^2$.
(b) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = k$, tj. da je $S_k = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$.
(c) Dokazati da tvrdnja vrijedi i za $n = k + 1$, tj. da je $S_{k+1} = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$.
Dokaz:
$S_{k+1} = S_k + (2k + 1) \overset{(b)}{=} k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2$.

Stim je tvrdnja (*) dokazana.
Kako u_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ ima i sumanada, tada $U_k = \sum_{i=1}^{k} u_i$ ima $1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ članova, pa je
$U_k = \sum_{i=1}^{k} u_i = S_{k(k+1)/2} \overset{(*)}{=} \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$, tj.

$U_k = \sum_{i=1}^{k} u_i = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$ (**). Nadalje je $u_k = U_k - U_{k-1} =$
$= \frac{k^2(k+1)^2}{4} - \frac{(k-1)^2k^2}{4} = k^3$, tj. $u_k = k^3$ (***).

3)

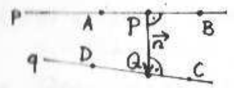


ΔANV: $s = \sqrt{4\rho^2 + \rho^2} = \rho\sqrt{5}$,
$P_{\Delta ABV} = 2\rho^2$,
$R = \frac{|AB| \cdot |BV| \cdot |VA|}{4P_{\Delta ABV}}$,
$r = \frac{2P_{\Delta ABV}}{|AB| + |BV| + |VA|}$,

$\frac{R}{r} = \frac{|AB| \cdot |BV| \cdot |VA| \cdot (|AB| + |BV| + |VA|)}{8P^2_{\Delta ABV}} = \frac{5(1+\sqrt{5})}{8}$.

Konačno je $\frac{V_R}{V_r} = (\frac{R}{r})^3 = \frac{125(2+\sqrt{5})}{64}$.

4)



Označimo li pravce AB i CD sa p i q, dobivamo:

$p \ldots (x,y,z) = (x_A + \lambda(x_B - x_A), y_A + \lambda(y_B - y_A), z_A + \lambda(z_B - z_A)) =$
$= (2 + \lambda, 1, 3 + 2\lambda)$, $\lambda \in R$ (*),
$q \ldots (x,y,z) = (x_C + \mu(x_D - x_C), y_C + \mu(y_D - y_C), z_C + \mu(z_D - z_C)) =$
$= (3, 3 - 3\mu, 1 - 3\mu)$, $\mu \in R$ (**).

Svaka točka $P \in p$ zadovoljava uvjet (*), a svaka točka $Q \in q$ uvjet (**).
Tražimo one točke $P \in p$ i $Q \in q$ za koje će biti $\overrightarrow{PQ} \perp p$ i $\overrightarrow{PQ} \perp q$. Tada će tražena udaljenost $d(p,q)$ biti jednaka udaljenosti $d(P,Q)$. Kako je $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = (1,0,2)$, $\overrightarrow{CD} = (x_D - x_C, y_D - y_C, z_D - z_C) = (0,-3,-3)$, $\vec{n} = \overrightarrow{PQ} =$
$= (x_Q - x_P, y_Q - y_P, z_Q - z_P) = (1 - \lambda, 2 - 3\mu, -2 - 2\lambda - 3\mu)$, tada iz $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{CD}$ izlazi:
$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ & $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \Rightarrow (1 - \lambda, 2 - 3\mu, -2 - 2\lambda - 3\mu) \cdot (1,0,2) =$
$= 0$ & $(1 - \lambda, 2 - 3\mu, -2 - 2\lambda - 3\mu) \cdot (0,-3,-3) = 0 \Rightarrow$
$-5\lambda - 6\mu = 3$ & $6\lambda + 18\mu = 0 \Rightarrow \lambda = -1$ & $\mu = 1/3 \Rightarrow n = \overrightarrow{PQ} =$
$= (2,1,-1) \Rightarrow d(p,q) = d(P,Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |\vec{n}| = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = \sqrt{6}$.

IV razred:

1) Prema uvjetima zadatka vrijedi:

$f(x+y)=f(x).f(y),\ \forall x,y\in Q$ (1) & $f(1)=2$ (2) .

Očito je da funkcija $f_2:Q\longrightarrow R,\ f_2(x)=2^x$, zadovoljava uvjete (1) i (2). Pokazat ćemo da je to jedina funkcija koja zadovoljava te uvjete.

Iz $f(x)=f(\frac{x}{2}+\frac{x}{2})\overset{(1)}{=}f(\frac{x}{2}).f(\frac{x}{2})=(f(\frac{x}{2}))^2\geq 0,\ \forall x\in Q$, slijedi da je $f(Q)\subseteq R_0^+$. Kada bi postojao neki $y\in Q$, za koji bi bilo $f(y)=0$, tada bi za svaki $x\in Q$ vrijedilo: $f(x)=$ $=f((x-y)+y)\overset{(1)}{=}f(x-y).f(y)=f(x-y).0=0$, što je u kontradikciji sa (2). Dakle, $f(Q)\subseteq R^+$.

Definirajmo sada funkciju $g_2:f(Q)\longrightarrow R,\ g_2(x)=\log_2 x$ (3), a zatim definirajmo kompoziciju funkcija

$h=g_2 o f:Q\rightarrow R,\ h(x)=g_2(f(x))=\log_2 f(x)$ (4) .

Prema (2) je $h(1)=1$ (5) & $h(x+y)=h(x)+h(y)$ (6) .

Matematičkom indukcijom se lako pokazuje (pokažite to !) da je $h(x_1+x_2+\ldots+x_n)=h(x_1)+h(x_2)+\ldots+h(x_n)$ (7) .

Odatle izlazi: $h(n)=h(\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n})\overset{(7)}{=}\underbrace{h(1)+h(1)+\ldots+h(1)}_{n}=$

$=n.h(1)\overset{(5)}{=}n.1=n$ (8), $1=h(1)=h(n\cdot\frac{1}{n})=$

$=h(\underbrace{\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}}_{n})\overset{(7)}{=}\underbrace{h(\frac{1}{n})+\ldots+h(\frac{1}{n})}_{n}=n.h(\frac{1}{n})\Rightarrow h(\frac{1}{n})=\frac{1}{n}$ (9).

$h(\frac{m}{n})=h(\underbrace{\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}}_{m})\overset{(7)}{=}\underbrace{h(\frac{1}{n})+\ldots+h(\frac{1}{n})}_{m}=m.h(\frac{1}{n})\overset{(9)}{=}m.\frac{1}{n}=\frac{m}{n}\Rightarrow$

$\Rightarrow h(\frac{m}{n})=\frac{m}{n}$ (10).

Dakle je $h(x)=x,\ \forall x\in Q$ (11) , odnosno $\log_2 f(x)=x$, tj. $f(x)=2^x$.

2) Koristeći odnos aritmetičke i geometrijske sredine

$\frac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots+x_n)\geq(x_1x_2\ldots x_n)^{1/2}$ (*) (dokažite ga matematičkom indukcijom), dobivamo:

$$\frac{1}{n}\left(\frac{a^{x_1-x_2}}{x_1+x_2}+\frac{a^{x_2-x_3}}{x_2+x_3}+\ldots+\frac{a^{x_n-x_1}}{x_n+x_1}\right)\overset{(*)}{\geq}$$

$$\overset{(*)}{\geq}\left(\frac{a^{x_1-x_2}}{x_1+x_2}\cdot\frac{a^{x_2-x_3}}{x_2+x_3}\cdots\frac{a^{x_n-x_1}}{x_n+x_1}\right)^{1/n}=$$

$$=\frac{1}{((x_1+x_2)\ldots(x_n+x_1))^{1/n}}\overset{(*)}{\geq}\frac{1}{\frac{1}{n}((x_1+x_2)+\ldots+(x_n+x_1))}=$$

$=\frac{n}{2(x_1+x_2+\ldots+x_n)}$, odakle slijedi tvrdnja zadatka

$$\frac{a^{x_1-x_2}}{x_1+x_2}+\frac{a^{x_2-x_3}}{x_2+x_3}+\ldots+\frac{a^{x_n-x_1}}{x_n+x_1}\geq\frac{n^2}{2(x_1+x_2+\ldots+x_n)}\quad(**).$$

Pošto u (*) vrijedi jednakost akko je $x_1=x_2=\ldots=x_n$, tada će u (**) vrijediti jednakost akko je

$\frac{a^{x_1-x_2}}{x_1+x_2}=\frac{a^{x_2-x_3}}{x_2+x_3}=\ldots=\frac{a^{x_n-x_1}}{x_n+x_1}$ & $x_1+x_2=x_2+x_3=\ldots=x_n+x_1$, tj.

akko je $a^{x_1-x_2}=a^{x_2-x_3}=\ldots=a^{x_n-x_1}$ & $x_1+x_2=x_2+x_3=\ldots$ $\ldots=x_n+x_1$. Iz posljednje jednakosti izlazi:

$x_1=x_3=x_5=\ldots$, $x_2=x_4=x_6=\ldots$, $x_2=x_n$.

Za $a=1$ i n paran broj u (**) će vrijediti jednakost akko je $x_1=x_3=\ldots=x_{n-1}$ & $x_2=x_4=\ldots=x_n$, a u svim ostalim slučajevima akko je $x_1=x_2=x_3=\ldots=x_n$.

3) Supstitucijom : $a=3+2\sqrt{2},\ b=3-2\sqrt{2}$ (*), odakle je : $a+b=6,\ ab=1$ (**), izlazi:

$a+b=6\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 5)$, $ab=1\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 5)$,

$S_1=a^1+b^1=6\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 5)$,

$S_2=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab\equiv 1^2-2.1\ (\mathrm{mod}\ 5)\equiv -1\ (\mathrm{mod}\ 5)$,

$S_3=a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2)-ab(a+b)=(a+b)S_2-abS_1\equiv$

$\equiv 1.S_2-1.S_1\ (\mathrm{mod}\ 5)\equiv S_2-S_1\ (\mathrm{mod}\ 5)\equiv -1-1\ (\mathrm{mod}\ 5)\equiv$

$\equiv -2\ (\mathrm{mod}\ 5)$,

$S_4=a^4+b^4=(a+b)S_3-abS_2\equiv S_3-S_2\ (\mathrm{mod}\ 5)\equiv -1\ (\mathrm{mod}\ 5)$,

$S_5=a^5+b^5\equiv S_4-S_3\ (\mathrm{mod}\ 5)\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 5)$,

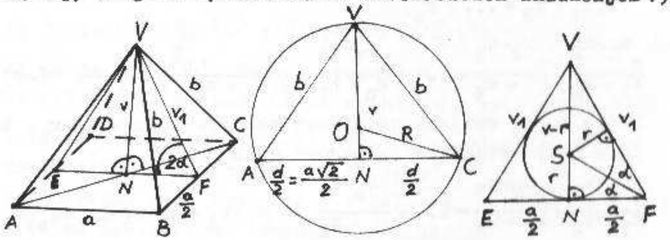
$S_6=a^6+b^6\equiv S_5-S_4\ (\mathrm{mod}\ 5)\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 5)$,

$S_7 \equiv 1 \pmod 5 \equiv S_1 \pmod 5$,

$S_8 \equiv -1 \pmod 5 \equiv S_2 \pmod 5$,

$S_n = S_{6p+q} \equiv S_{n-1} - S_{n-2} \pmod 5 \equiv S_q \pmod 5$, gdje je $n = 6p+q$, $0 \leq q < 6$ (dokažite to matematičkom indukcijom !).

4)



ΔVAN: $b^2 = v^2 + (a\sqrt{2}/2)^2 = \frac{1}{2}(2v^2 + a^2)$ (1) .

Pošto je polumjer R opisane kugle jednak polumjeru trokutu ACV opisane kružnice, imamo:

ΔACV: $R = \frac{dbb}{4P_{\Delta ACV}} = \frac{db^2}{2dv} = \frac{b^2}{2v} \overset{(1)}{=} \frac{2v^2 + a^2}{4v}$ (2),

ΔFVN: $v = \frac{a}{2}\operatorname{tg} 2\alpha$ (3) , (2) & (3) $\Rightarrow$ $R = \frac{a(\operatorname{tg}^2 2\alpha + 2)}{4\operatorname{tg} 2\alpha}$ (4) .

Pošto je polumjer r upisane kugle jednak polumjeru tro - kutu EFC upisane kružnice, imamo: $r = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha$ (5) .

Iz (4) i (5) sada slijedi:

$\frac{R}{r} = \frac{\operatorname{tg}^2 2\alpha + 2}{2\operatorname{tg} 2\alpha . \operatorname{tg}\alpha} = \frac{\operatorname{tg}^4\alpha + 1}{2\operatorname{tg}^2\alpha(1-\operatorname{tg}^2\alpha)}$ (6), na osnovu čega izlazi :

$\frac{R}{r} \geq \sqrt{2} + 1 \overset{(5)}{\Leftrightarrow} \frac{\operatorname{tg}^4\alpha + 1}{2\operatorname{tg}^2\alpha(1-\operatorname{tg}^2\alpha)} \geq \sqrt{2} + 1$ $/ . 2\operatorname{tg}^2\alpha(1-\operatorname{tg}^2\alpha) > 0$ (zbog $\alpha \in (0, \frac{\pi}{4})$) $\Leftrightarrow$ $\operatorname{tg}^4\alpha \geq 2(\sqrt{2}+1)\operatorname{tg}^2\alpha(1-\operatorname{tg}^2\alpha)$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\underbrace{(2\sqrt{2}+3)}_{A}(\operatorname{tg}^2\alpha)^2 \underbrace{- 2(\sqrt{2}+1)}_{B}\operatorname{tg}^2\alpha \underbrace{+ 1}_{C} \geq 0$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $A > 0$ & $D = B^2 - 4AC \geq 0$, što je uvijek istinito zbog $A = 2\sqrt{2} + 3 > 0$ i $D = 4(\sqrt{2}+1)^2 - 4(2\sqrt{2}+3) = 0$.