Najtoplije zahvaljujem višem savjetniku **Luki Čelikoviću** i prof. **Milanu Šariću** na dopuštenju da se dijelovi zbirke zadataka "Matematička natjecanja u Jugoslaviji 1989. godine - za učenike osnovnih škola" skeniraju i objave na http://public.carnet.hr/mat-natj .

Antonija Horvatek
http://public.carnet.hr/~ahorvate

DMM »PITAGORA« BELI MANASTIR

PRIREDILI:
MILAN ŠARIĆ — LUKA ČELIKOVIĆ

# MATEMATIČKA NATJECANJA U JUGOSLAVIJI 1989. GODINE

ZA UČENIKE OSNOVNIH ŠKOLA

Beli Manastir, 1990.

MATEMATIČKA NATJECANJA OSNOVNOŠKOLACA U SFRJ
U 1989. GODINI

Priredili:
**Milan Šarić**
**Luka Čeliković**

Izdavač:
DRUŠTVO MLADIH MATEMATIČARA »PITAGORA«
BELI MANASTIR
Školska 3, 54300 Beli Manastir

Urednici:
**Luka Čeliković**
**Milan Šarić**

Tehnički urednik:
**Branko Vujaklija**

Tisak:
GP »Slovo« Beli Manastir

# SR HRVATSKA

1989.

OPĆINSKO NATJECANJE

Z a d a c i (DRUGA SKUPINA) :

**V razred:**

1) Kojom znamenkom završava broj $1246\cdot1347\cdot1448\cdot1549 + 4321\cdot7533\cdot8643\cdot2467$ ?

2) Što sve može biti presjek dva trokuta? Na koliko najviše dijelova ta dva trokuta mogu podijeliti ravninu? Nacrtaj odgovarajuće slike.

3) U prazne kvadratiće lika upiši brojeve tako, da zbroj brojeva u svaka 3 susjedna kvadratića bude 21. Obrazloži postupak.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | | | | | | | | 6 | | |

4) Tri kokoši za tri dana snesu tri jajeta. Koliko jaja snesu 12 kokoši za 12 dana ?

**VI razred:**

1) Izračunaj broj x iz jednakosti

$$24960:\left(3360-\frac{300\cdot(200-6x)}{115}\right)=8.$$

2) Dokaži da zbroj 12 uzastopnih prirodnih brojeva nikada nije djeljiv sa 4.

3) Svaka od 3 posude sadrži cijeli broj litara, a sve 3 zajedno ne sadrže ni 30 litara. Napunimo li prvu posudu vodom, pa svu vodu prelijemo u drugu, u drugoj će biti 2/3 njene ukupne sadržine, a ako istu količinu prelijemo u treću, u njoj će biti 3/4 od njene ukupne sadržine. Kolika je sadržina svake pojedine posude ?

4) U sobi površine 21 $m^2$ položena su 3 saga oblika pravokutnika. Površina jednog je 8 $m^2$, drugog 7 $m^2$ i trećeg 6 $m^2$. Po dva saga zajednički prekrivaju površinu od 2 $m^2$, a sva 3 zajednički prekrivaju površinu od 1 $m^2$.

a) Kolika površina poda nije pokrivena sagovima ?

b) Kolika je površina dijela poda koji je pokriven samo najvećim sagom ?

**VII razred:**

1) Duljine dviju stranica trokuta jednake su 6,21 cm i 1,47 cm. Kolika je duljina treće stranice, ako je njena duljina prirodni broj ?

2) Prosjek starosti 11 igrača u nekoj nogometnoj momčadi je 22 godine. Za vrijeme igre jedan igrač, zbog povrede, načas napusti teren, a prosjek godina starosti igrača te momčadi koji ostanu u igri je 21 godina. Koliko godina ima igrač koji je napustio igru ?

3) Cijena jednog proizvoda donosila je tvornici gubitak od 20 %. Nakon toga cijena je povećana najprije za 10 %, a odmah zatim za daljnjih 35 %. Koliki je sada dobitak u postocima ?

4) U trokutu ABC je sjecištem U simetrala kuteva $\beta$ i $\gamma$ povučen pravac paralelan sa stranicom $\overline{BC}$. Ako su $B_1$ i $C_1$ sjecišta tog pravca sa stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, tada vrijedi jednakost $|B_1C_1| = |BB_1| + |CC_1|$. Dokaži.

**VIII razred:**

1) Zadan je vrh B(-4,-5) trokuta ABC i jednadžbe $5x+3y-4=0$, $3x+8y+13=0$ dviju njegovih visina. Odredi koordinate vrhova A i C.

2) Opseg pravokutnika je 28 cm, a duljina dijagonale je 10 cm. Odredi duljine stranica pravokutnika.

3) Odredi vrijednosti x i y za koje će izraz $4x^2+9y^2-12x+30y+1989$ imati najmanju moguću vrijednost. Odredi tu vrijednost danog izraza.

4) Dan je jednakokračan trokut ABC s osnovicom $\overline{AB}$. Ako je M bilo koja točka pravca AB takva, da $M\notin\overline{AB}$, tada razlika udaljenosti točke M do pravaca na kojima leže krakovi ne ovisi o izboru točke M. Dokaži.

R j e š e n j a :

**V razred:**

1) Prvi pribrojnik završava znamenkom 4, a drugi znamenkom 3, pa zbroj završava znamenkom 7.

2) Prazan skup, točka, dužina, trokut, četverokut, peterokut i šesterokut (nacrtajte odgovarajuće slike). Maksimalan broj dijelova ravnine (u slučaju šesterokuta) je 8.

3) Označimo brojeve u praznim kvadratićima redom sa a,b,c,d, e,f,g,h,i. Tada iz $7+a+b=a+b+c$ izlazi $c=7$ i analogno tome $f=h=7$. Sada lako izlazi da je $i=g=8$, $e=6$, $d=8$, $b=6$, $a=8$.

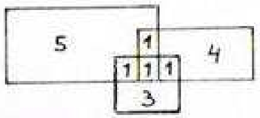
4) Jedna kokoš za 3 dana snese 1 jaje, a za 12 dana 4 jaja, pa 12 kokoši za 12 dana snesu $12 \cdot 4 = 48$ jaja.

**VI razred:**

1) $x=18$.

2) Neka su $n, n+1, \ldots, n+11$ 12 uzastopnih prirodnih brojeva. Tada je $n+(n+1)+\ldots+(n+11)=12n+66=6\cdot(2n+11)$. Kako je $2n+11$ neparan broj, a broj 6 nije djeljiv sa 4, tada ni broj $6\cdot(2n+11)$ nije djeljiv sa 4.

3) Neka su x,y,z sadržine posuda u litrama. Tada je $x=\frac{2}{3}y$ i $x=\frac{3}{4}z$, pa je x djeljiv sa 2 i 3, tj. sa 6, y sa 3, a z sa 4. Lako se vidi da je $x=12$, $y=9$, $z=8$ jedino rješenje zadatka.

4) 


a) Nije pokriveno $21-(5+4+3+1+1+1+1)=5\ m^2$ poda.

b) Samo najvećim sagom pokriveno je $8-(1+1+1)=5\ m^2$ poda.

**VII razred:**

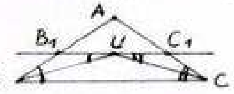
1) Duljina svake stranice trokuta veća je od razlike duljina, a manja od zbroja duljina ostalih dviju stranica. Iz $|a-b|<c<a+b$ slijedi $4{,}74<c<7{,}69$, odakle je (zbog $c \in Z$) $c \in \{5\text{ cm}, 6\text{ cm}, 7\text{ cm}\}$.

2) Neka je S zbroj godina starosti svih 11 igrača. Tada je $S=22\cdot 11$. Neka je nadalje x broj godina igrača koji je napustio igru. Tada iz $S-x=21\cdot 10$ izlazi $x=32$ god.

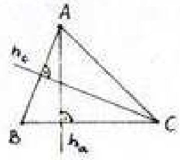
3) Neka je x stvarna vrijednost proizvoda. Tada je $x-20\%x=0{,}8x$ prodajna cijena, $1{,}1\cdot 0{,}8x=0{,}88x$ cijena nakon prvog poskupljenja, $1{,}35\cdot 0{,}88x=1{,}188x$ konačna cijena, pa je dobitak $0{,}188x=18{,}8\%x$.

4) Iz $\sphericalangle B_1BU=\sphericalangle UBC=\frac{\beta}{2}$ (BU je simetrala kuta $\beta$) i $\sphericalangle UBC=\sphericalangle BUB_1$ (kutevi sa paralelnim kracima) slijedi da je $\sphericalangle BUB_1=\frac{\beta}{2}$, pa je trokut $BUB_1$ jednakokračan, tj. vrijedi $|BB_1|=|B_1U|$. Analogno (iz jednakokračnosti trokuta $UCC_1$) slijedi da je $|CC_1|=|UC_1|$, pa je $|B_1C_1|=|B_1U|+|UC_1|=|BB_1|+|CC_1|$. (Vidi skicu).






**VIII razred:**

1) 


$B(-4,-5) \notin h_a, h_c$

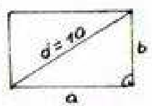
$h_a \ldots 5x+3y-4=0 \ldots y=-\frac{5}{3}x+\frac{4}{3}$

$h_c \ldots 3x+8y+13=0 \ldots y=-\frac{3}{8}x-\frac{13}{8}$

Korištenjem uvjeta okomitosti pravaca BC i $h_a$, dobivamo da je koeficijent smjera pravca BC jednak $a_{BC}=\frac{3}{5}$, pa, korištenjem jednadžbe pravca točkom B, $y-y_B=a_{BC}(x-x_B)$, dobivamo $BC \ldots 3x-5y-13=0$.

Analogno izlazi $a_{AB}=\frac{8}{3}$, $AB \ldots 8x-3y+17=0$.

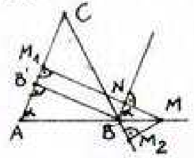
Iz $A=AB \cap h_a$ i $C=BC \cap h_c$ izlazi $A(-1,3)$ i $C(1,-2)$.

2) 


Iz $2(a+b)=28$ izlazi $a+b=14$ (1), a odatle (kvadriranjem) $a^2+b^2+2ab=196$, tj. (zbog $a^2+b^2=100$) $2ab=96$. Sada je $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab=100-96=4$, tj. $a-b=2$ (2).

Iz (1) i (2) izlazi: $a=8$ cm, $b=6$ cm.

3) Iz $4x^2+9y^2-12x+30y+1989=(2x-3)^2+(3y+5)^2+1955$ slijedi da će navedeni izraz biti minimalan za $2x-3=0$ i $3y+5=0$, tj. za $x=\frac{3}{2}$ i $y=-\frac{5}{3}$, kada će vrijednost tog izraza biti 1955.

4) 


Treba dokazati da je razlika $|MM_1|-|MM_2|$ stalna i da ne zavisi od položaja točke M.

Iz točke B nacrtamo visinu na krak $\overline{AC}$ i paralelu sa krakom $\overline{AC}$.

Kako je četverokut $BB'M_1N$ pravokutnik, to je $|BB'|=|NM_1|$. Nadalje je $\sphericalangle CAB=\sphericalangle NBM$ (kutevi sa paralelnim kracima) i $\sphericalangle MBM_2=\sphericalangle ABC$ (vršni kutevi), pa, kako je $\sphericalangle CAB=\sphericalangle ABC$, slijedi da je $\sphericalangle NBM=\sphericalangle MBM_2$. Uz to je $\overline{BM}$ zajednička stranica pravokutnih trokuta NBM i $BM_2M$, pa iz sukladnosti trokuta BMN i $BMM_2$ slijedi da je $|NM|=|MM_2|$. Stoga je $|MM_1|-|MM_2|=|MM_1|-|MN|=|NM_1|=|BB'|$, tj. razlika $|MM_1|-|MM_2|$ je jednaka duljini visine na krak i ne ovisi o položaju točke M.