Najtoplije zahvaljujem višem savjetniku **Luki Čelikoviću** i prof. **Milanu Šariću** na dopuštenju da se dijelovi zbirke zadataka "Matematička natjecanja u Jugoslaviji 1989. godine - za učenike osnovnih škola" skeniraju i objave na http://public.carnet.hr/mat-natj .

Antonija Horvatek
http://public.carnet.hr/~ahorvate

DMM »PITAGORA« BELI MANASTIR

PRIREDILI:
MILAN ŠARIĆ — LUKA ČELIKOVIĆ

MATEMATIČKA NATJECANJA U JUGOSLAVIJI 1989. GODINE

ZA UČENIKE OSNOVNIH ŠKOLA

Beli Manastir, 1990.

MATEMATIČKA NATJECANJA OSNOVNOŠKOLACA U SFRJ
U 1989. GODINI

Priredili:
Milan Šarić
Luka Čeliković

Izdavač:
DRUŠTVO MLADIH MATEMATIČARA »PITAGORA«
BELI MANASTIR
Školska 3, 54300 Beli Manastir

Urednici:
Luka Čeliković
Milan Šarić

Tehnički urednik:
Branko Vujaklija

Tisak:
GP »Slovo« Beli Manastir

Savezno 1989.

SFR JUGOSLAVIJA

VII razred:

1) Trećina robe prodana je po cijeni koja je za 10% viša od planirane, a polovina iste robe prodana je za 15% jeftinije od planirane cijene. Sa koliko postotaka iznad planirane cijene je prodan ostatak robe, kada je na kraju naplaćen iznos koji bi se dobio da je ukupna količina robe prodana po planiranoj cijeni ?

2) Odredi sve troznamenkaste brojeve čije su sve znamenke različite, sa svojstvom da je troznamenkasti broj djeljiv sa 7 i da je zbroj njegovih znamenaka takodjer djeljiv sa 7.

3) U trokutu ABC stranica $\overline{AB}$ je najdulja. Na stranici $\overline{AB}$ odabrane su točke D i E, tako da je $|AD|=|AC|$ i $|BE|=|BC|$. Odredi kut $\sphericalangle ACB$ ako je $\sphericalangle ECD = 20^\circ$.

4) Dana je kružnica k i točka P u istoj ravnini. Konstruirati pravac p koji siječe kružnicu u točkama A i B, tako da zbroj $|PA|+|PB|$ bude najveći. Obrazložiti konstrukciju za svaka od 3 slučaja: P je unutar kružnice, P je na kružnici, P je izvan kružnice.

5) U unutrašnjosti danog trokuta ABC izabrana je bilo koja točka M. Dokazati:
   a) $\sphericalangle AMB > \sphericalangle ACB$,
   b) $|AM|+|MB|<|AC|+|CB|$.

VIII razred:

1) Četiri učenika, Amir, Boris, Cvjetko i Darko sakupljali su stari papir. Zajedno su sakupili 288 kg papira. Koliko je kg papira sakupio svaki od njih, ako se zna da je Amir sakupio 36 kg više nego Boris, odnosno $\frac{3}{4}$ količine koju su sakupili Boris i Cvjetko zajedno, a Darko je sakupio dva puta više od Cvjetka ?

2) Da li je moguće da suma $1+2+3+\ldots+p$, za bilo koji prirodni broj p, završava znamenkama 1989 ? Obrazložiti zaključak.

3) Zbroj znamenki broja X je Y, a zbroj znamenaka broja Y je Z. Ako je $X+Y+Z=60$, odredi broj X.

4) Dan je kvadrat i devet različitih pravaca u njegovoj ravnini. Svaki od tih pravaca dijeli dani kvadrat na dva trapeza čije se površine odnose kao 2:3. Dokaži da medju danim pravcima postoje tri koji imaju jednu zajedničku točku.

5) U ravnini danog trokuta ABC dan je pravac p koji ne presijeca dani trokut. Ako su A_1, B_1, C_1, T_1 redom nožišta okomica iz A, B, C, T (T je težište trokuta) na dani pravac, dokazati da je $|AA_1|+|BB_1|+|CC_1|=3|TT_1|$.

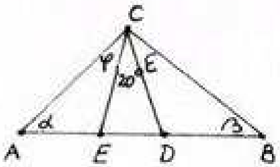
R j e š e n j a :

VII razred:

1) Neka je x postotak po kome se $\frac{1}{6}$ preostale robe prodavala iznad planirane cijene. Tada iz $\frac{1}{3}\cdot 1,1+\frac{1}{2}\cdot 0,85+\frac{1}{6}x=1$ slijedi $x=1,25$, pa je roba prodavana 25% iznad planirane cijene.

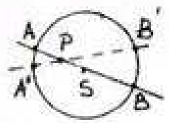
2) Neka je $\overline{abc}=100a+10b+c$ traženi broj. Tada prema uvjetima zadatka mora biti: $100a+10b+c=7n$ $(n\in N)$ i $a+b+c=7m$ $(m\in N)$. Oduzimanjem tih jednakosti dobivamo $9(11a+b)=7(n-m)$. Zbog $M(9,7)=1$ slijedi da $7/11a+b$. Analizom svih mogućnosti, dolazimo do rješenja zadatka $\overline{abc}\in\{329, 392, 518, 581\}$.

3)



Iz jednakokračnosti trokuta EBC i CAD slijedi da je $\sphericalangle BEC = \varepsilon+20^\circ$ i $\sphericalangle ADC=\varphi+20^\circ$, pa je (u ΔEDC) $20^\circ+(\varepsilon+20^\circ)+(\varphi+20^\circ)=180^\circ$, tj. $\varepsilon+\varphi+20^\circ=140^\circ$, odnosno (u ΔABC) $\gamma=140^\circ$.

4) a)



Traženi pravac prolazi točkom P i središtem S kružnice, jer je promjer najdulja tetiva kružnice.

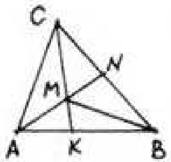
b)

Traženi pravac prolazi točkom P i središtem S kružnice (razlog isti kao u prethodnom slučaju)

c)

Traženi pravac ponovo prolazi točkom P i središtem S kružnice (obrazložite tvrdnju).

SFRJ savezno 1989.

5) 

a) Iz $\sphericalangle AMK > \sphericalangle ACK$ (vanjski kut trokuta ACM) i iz $\sphericalangle KMB > \sphericalangle KCB$ (vanjski kut trokuta MCB) slijedi (zbrajanjem) $\sphericalangle AMB > \sphericalangle ACB$.

b) $\left.\begin{array}{l} \Delta ANC: \ |AN| < |AC| + |CN| \\ \Delta BNM: \ |MB| < |MN| + |NB| \end{array}\right| + \Rightarrow$

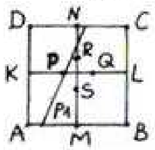
$\Rightarrow |AN| + |MB| < |AC| + |CN| + |MN| + |NB| \Rightarrow (AM + MN) + |MB| < |AC| + (|CN| + |NB|) + |MN| \Rightarrow |AM| + |MB| < |AC| + |CB|$.

VIII razred:

1) Neka su Amir, Boris i Cvjetko sakupili redom x,y,z kg papira. Tada je Darko sakupio 288-x-y-z kg papira. Iz uvjeta: $x = y+36 = \frac{3}{4}(y+z)$ i $288-x-y-z = 2z$ izlazi: $x = 72$, $y = 36$, $z = 60$, pa je Amir sakupio 72 kg, Boris 36 kg, Cvjetko 60 kg i Darko 120 kg papira.

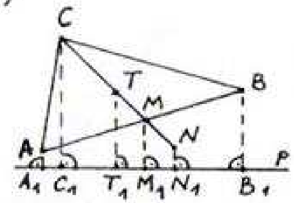
2) Neka se suma $1+2+\ldots+p = \frac{p(p+1)}{2}$ završava sa 1989, tj. neka je $\frac{p(p+1)}{2} = 10000m + 1989$ $(m \in N)$. Tada je (množenjem posljednje jednakosti sa 8) $(2p+1) = 80000m + 15913$. Kako desna strana ima znamenku jedinica 3, a kvadrat ni jednog prirodnog broja to nema, zadatak nema rješenja.

3) Očigledno X može biti najviše dvoznamenkasti broj, jer u suprotnom bi bilo $X+Y+Z > 60$. Dalje, X nije jednoznamenkasti broj, jer u suprotnom bi bilo $X+Y+Z = 3X < 60$. Dakle, neka je $X = 10a+b$, $a,b \in \{0,1,2,\ldots,9\}$. Tada je $Y = a+b$, a za Z vrijedi: $Z = Y = a+b$ ako je $a+b = 9$; $Z = a+b-9$ ako je $a+b > 9$. Neka je $Z = a+b$. Tada je $X+Y+Z = 10a+b+a+b+a+b = 60$, tj. $4a+b = 20$. Rješenja ove diofantske jednadžbe u skupu dopustivih vrijednosti za a i b su: $a_1 = b_1 = 4$, $a_2 = 5, b_2 = 0$, $a_3 = 3, b_3 = 8$. Zbog $3+8 > 9$, broj 38 nije rješenje, pa je traženi broj X 44 ili 50. Neka je $Z = a+b-9$. Tada je $X+Y+Z = 10a+b+a+b+a+b-9 = 60$, tj. $4a+b = 23$. Rješenje ove diofantske jednadžbe u skupu dopustivih vrijednosti za a i b su: $a_1 = 4, b_1 = 7$, $a_2 = 5, b_2 = 3$. Zbog $5+3 < 9$ broj 53 nije rješenje, pa je traženi broj $X = 47$. Dakle, traženi brojevi su 44, 50 i 47.

4) 

Neka je ABCD dani kvadrat i p_1 jedan od 9 danih pravaca. Kako je površina trapeza mh, gdje je m srednjica, to će površine P_1 i P_2 trapeza, odredjenih pravcem

p_1, dati jednakost $P_1 : P_2 = 2:3$, odnosno $m_1h = m_2h = 2:3$, odakle je $m_1 : m_2 = 2:3$ ili $|KP| : |PL| = 2:3$. Zaključujemo da traženi pravci moraju proći kroz točku P za koju je $|KP| : |PL| = 2:3$ (K i L su središta stranica kvadrata) ili pak kroz jednu od točaka Q,R ili S (za koje isto vrijedi $m_1 : m_2 = 2:3$). Medjutim, ako 9 pravaca prolazi kroz 4 točke, tada najmanje 3 moraju proći kroz jednu od tih točaka (Dirichletov princip).

5) 

Neka je N točka pravca CM, takva da je M središte dužine TN. Koristeći činjenice da težište dijeli težišnicu u omjeru 2:1, računajući od vrha trokuta, te da je zbroj osnovica trapeza jednak dvostrukoj srednjici trapeza, imamo:

$\left.\begin{array}{ll} \triangle CC_1N_1N: & |CC_1| + |NN_1| = 2 \cdot |TT_1| \\ \triangle TT_1N_1N: & 2 \cdot |MM_1| = |TT_1| + |NN_1| \\ \triangle AA_1B_1B: & -|AA_1| + |BB_1| = 2 \cdot |MM_1| \end{array}\right| + \Rightarrow$

$\Rightarrow |AA_1| + |BB_1| + |CC_1| = 3 \cdot |TT_1|$.

Milan Šarić, Luka Čeliković: Matematička natjecanja u Jugoslaviji 1989. godine - za učenike osnovnih škola
http://public.carnet.hr/mat-natj