

NÖEMENJA MATEMATIKE 2. RAZRED

ZADATAK: U skupu kompleksnih brojeva riješite nejednadžbu

$$\log_{0,5} \frac{|z|-3}{1-|z|} \geq -1, \quad \text{i rješenja prikažite grafički!}$$

Rješenje: Zadanu nejednadžbu možemo napisati ovako:

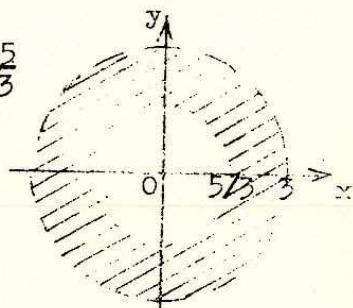
$$\log_{0,5} \frac{|z|-3}{1-|z|} \geq \log_{0,5} 2 \quad \text{Otuda slijedi sustav:}$$

$$\frac{|z|-3}{1-|z|} > 0 \implies 1 < |z| < 3$$

$$\frac{|z|-3}{1-|z|} \leq 2 \implies |z| < 1 \quad \text{ili} \quad |z| \geq \frac{5}{3}$$

Rješenje tog sustava je, dakle: $\frac{5}{3} \leq |z| < 3$

(Tražene točke obrazuju kružni vijenac određen kružnicama opisanim oko ishodišta; polumjeri tih kružnica su $\frac{5}{3}$ i 3, pri čemu manja kružnica pripada rješenju, veća ne.)



ZADATAK: Odredite najveći mogući omjer volumena uspravnog kružnog stočca i njegove upisane kugle!

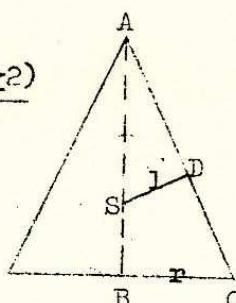
Rješenje: Uzmimo da je polumjer kugle l (jedan!); time se ne ububi općenitost.

$$\Delta(ASC) \sim \Delta(ABC) \implies (h-l):l = \sqrt{h^2+r^2}:r \\ \text{tj. } r^2 = \frac{h}{h-2} \quad (\text{Dakle, } h \geq 2)$$

Pri tome, h je visina stočca, r polumjer njegove baze. (Na crtežu je prikazan presjek stočca i kugle.)

Volumen stočca je:

$$V_s = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{h^2}{h-2}$$



Faktor $\frac{h}{h-2} \geq m$, za sve $h \geq 2$, pri čemu m treba odrediti tako da taj faktor bude što je moguće manji.

Nejednakost $\frac{h}{h-2} \geq m$ možemo napisati i ovako:

$$h^2 - mh + 2m \geq 0, \quad \text{uz uvjet manje istaknuto ograničenje } h \geq 2.$$

Diskriminanta $m^2 - 8m = 0$, iz čega slijedi da je

$$m_1 = 0, \quad m_2 = 8. \quad \text{Zato je:}$$

$$V_s = \frac{8}{3}\pi, \quad \text{a katio je volumen kugle } V_k = \frac{4}{3}\pi, \quad \text{dobiveno prema}$$

$$V_s : V_k = 2$$

Zadatak: Dokažite da ga više nije moguće da su svi cijeli brojevi a i b vrijedni:
 $a^3 - 3a^2b - 9ab^2 - b^3 + 6 \neq 0$

Rješenje: Transformirajte zadani algebarski izraz ovako:

$$a^3 - 3a^2b - 9ab^2 - b^3 + 6 = (a-b)^3 + (-12a^2b + 6)$$

Pri dijeljenju sa 4 daje ostatak 2.
 Načinimo sad da kada niti jednog cijelog broja ne daje pri dijeljenju sa 4 ostatak 2.

$n=4k$	$n^3 = (4k)^3$	Pri dijeljenju s 4 daje ost. 0		
$n=4k+1$	$n^3 = (4k)^3 + 3(4k)^2 + 3 \cdot 4k + 1$	"	"	1
$n=4k+2$	$n^3 = (4k)^3 + 6(4k)^2 + 12 \cdot 4k + 8$	"	"	0
$n=4k+3$	$n^3 = (4k)^3 + 9(4k)^2 + 27 \cdot 4k + 27$	"	"	3

Zaključak: Član $(-12a^2b + 6)$ zadanoog izraza pri dijeljenju sa 4 daje ostatak 2, a član $(a-b)^3$ ne daje ostatak 2, pa zato zadani izraz ne može biti djeljiv sa 4 ni za jedan par cijelih brojeva a i b , što znači da niti ne može imati vrijednost nula.

ZADATAK: Neka je $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ funkcija zadana sa
 $f(x,y) = (ax-by, bx+ay)$, gdje su $a, b \in \mathbb{R}$ konstante. Odredite te konstante tako da vrijedi $f \circ f \circ f = f$!

Rješenje: (I način) Uvedemo li označke $z=x+yi$, $w=a+bi$, možemo razmatrati funkciju $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, pri čemu $f(z)=w \cdot z$. Zato je $(f \circ f \circ f)(z) = w^3 z$. Iz zadane svojstva da za svaki broj z vrijedi $(f \circ f \circ f)(z) = f(z)$ procizlazi da mora biti $w^3 = w$, što znači da je $w=0$ (tj. $a=b=0$), ili $w=1$ (tj. $a=1, b=0$), ili $w=-1$ (tj. $a=-1, b=0$).

II način: Iz $f \circ f \circ f = f$ slijedi da za svaki par (x,y) mora biti $f(x,y) = 0$ (tj. $a=b=0$), ili da mora postojati f^{-1} , zbog čega je $f \circ f = \text{Id}$.

(Važno je primijetiti da f ima inverznu funkciju samo ako je $a^2+b^2 \neq 0$.)

Budući da je $(f \circ f)(x,y) = ((a^2-b^2)x-2aby, 2abx+(a^2-b^2)y)$, to iz $f \circ f = \text{Id}$ dobivamo:

$$(\forall x)(\forall y) \quad \begin{aligned} (a^2-b^2)x-2aby &= x \\ 2abx+(a^2-b^2)y &= y \end{aligned} \Rightarrow a^2-b^2=1, 2ab=0 \text{ tj. } \underline{a=\pm 1, b=0}$$