

V-1 Izvršimo koordinatizaciju tako da centar elipse postavimo za ishodište pravokutnog koordinatnog sustava.

Odredimo jednadžbu pravca p na kojem leži jedna stranica trokuta. Budući da je trokut jednakostaničan, njegov je koeficijent smjera $k = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$.

Odsječak l na osi y određuje τ iz uvjeta diranja elipse:

$$a^2 k^2 + b^2 = l^2 \\ 48 \cdot 3 + 25 = l^2, \text{ tj } l = 13$$

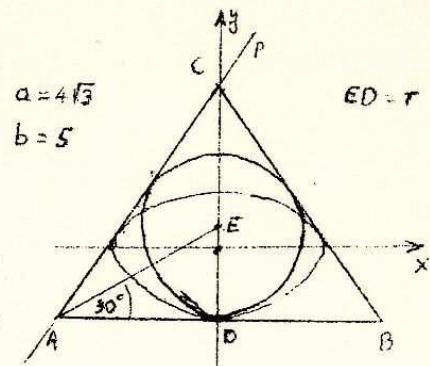
Dakle jednadžba pravca p je $y = \sqrt{3}x + 13$.

Znajući da je ordinata točke A jednaka -5, nalazimo $x_A = -6\sqrt{3}$ pa imamo $AB/2 = 6\sqrt{3}$. Budući da je polumjer trokuta upisane kružnice sjecište simetrala kutova, to je kut pri vrhu A trokuta ADE jednak 30° , pa imamo $\operatorname{ctg} 30^\circ = 6\sqrt{3}/r$, tj. $r=6$.

V-2 Iz $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)/(1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta)$, $\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} a$, $\beta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} b$ slijedi $\operatorname{arc} \operatorname{tg} a + \operatorname{arc} \operatorname{tg} b = \operatorname{arc} \operatorname{tg} (a+b)/(1-ab)$, odakle je $\operatorname{arc} \operatorname{tg} 1/2 + \operatorname{arc} \operatorname{tg} 1/8 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 2/3$. Označivši sumu u zadatku sa S_n , naslućujemo da bi moglo biti $S_n = \operatorname{arc} \operatorname{tg} n/(n+1)$. Dokažimo to indukcijom.:

$$S_{n+1} = S_n + \operatorname{arc} \operatorname{tg} 1/(2(n+1))^2 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} n/(n+1) + \\ + \operatorname{arc} \operatorname{tg} 1/(2(n+1))^2 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} (n+1)/(n+2), \text{ zbog gornjeg identiteta!}$$

Zbog neprekidnosti funkcije $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ je $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 1 = \pi/4$



Označimo lijevu stranu nejednakosti u zadatku sa S_n . Tada je

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{4^k} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{(k-1)+1}{4^{k-1}} = \frac{1}{4} \left[S_{n-1} + \frac{1-(1/4)^n}{1-1/4} \right]$$
$$= \frac{1}{4} S_{n-1} + \frac{1}{3} (1-(1/4)^n)$$

akle $S_{n-1} < S_n < \frac{1}{4} S_{n-1} + \frac{1}{3}$
dakle je $S_{n-1} < \frac{4}{9}$ za sve n .

Uočimo jednu točku i označimo je sa A. Neka je ona na primjer bijele boje. Opišimo oko A kružnicu polumjera 3.

Ako su sve točke te kružnice iste boje, zadatak je riješen, jer onda postoje 2 točke te kružnice (iste boje) na međusobnoj udaljenosti 1 (promjer kružnice je $2\sqrt{3} > 1$).

Neka točke te kružnice nisu sve iste boje. označimo sa B točku te kružnice koja nije bijela. Neka je na primjer točka B crvena.

Konstruirajmo sada romb ABCD kome je dulja dijagonala AB, a manji kut 60 (tj. konstruirajmo 2 jednakokračna trokuta ACD i DCB). Očito je da je $AC = AD = BC = BD = CD = 1$. Kada bi točka C bila bijele boje, tada bi A i C bile tražene točke, a ako bi točka C bila crvena, tada bi B i C bile tražene točke. Slično izlazi za točku D. Neka C i D nisu ni bijele ni crvene točke. Tada one moraju biti plave, pa su to tražene točke.

