POKRET "NAUKU MLADIMA" SRH

DRŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA SRH

REPUBLIČKI SUSRET MLADIH MATEMATIČARA
1. travnja 1989. g.

I. razred

1. Odredite realne brojeve a i b tako da polinom

$$x^4 - 2x^3 + ax^2 + 2x + b$$

bude djeljiv sa polinomom $x^2 - 2x - 3$.

2. Dokažite da su spojnica vrha pravokutnog trokuta nasuprot hipotenuze sa središtem kvadrata nad hipotenuzom i spojnica središta kvadrata nad katetama medjusobno okomite i jednake.

3. Dokažite da za pozitivne realne brojeve x, y, z vrijedi nejednakost

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geqslant x + y + z.$$

4. Funkcije f i g imaju slijedeća svojstva:

(1) $f(x) = f\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot g\left(\frac{x-y}{2}\right) + f\left(\frac{x-y}{2}\right) \cdot g\left(\frac{x+y}{2}\right)$,

(2) f je neparna, a g parna funkcija.

Dokažite da vrijedi:

$$[f(x)]^2 - [f(y)]^2 = f(x+y) \cdot f(x-y)$$

POKRET "NAUKU MLADIMA" SRH
DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA SRH

REPUBLIČKI SUSRET MLADIH MATEMATIČARA

1. travnja 1989. g.

II. razred

1. U skupu kompleksnih brojeva riješite nejednadžbu:

$\log_{0,5} \frac{|z| - 3}{1 - |z|} \geq -1$ i prikažite rješenja grafički.

2. Odredite najmanji mogući omjer volumena uspravnog kružnog stošca i njemu upisane kugle.

3. Dokažite da za bilo koje cijele brojeve a i b vrijedi:

$a^3 - 3a^2b - 9ab^2 - b^3 + 6 \neq 0$.

4. Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ funkcija zadana sa

$f(x,y) = (ax - by, bx + ay)$, gdje su $a, b \in \mathbb{R}$ konstante.

Odredite te konstante, tako da vrijedi:

$f \circ f \circ f = f$.

POKRET "NAUKU MLADIMA" SRH

DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA
SR HRVATSKE

REPUBLIČKI SUSRET MLADIH MATEMATIČARA

1. travnja 1989. g.

III. razred

1. Koji prirodni brojevi mogu biti najveća zajednička mjera brojeva $n^2 + 1$ i $(n+1)^2 + 1$, gdje je $n \in \mathbb{N}$?

2. Dokažite da za svako $\{x_1, \ldots\ldots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}$ vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \cos (x_i - x_j) \geqslant 0$$

3. Unutar trokuta ABC dana je točka T. Pravci AT, BT, CT dijele dani trokut na šest manjih trokuta. Dokažite da barem dva od njih imaju površinu koja nije veća od jedne šestine površine trokuta ABC.

4. Na pravcu $x=r$ nadjite točku T tako da trapez, kojeg omedjuju obje tangente iz te točke na kružnicu $x^2 + y^2 = r^2$ i koordinantne osi, ima najmanju površinu.

POKRET "NAUKU MLADIMA" SRH

DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA SRH

REPUBLIČKI SUSRET MLADIH MATEMATIČARA

1. travnja 1989. g.

IV. razred

1. U jednakostraničan trokut upisane su kružnica i elipsa tako da manja poluos elipse leži na jednoj visini trokuta. Koliki je polumjer kružnice ako elipsa ima poluosi $4\sqrt{3}$ i 5?

2. Nadjite najmanji realan broj koji nije manji ni od kojeg zbroja

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8} + \dots + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2n^2}$$

gdje je $n \in \mathbb{N}$

3. Dokažite nejednakost

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \dots + \frac{n}{4^n} < \frac{4}{9} \quad (n \in \mathbb{N})$$

4. Svaka točka ravnine obojena je jednom od tri boje: crvenom, bijelom ili plavom. Dokažite da u toj ravnini postoje dvije točke iste boje čija je udaljenost 1 cm.