Najtoplije zahvaljujem višem savjetniku **Luki Čelikoviću** i prof. **Milanu Šariću** na dopuštenju da se dijelovi zbirke zadataka "Matematička natjecanja u Jugoslaviji 1990. godine - za učenike osnovnih škola" skeniraju i objave na http://public.carnet.hr/mat-natj .

Antonija Horvatek
http://public.carnet.hr/~ahorvate

DMM »PITAGORA« BELI MANASTIR

PRIREDILI:
MILAN ŠARIĆ — LUKA ČELIKOVIĆ

MATEMATIČKA NATJECANJA U JUGOSLAVIJI 1990. GODINE

ZA UČENIKE OSNOVNIH ŠKOLA

Beli Manastir, 1990.

MATEMATIČKA NATJECANJA OSNOVNOŠKOLACA U SFRJ U 1990. GODINI

Izdavač:

DRUŠTVO MLADIH MATEMATIČARA »PITAGORA«
BELI MANASTIR
Školska 3, 54300 Beli Manastir

Priredili:

Milan Šarić
Luka Čeliković

Recenzent:

Prof. Ivan Stanić

Korektura:

Anđa Mijatović
Denis Vidović

Urednici:

Luka Čeliković
Milan Šarić

Tehnički urednik:

Branko Vujaklija

Tiraž:

700 primjeraka

Tisak:

GP »Slovo« Beli Manastir

Oslobođeno plaćanja Saveznog poreza na promet mišljenjem Republičkog komiteta za prosvjetu, kulturu, fizičku i tehničku kulturu ur. broj 532—03/1—90—1 od 30. 05. 1990.

REPUBLIČKO NATJECANJE

1990.

Z a d a c i :

VII razred:

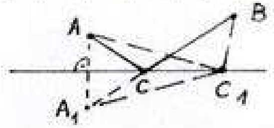
1. Siječanj mjesec jedne godine imao je 4 ponedeljka i 4 petka. Koji dan u tjednu je bio 1. siječanj ?
2. Zbrojimo li svaka dva od četiri broja a,b,c,d dobivamo ovih 6 suma: 1, 2, 5, 6, 9, 10. Odredi te brojeve.
3. Odredi sve troznamenkaste brojeve $\overline{abc}$ koji su pet puta veći od produkta svojih znamenaka.
4. Neka su α, β, γ, δ kutevi četverokuta ABCD i pri tome $\alpha=\beta$, $\delta>\gamma$. Dokaži da je $|BC|>|AD|$.
5. Zadan je pravac p i točke A i B s iste strane tog pravca. Konstruiraj na pravcu p onu točku C za koju je zbroj udaljenosti $|AC|+|BC|$ najmanji.

VIII razred:

1. Odredi sve cijele brojeve a za koje je izraz $(a^2+1)/(a-1)$ također cijeli broj.
2. Odredi opseg pravokutnog trokuta ABC kojemu je površina 54, a duljine stranica povezuje relacija $2b=c+a$.
3. Dokaži da je $2^{10}+5^{12}$ složen broj.
4. Na jednokružnom šahovskom turniru sudjelovalo je 8 igrača i svaki od njih osvojio je različit broj bodova. Šahist koji je osvojio drugo mjesto imao je isto toliko bodova koliko i četiri posljednja igrača zajedno. Kako je završila partija igrača koji su osvojili treće i sedmo mjesto ?
5. Unutar trokuta ABC nalazi se točka P, tako da trokuti ABP, BCP i ACP imaju jednaku površinu. Dokaži da je točka P sjecište težišnica, tj. težište trokuta.

R j e š e n j a :

VII razred:

1. Prvi ponedeljak je bio 7. siječnja, jer će samo tada mjesec imati 4 petka. Prema tome, 1. siječanj je bio u utorak.
2. Neka je $a<b<c<d$. U danim zbrojevima svaki se broj pojavljuje 3 puta kao pribrojnik. Kako je $1+2+5+6+9+10=33$, tada je $a+b+c+d=33:3=11$. Osim toga je $a+b=1$, $a+c=2$, $a+d=5$, pa je (zbrajanjem tih jednakosti) $2a+(a+b+c+d)=8$, tj. $a=(8-11)/2=-3/2$, a odavde $b=5/2$, $c=7/2$, $d=13/2$.
3. $\overline{abc}=5.abc \Rightarrow 100a+10b+c=5.abc \Rightarrow c=5$ (jer za $c=0$ desna strana bi bila nula, a lijeva ne) $\Rightarrow 5|2b+1 \Rightarrow b=7$ (jer za $b=2 \Rightarrow a=-1/2\notin N$) $\Rightarrow a=1$. Dakle, traženi broj je 175.
4. Neka je $AD\cap BC=E$. Iz $\alpha=\beta \Rightarrow |BE|=|AE|$. Iz $\delta>\gamma \Rightarrow \delta^s<\gamma^s \Rightarrow$ $\Rightarrow |CE|<|DE| \Rightarrow |BE|-|CE|>|AE|-|DE| \Rightarrow |BC|>|AD|$.
5. 

Neka je A_1 točka simetrična točki A s obzirom na pravac p i neka je $C=A_1B\cap p$. Tvrdimo da je C tražena točka. Neka je C_1 bilo koja druga točka pravca p. Tada je $|AC_1|+|BC_1|=|A_1C_1|+|C_1B|>|A_1B|=|A_1C|+|CB|=|AC|+|BC|$, tj. $|AC_1|+|BC_1|>|AC|+|BC|$, pa je zaista C tražena točka.

VIII razred:

1. $n=(a^2+1)/(a-1)=((a^2-1)+2)/(a-1)=((a-1)(a+1)+2)/(a-1)=$ $=a+1+2/(a-1)\in Z \Leftrightarrow 2/(a-1)\in Z \Leftrightarrow a-1\in\{-1,1,-2,2\}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a\in\{0,2,-1,3\}$. Dakle, $a\in\{-1,0,2,3\}$.
2. Iz $c^2=a^2+b^2$ (Pitagorin teorem) i uvjeta zadatka: $ab/2=54$ i i $2b=c+a$ slijedi da je $a=9$, $b=12$, $c=15$, pa je opseg trokuta 36.
3. $2^{10}+5^{12}=(2^5)^2+(5^6)^2=(2^5+5^6)^2-2.2^5.5^6=(2^5+5^6)^2-(10^3)^2=$ $=(2^5+5^6-10^3).(2^5+5^6+10^3)$, a to je složen broj jer je svaki faktor veći od 2 (pokažite to !).
4. Četiri posljednja igrača odigrali su međusobno 6 partija, pa su zajedno sakupili ne manje od 6 bodova. S druge strane, igrač na 2. mjestu nije sakupio više od 6 bodova. Ako je x broj postignutih bodova igrača na 2. mjestu, tada vrijedi $6\le x\le 6$, tj. $x=6$. Zaključujemo da su zadnja 4 igrača osvojili 6 bodova, pa je svaki od njih izgubio partiju sa svakim od prve četvorice. Dakle, igrač na trećem mjestu je pobijedio igrača na sedmom mjestu.
5. $P_{APB}=P_{APC} \Rightarrow |AP|.h_1/2=|AP|.h_2/2 \Rightarrow h_1=h_2$ (*),
$P_{APB}=P_{PBC} \Rightarrow P_{APB}=P_{PQB}+P_{PQC} \Rightarrow |AP|.h_1/2=|PQ|.h_1/2+|PQ|.h_2/2$
$\overset{(*)}{\Rightarrow} |AP|=2.|PQ|$ (**),
Iz sukladnosti trokuta QBM i QCN slijedi $|BQ|=|CQ|$ (***).
Iz (**) i (***) slijedi tvrdnja zadatka.