XXI. SAVEZNO NATJECANJE ZA UČENIKE OSNOVNIH ŠKOLA
SFRJ
1990. godina

VII RAZRED

1. Koji je najveći prirodni broj koji zadovoljava sljedeći uvjet: bilo koje dvije susjedne znamenke čine dvoznamenkasti broj djeljiv sa 23?

2. Ako su u troznamenkastom broju djeljivom sa 7 posljednje znamenke jednake, dokaži da je zbroj znamenaka djeljiv sa 7.

3. Za četiri broja a,b,c,d vrijedi;
   $d > c$, $a + b = c + d$, $a + d < b + c$.
   Poredaj ta četiri broja po veličini.

4. Na osnovici $\overline{BC}$ jednakokračnog trokuta ABC odredi točku M tako da razlika njenih udaljenosti od krakova tog trokuta bude jednaka polovini duljine kraka $\overline{AB}$.

5. U pravokutnom trokutu visina spuštena na hipotenuzu dijeli hipotenuzu na dva dijela čija je razlika jednaka duljini jedne katete. Odredi kutove trokuta.

XXI. SAVEZNO NATJECANJE ZA UČENIKE OSNOVNIH ŠKOLA
SFRJ
1990. godina

VIII RAZRED

1. Dokaži da je zbroj kubova tri uzastopna prirodna broja djeljiv sa 9.

2. Jednoznamenkasti broj x je uvećan za 10 i time je broj x uvećan za neki postotak. Uvećamo li dobiveni broj za jednak broj postotaka, kao prvi put, dobivamo 72. Odredi broj x.

3. Odredi šesteroznamenkasti broj čiji umnošci sa 2, sa 3, sa 4, sa 5, sa 6 predstavljaju također šesteroznamenkaste brojeve, koji se pišu istim znamenkama kao i traženi broj.

4. U trokutu ABC simetrala kuta CAB siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki N, a simetrala kuta CBA siječe stranicu $\overline{AC}$ u točki P, pri čemu je $|PN| = 1$. Presjek simetrala AN i BP je točka Q. Vrh C pripada kružnici koja prolazi točkama P, Q i N. Odredi površinu trokuta NPQ.

5. Dijagonale proizvoljnog trapeza dijele trapez na četiri trokuta. Površine trokuta koji sadrže osnovice trapeza su m (cm^2) i n (cm^2). Izračunaj površinu P trapeza.

Rješenja zadataka

XXI. SAVEZNO NATJECANJE ZA UČENIKE OSNOVNIH ŠKOLA
SFRJ
1990. godina

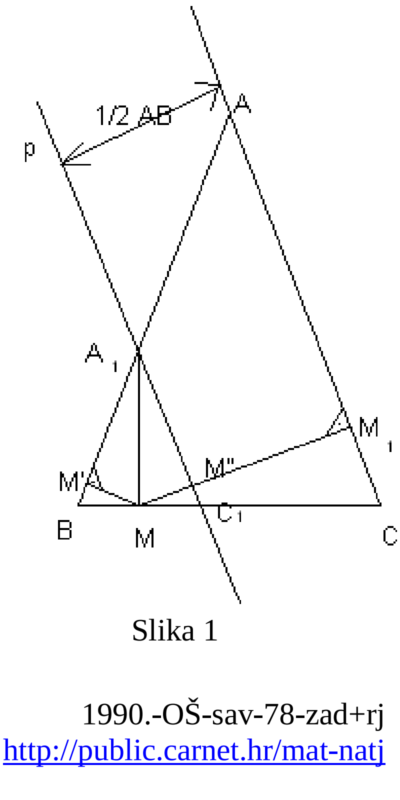
VII RAZRED

1. Dvoznamenkasti višekratnici broja 23 su: 23, 46, 69 i 92. Najveći prirodni brojevi koji počinju ovim višekratnicima i zadovoljavaju uvjet zadatka su redom 23, 46923, 6923 i 923. Prema tome traženi broj je 46923.

2. Neka je promatrani troznamenkasti broj x = $\overline{abb}$, gdje je a $\in \{1,2,....,9\}$, a $b \in \{0,1,2,...,9\}$. Taj broj možemo zapisati na sljedeći način
$x = 100a + 10b = 98a + 7b + 2a + 4b = 7(14a + b) + 2(a + b + b)$.
Lijeva strana je po pretpostavci djeljiva brojem 7; na desnoj strani prvi pribrojnik je očigledno djeljiv brojem 7, a to znači da i drugi pribrojnik, zbroj znamenaka $a + b + b$ mora biti djeljiv brojem 7.

3. Ako obim stranama nejednakosti $a + d < b + c$ dodamo broj b, dobit ćemo $a + d + b < b + c + b$ ili $(a + b) + d < 2b + c$; kako je $a + b < c + d$, to je $(c + d) + d < 2b + c$ ili 2d < 2b, dakle d < b.
Ako obim stranama nejednakosti $a + d < b + c$ dodamo broj c, dobit ćemo $a + d + c < d + c + c$ ili $a + (c + d) < b + 2c$; kako je a + b = c + d, to je $a + (a + b) < b + 2c$ ili 2a < 2c, dakle a < c. Na taj način zaključujemo da je: $a < c < d < b$.

4. Neka je ABC jednakokračni šiljastokutni trokut s osnovicom $\overline{BC}$ i krakovima AB = AC (sl.1). Neka je pravac $p \parallel$ AC, s one strane pravca AC s koje je vrh B, takav da je udaljenost između pravaca p i AC jednako $\frac{1}{2}|AB|$. Neka pravac p siječe krak $\overline{AB}$ u točki A_1, a osnovicu $\overline{BC}$ u točki C_1. Točke A_1, B i C_1 čine trokut A_1BC_1 (jer nisu kolinearne). Neka je točka M podnožje visine iz vrha A_1 trokuta A_1BC_1. Dokažimo da je M tražena točka.
Kako je trokut A_1BC_1 jednakokračan ($|A_1B| = |A_1C_1|$), to je A_1M simetrala kuta BA_1C_1; dakle točka M je jednako udaljena od krakova $\overline{A_1B}$ i $\overline{A_1C_1}$, tj.



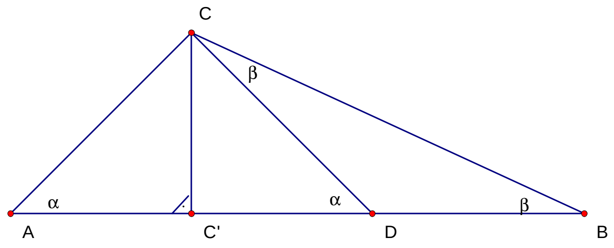
Slika 1

| MM' | = | MM'' |, gdje su M' i M'' nožišta okomica iz točke M na krakove A_1B i A_1C_1. Neka je točka M_1 nožište okomice iz točke M na krak $\overline{AC}$.

Očigledno je $|MM_1| = |MM''| + |M''M_1| = |MM'| + \frac{1}{2}|AB|$, pa je

$|MM_1| - |MM'| = \left(|MM'| + \frac{1}{2}|AB|\right) - |MM'| = \frac{1}{2}|AB|$, a to je i trebalo dokazati.

5. Neka je ABC pravokutni trokut (∠ACB = 90°) i neka je točka C' nožište visine iz vrha C na hipotenuzu $\overline{AB}$ (slika 2.). Neka je D točka na dužini $\overline{C'B}$, takva da je $|C'D| = |C'A|$. Iz sukladnosti pravokutnih trokuta ACC' i DCC' zaključujemo da je $|AC| = |DC|$, tj. trokut ADC je jednakokračan. Iz uvjeta zadatka imamo da je $|AC| = |C'B| - |C'A|$, a zbog jednakosti $|C'D| = |C'A|$,



slika 2.

imamo da je $|AC| = |C'B| - |C'D| = |DB|$. Dakle, $|AC| = |DC| = |DB|$, pa je i trokut BCD jednakokračan. Sada iz $\alpha = 2\beta$ i $\alpha + \beta = 90°$ nalazimo $2\beta + \beta = 90°$, odnosno, $\beta = \frac{1}{3}90° = 30°$, pa je α =60°.

Rješenja zadataka

XXI. SAVEZNO NATJECANJE ZA UČENIKE OSNOVNIH ŠKOLA
SFRJ
1990. godina

VIII RAZRED

1. Neka su n –1, n, n +1 tri uzastopna prirodna broja. Tada je zbroj njihovih kubova jednak
$x = (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = 3n^3 + 6n = 3n(n^2 + 2)$
Treba pokazati da je još broj $n(n^2 + 2)$ uvijek djeljiv brojem 3. Svaki prirodni broj može biti prikazan na jedan od sljedećih tri načina:
n = 3k ili n = 3k –1 ili n = 3k +1. Ako je n = 3k, onda je $n(n^2 +2) = 3k(9k^2 +2)$; dakle, broj $n(n^2 +2)$ je djeljiv brojem 3, pa je x djeljiv brojem 9. Ako je $n = 3k \pm 1$, onda je $n(n^2 +2) = (3k \pm 1)(9k^2 \pm 6k +3) = (3k \pm 1)\cdot 3 \cdot (3k^2 \pm 2k +1)$; dakle, broj $n(n^2+2)$ je djeljiv brojem 3, pa je x djeljiv brojem 9.

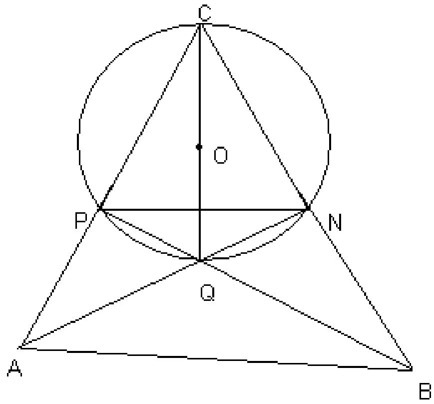
2. Neka je x traženi jednoznamenkasti broj. Dodavanjem 10 broj x uvećan je za $\frac{10}{x}\%$.
Uvećamo li broj x +10 za $\frac{10}{x}\%$, dobit ćemo 72, dakle $x + 10 + \frac{10}{x}(x+10) = 72$,
odnosno, $x^2 - 52x + 100 = 0$ ili (x –2)(x –50) = 0.
Od dva rješenja dobivene jednadžbe : $x_1 = 2$, $x_2 = 50$, uvjet zadatka zadovoljava samo rješenje $x_1 = 2$.

3. Označimo traženi broj sa n. Broj n počinje znamenkom 1, jer u suprotnom broj 6n ne bi bio šesteroznamenkasti. Prve znamenke brojeva n, 2n, 3n, 4n, 5n i 6n su sve različite od nule, pa su zbog toga različite i među sobom. Zaista, ako bi dva od ovih brojeva počinjala istom znamenkom, na primjer 5n i 4n, tada bi njihova razlika, a to je n, počinjala nulom, i broj n bi bio peteroznamenkasti. Dakle, početne znamenke brojeva n, 2n, 3n, 4n, 5n i 6n su upravo znamenke traženog broja (ima ih šest, a različite su među sobom). Iz prethodnog zaključujemo da su krajnje znamenke iste one koje se pojavljuju na početnim mjestima i da među njima nema nula. Krajnja znamenka broja n nije parna, jer bi u suprotnom broj 5n završavao nulom. Iz istih razloga krajnja znamenka broja n nije ni 1 (jer je to prva znamenka). Krajnja znamenka broja n nije ni 3, jer se tada ni jedan od brojeva n, 2n, 3n, 4n, 5n, 6n ne bi završavao znamenkom 1. Iz istog razloga krajnja znamenka broja n nije 9. Dakle, krajnja znamenka broja n je 7, pa je broj n oblika n = 1….7. Onda je 2n = 2….4, 3n = 4….1, 4n = 5….8, 5n = 7….5, 6n=8….2 (množenjem znamenke 7 sa 1, 2, 3, 4, 5, 6 dobivamo krajnje znamenke : 7, 4, 1, 8, 5, 2). Na bilo kojem težinskom mjestu brojevi n, 2n, 3n, 4n, 5n, 6n imaju različite znamenke, jer bi u suprotnom razlika dva broja na tom mjestu imala 0 ili 9, što je nemoguće. Zahvaljujući ovome možemo ovih šest brojeva potpisati i zbrojiti – na

svakom težinskom mjestu zbroj je 2 + 5 + 8 + 1 + 4 + 7 = 27. Na taj način dobivamo zbroj n + 2n + 3n + 4n + 5n + 6n = 21n = 2999997,
pa je traženi broj n = 2999997 : 21 = 142857.

4. Neka je ABC dani trokut (sl. 3.), N točka presjeka simetrale kuta CAB i stranice $\overline{BC}$, P točka presjeka simetrale kuta CBA i stranice $\overline{AC}$, Q točka presjeka Simetrala AN i BP, a duljina dužine $\overline{PN}$ je jednaka 1. Točke P, Q, N i C pripadaju kružnici sa centrom u točki O. Lako se dokazuje da je ∠AQB = ∠PQN = 90° + $\frac{1}{2}\gamma$ (na primjer, iz $\alpha+\beta+\gamma=180°$ i $\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta+\angle AQB=180°$, …., a kutovi AQB i PQN su jednaki kao vršni kutovi). Kako je PQNC tetivni četverokut, to je

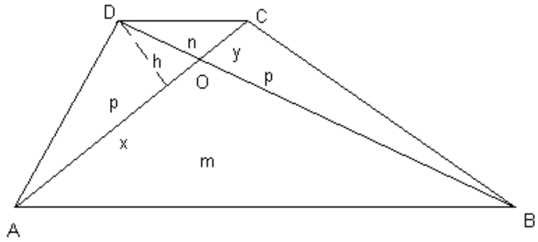
$\gamma=180°-\angle PQN=90°-\frac{1}{2}\gamma$, a odavde je $\gamma = 60°$.



sl. 3.

Kako je CQ simetrala kuta γ, to je ∠PCQ = ∠NCQ = 30°. Dalje, kako su ∠PNQ i ∠PCQ kutovi nad tetivom $\overline{PQ}$, a s iste strane te tetive, oni su jednaki, tj. ∠PNQ = ∠PCQ = 30°. Analogno se dokazuje da je ∠NCQ = ∠NPQ = 30°. Prema tome, trokut NPQ je jednakokračan; visinom iz vrha Q podijeljen je na dva sukladna trokuta od kojih se može sastaviti jednakostranični trokut čija je visina jednaka $\frac{1}{2}|PN|=\frac{1}{2}$. Sada nalazimo $|PQ|=|QN|=\frac{\sqrt{3}}{3}$, pa je konačno, površina trokuta NPQ jednaka $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

6. Neka je trapez ABCD dijagonalama $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ podijeljen na četiri trokuta tako da su površine trokuta koji sadrže osnovice $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ redom jednake m cm^2 i n cm^2 (sl.4.). Dakle, $P_{\Delta\, ABO}=m$ cm^2 i $P_{\Delta\, CDO}=n$ cm^2, gdje je O točka presjeka dijagonala $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$. Iz jednakosti površina trokuta ABC i ABD (imaju istu osnovicu i istu visinu) proizlazi da su i površine trokuta ADO i BCO jednake, recimo p. Iz $P=\frac{1}{2}xh$ i $n=\frac{1}{2}yh$ slijedi $\frac{p}{n}=\frac{x}{y}$. Na sličan način dobijemo $\frac{m}{p}=\frac{x}{y}$.



Sl. 4.

Izjednačavanjem dobivamo $p^2=mn$ ili $p=\sqrt{mn}$. Konačno za površinu trapeza dobivamo $P=m+n+2p=m+n+2\sqrt{mn}=\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}\right)^2$.