Najtoplije zahvaljujem višem savjetniku **Luki Čelikoviću** i prof. **Milanu Šariću** na dopuštenju da se dijelovi zbirke zadataka "Matematička natjecanja u Jugoslaviji 1990. godine - za učenike osnovnih škola" skeniraju i objave na http://public.carnet.hr/mat-natj .

Antonija Horvatek
http://public.carnet.hr/~ahorvate

DMM »PITAGORA« BELI MANASTIR

PRIREDILI:
MILAN ŠARIĆ — LUKA ČELIKOVIĆ

MATEMATIČKA NATJECANJA U JUGOSLAVIJI 1990. GODINE

ZA UČENIKE OSNOVNIH ŠKOLA

Beli Manastir, 1990.

MATEMATIČKA NATJECANJA OSNOVNOŠKOLACA U SFRJ U 1990. GODINI

Izdavač:

DRUŠTVO MLADIH MATEMATIČARA »PITAGORA«
BELI MANASTIR
Školska 3, 54300 Beli Manastir

Priredili:

Milan Šarić
Luka Čeliković

Recenzent:

Prof. Ivan Stanić

Korektura:

Anđa Mijatović
Denis Vidović

Urednici:

Luka Čeliković
Milan Šarić

Tehnički urednik:

Branko Vujaklija

Tiraž:

700 primjeraka

Tisak:

GP »Slovo« Beli Manastir

Oslobođeno plaćanja Saveznog poreza na promet mišljenjem Republičkog komiteta za prosvjetu, kulturu, fizičku i tehničku kulturu ur. broj 532—03/1—90—1 od 30. 05. 1990.

SFR JUGOSLAVIJA 1990. savezno

Z a d a c i :

VII razred:

1. Koji je najveći prirodni broj koji zadovoljava slijedeći uvjet: bilo koje dvije susjedne znamenke čine dvoznamenkasti broj djeljiv sa 23 ?
2. Ako su u troznamenkastom broju, djeljivim sa 7, dvije posljednje znamenke jednake, dokaži da je suma znamenaka djeljiva sa 7.
3. Za 4 broja a,b,c,d vrijedi: $d > c$, $a+b=c+d$, $a+d < b+c$. Poredaj ta 4 broja po veličini.
4. Na osnovici $\overline{BC}$ jednakokračnog šiljastokutnog trokuta ABC odredi točku M, tako da razlika njenih udaljenosti od krakova toga trokuta bude jednaka polovini duljine kraka $\overline{AB}$.
5. U pravokutnom trokutu visina spuštena na hipotenuzu dijeli hipotenuzu na 2 dijela, čija je razlika jednaka duljini jedne katete. Odredi kuteve trokuta.

VIII razred:

1. Dokaži da je suma kubova 3 uzastopna prirodna broja djeljiva sa 9.
2. Jednoznamenkasti broj x je uvećan za 10 i time je broj x uvećan za neki postotak. Uvećamo li dobiveni broj za jednak broj postotaka, kao prvi puta, dobivamo 72. Odredi broj x.
3. Odredi šesteroznamenkasti broj čiji produkti sa 2, 3, 4, 5 i 6 predstavljaju također šesteroznamenkaste brojeve, koji se pišu istim znamenkama kao i traženi broj.
4. U trokutu ABC simetrala kuta $\sphericalangle CAB$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki N, a simetrala kuta $\sphericalangle CBA$ siječe stranicu $\overline{AC}$ u točki P, pri čemu je $|PN|=1$. Presjek simetrala AN i BP je točka Q. Vrh C pripada kružnici koja prolazi točkama P,Q i N. Odredi površinu trokuta NPQ.
5. Dijagonale proizvoljnog trapeza dijele trapez na 4 trokuta. Površine trokuta koji sadrže osnovice trapeza su m (cm^2) i n (cm^2). Izračunaj površinu P trapeza.

R j e š e n j a :

VII razred:

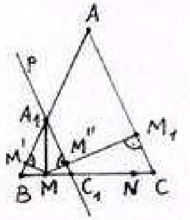
1. Dvoznamenkasti višekratnici broja 23 su:23, 46, 69 i 92. Prirodni brojevi,koji počinju ovim višekratnicima i zadovoljavaju uvjet zadatka,su: 23, 46923, 6923 i 923, pa je traženi broj 46923.

2. Neka je $x=\overline{abb}$ ($a \in \{1,2,\ldots,9\}$, $b \in \{0,1,\ldots,9\}$) traženi broj. Tada je $x=100a+10b+b=7(14a+b)+2(a+b+b)$. Kako $7|7(14a+b)$, a po pretpostavci i $7|x$, tada i $7|2(a+b+b)$, tj. $7|(a+b+b)$, što se i tvrdilo.

3. $a+d < b+c \Rightarrow (a+d)+b < (b+c)+b \Rightarrow (a+b)+d < 2b+c \Rightarrow (c+d)+d < 2b+c$ (jer je $a+b=c+d$) $\Rightarrow 2d < 2b = d < b$,
$a+d < b+c \Rightarrow (a+d)+c < (b+c)+c \Rightarrow a+(c+d) < b+2c \Rightarrow a+(a+b) < b+2c$ (jer je $a+b=c+d$) $\Rightarrow 2a < 2c \Rightarrow a < c$.
Kako je po pretpostavci $d > c$, tada imamo: $a < c < d < b$.

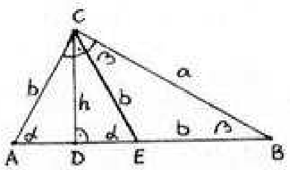
1990, SFRJ savezno

4.



Neka je ABC šiljastokutan jednakokračan trokut sa osnovicom $\overline{BC}$ i neka pravac, paralelan sa $\overline{AC}$ i na udaljenosti $|AB|/2$ od AC, siječe $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ u točkama A_1 i C_1. Tada je trokut A_1BC_1 također jednakokračan (sličan trokutu ABC). Neka je M podnožje visine spuštene iz A_1 na $\overline{BC_1}$, a M', M'' i M_1 redom podnožja normala spuštenih iz M na $\overline{A_1B}$, $\overline{A_1C_1}$ i $\overline{AC}$. Tada je $|MM_1|-|MM'|=|MM_1|-|MM''|$ (zašto ?) $=|M_1M''|=|AB|/2$, pa je M tražena točka. Analogno se pokazuje da je to i točka N, $N\in\overline{BC}$, $|CN|=|BM|$, do koje dolazimo zamjenjujući uloge krakova $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$.

5.



Neka je ABC pravokutan trokut, D nožište visine iz C na hipotenuzu $\overline{AB}$ i E točka te hipotenuze simetrična točki A u odnosu na točku D. Tada je $|BE|=|BD|-|ED|=|BD|-|AD|=|AC|$ (prema uvjetu zadatka), pa je trokut BCE jednakokračan, tj. $\measuredangle EBC=\measuredangle BCE=\beta$. Kako je $\measuredangle AEC=\alpha$ (zašto ?), tada je $\alpha=2\beta$ (odnos vanjskog i unutarnjih kuteva trokuta EBC). Pošto je i $\alpha+\beta=90^\circ$, tada je $\alpha=60^\circ$, $\beta=30^\circ$.

VIII razred:

1. Neka su $n-1, n, n+1$ tri uzastopna prirodna broja. Tada je $S=(n-1)^3+n^3+(n+1)^3=3n^3+6n=3n(n^2+2)$. Uzimajući redom $n=3k, 3k-1, 3k+1$, dobivamo za n^2+2 redom izraze $3k((9k^2+2)$, $3(3k^2-2k+1)$, $3(3k^2+2k+1)$, koji su djeljivi sa 3, pa, kako je i $3n$ djeljivo sa 3, tada je $3n(n^2+2)=S$ djeljivo sa 9.

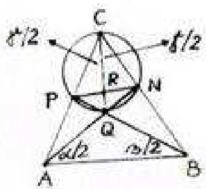
2. Neka je x traženi jednoznamenkasti broj. Uvećamo li broj x za 10, tada je njegovo povećanje za $100.10/x=(1000/x)\%$. Uvećanjem broja $x+10$ za isti postotak $(1000/x)\%$, dobivamo 72, tj. imamo: $(x+10)+(x+10).(1000/x)/100=72$

$$x^2-52x+100=0,\quad (x-2)(x-50)=0,\quad x_1=2, x_2=50,$$

ali samo $x=2$ zadovoljava uvjete zadatka. Izvršite pokus.

3. $n=142857$. Obrazložite rješenje.

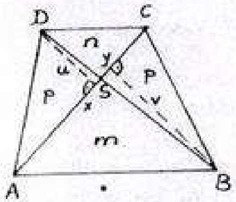
4.



Uz oznake kao na slici imamo: $\measuredangle PQN=\measuredangle AQB=180^\circ-(\alpha+\beta)/2=90^\circ+\gamma/2$, a s druge strane je $\measuredangle PQN=180^\circ-\gamma$ (jer je PQNC tetivni četverokut), pa je $\gamma=60^\circ$.
Kako je Q sjecište simetrala kuteva trokuta ABC, to je CQ simetrala kuta γ, pa je $\measuredangle PCQ=\measuredangle NCQ=30^\circ$. Dalje je $\measuredangle QPN=\measuredangle QCN=30^\circ$ i $\measuredangle QNP=$

$=\measuredangle QCN=30^\circ$ (kutevi nad kružnim lukovima $\widehat{QP}$ i $\widehat{QN}$). Kako je $|PN|=1$, lako se zaključuje da je $|QR|=\sqrt{3}/6$, pa je površina trokuta NPQ jednaka $\sqrt{3}/12$.

5.



Iz $P_{\Delta CDA}=P_{\Delta CDB}$ (imaju zajedničku osnovicu $\overline{CD}$ i jednake visine) slijedi da je $P_{\Delta ASD}=P_{\Delta BSC}=p$.
Iz $p:n=(xu/2):(yu/2)=x:y$ i iz $m:p=(xv/2):(yv/2)=x:y$ slijedi $p:n=m:p$, $p^2=mn$, $p=\sqrt{mn}$, pa je površina trapeza $P=m+n+2\sqrt{mn}=(\sqrt{m}+\sqrt{n})^2$.