POKRET "NAUKA MLADIMA" SRH
DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIĆARA SRH

M A T E M A T I K A

ZADACI ZA OPĆINSKI SUSRET UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA SRH 1990.

IV. RAZRED

1. Ako za kuteve α i β trokuta vrijedi

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta} = \frac{tg\alpha}{tg\beta},$$

tada je trokut jednakokračan ili pravokutan. Dokaži!

2. Koliki je najveći mogući broj sjecišta dijagonala konveksnog 50-terokuta?

3. Nadji jednadžbu zajedničke tangente parabola $y=x^2$ i $x=y$

4. Za zadani prirodan broj m, $m\geq 2$, nadji sve parove $(x_1,y_1)\in R^2$ takve da u nizovima

$$x_{k+1} = x_1x_k - y_1y_k$$
$$(k\in N)$$
$$y_{k+1} = x_1y_k + y_1x_k$$

bude $x_m=1$, $y_m=0$.

(Svaki zadatak nosi 25 bodova)

RJEŠENJA (IV RAZRED):

1. Zbog $(tg\alpha)/(tg\beta)>0$ su kutevi α i β šiljasti, tj.

(1) $\alpha, \beta \in (0, \pi/2)$ ... 5b

Vrijedi

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta} = \frac{tg\alpha}{tg\beta} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$$

tj.

(2)

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} - \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\right) = 0$$ ... 5b

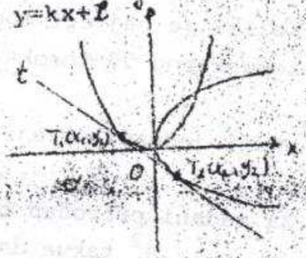
Zbog (1) je $(\sin\alpha)/(\sin\beta) \neq 0$, pa iz (2) slijedi

$\sin\alpha \cos\alpha = \sin\beta \cos\beta$, tj. $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$. ... 5b

Ova jednakost je moguća ili kad je $2\alpha = 2\beta$, tj. trokut ... 5b
jednakokračan, ili kad je $\pi - 2\alpha = 2\beta$ ... 5b
tj. $\gamma = \pi/2$, (pravokutan trokut)

2. Broj sjecišta dijagonala konveksnog 50-terokuta bit će najveći ako se niti koje tri dijagonale ne sijeku u istoj (unutrašnjoj) točki. Za svaki presjek dviju dijagonala trebaju četiri vrha. Dakle ukupno ima najviše
$\binom{50}{4} = 230300$ presjeka.

3. Neka su $T_1(x_1, y_1)$, $T_2(x_2, y_2)$ dirališta i $y=kx+l$ tražena tangenta (slika).



Vrijedi

(1) $k=2x_1=-1/(2\sqrt{x_2})$ tj.

(2) $16x_1^2 = 1/x_2$

Takodjer je

$k=(y_2-y_1)/(x_2-x_1)$

Zbog $y_1=x_1^2$, $y_2=-x_2^{1/2}$ i (2) je $k=4x_1(1-4x_1^3)/(1-16x_1^3)$

Iz $k=2x_1$ dobivamo $x_1=-1/2$ i odavde $T_1(-1/2, 1/4)$, $T_2(1/4, -1/2)$.

Jednadžba tagente je $y=-x-1/4$.

NAPOMENA: Sa slike se zbog simetričnosti odmah vidi da je $k=-1$. Ako učenik to primijeti, nagraditi sa 10 bodova.

$z_{k+1} = z_k \cdot z_1$

4. Definiramo niz kompleksnih brojeva $z_n=x_n+iy_n$, $n\geq 1$, $z_n=z_{n-1} \cdot z_1$.
Treba naći x_1 i y_1 tako da bude $z_m=1$, tj. $z_1^m=1$, tj. $z_1=\sqrt[m]{1}$.
Dakle postoji m rješenja:

$$x_1=\cos(2k\pi/m),\ y_1=\sin(2k\pi/m),\ k=0,1,\ldots,m-1$$