TAKMIČENJE
3. ožujak 1990

POKRET "NAUKU MLADIMA" SRH
DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA SRH

M A T E M A T I K A
ZADACI ZA OPĆINSKI SUSRET UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA SRH 1990.
1. razred

1. Nađi sva rješenja sustava :

$$\frac{x(z+y)}{5} = \frac{y(z+x)}{8} = \frac{z(y+x)}{9}$$

$$yz + zx + xy = \frac{11}{6} \cdot xyz$$

2. Neka je $a,b,x,y > 0$; $a \leqslant b$. Dokaži da vrijedi

$$\frac{x}{ax+by} + \frac{y}{ay+bx} \geqslant \frac{2}{a+b}$$

3. Neka je S skup svih točaka u ravnini, koje u danom pravokutnom koordinatnom sustavu imaju obje koordinate cjelobrojne. Dokaži da nikoje tri točke skupa S ne mogu tvoriti jednakostraničan trokut.

4. Zajednički promjer dviju kružnica, od kojih svaka leži izvan druge, siječe te kružnice redom u točkama A, A', B', B . Ako je t duljina odreska unutrašnje zajedničke tangente tih kružnica, nađi jednakost koja povezuje duljine t, $d(A,B)$, $d(A',B')$. Kako glasi analogan rezultat za vanjsku zajedničku tangentu ?

1. razred (rješenja)

1. $8x(y+z) = 5y(z+x) \qquad /: xyz$

$9y(z+x) = 8z(x+y) \qquad /: xyz$

$yz + zx + xy = \frac{11}{6} xyz \qquad /: xyz$

Za $xyz \neq 0$ dobivamo sustav :

$\frac{5}{x} - \frac{8}{y} - \frac{3}{z} = 0$

$\frac{1}{x} - \frac{8}{y} + \frac{9}{z} = 0$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ čija su rješenja $\frac{1}{x} = 1$, $\frac{1}{y} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{z} = \frac{1}{3}$;
tj. $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

Preostala rješenja su :
$(x,y,z) = (a,o,o)$, $(x,y,z) = (o,a,o)$, $(x,y,z) = (o,o,a)$

gdje je a bilo koji realan broj .

2. $x(ay + bx)(a + b) + y(ax + by)(a + b) \geq 2(ax + by)(ay + bx)$

$a^2xy + abx^2 + abxy + b^2x^2 + a^2xy + aby^2 + abxy + b^2y^2 \geq$
$\geq 2a^2xy + 2aby^2 + 2abx^2 + 2b^2xy$

$2abxy + b^2x^2 + b^2y^2 - aby^2 - abx^2 - 2b^2xy \geq 0 \qquad /: b$

$2xy(a - b) - x^2(a - b) - y^2(a - b) \geq 0$

$-(a - b)(x - y)^2 \geq 0$

$(b - a)(x - y)^2 \geq 0$

3. Pretpostavimo da postoji trokut ABC ,takav da su točke A,B,C elementi skupa S .Neka je on pozitivno orijentiran.Translacijom koordinatnog sustava možemo dovesti ishodište u točku A.Neka je $B = (p,q)$, $p,q \in Z$ .Rotacijom oko ishodišta za kut 60° točka B prelazi u točku C ,pa je zato $C = \left(\frac{p - \sqrt{3}\,q}{2} , \frac{\sqrt{3}\,p + q}{2} \right)$ .Ovi brojevi su iracionalni pa točka C nije element skupa S. Dakle dobili smo kontradikciju.

1. razred (rješenja)

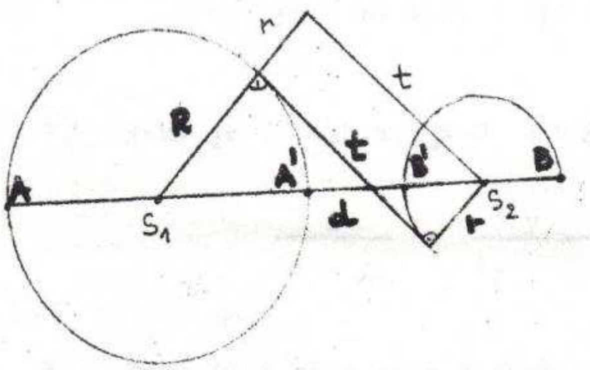
4. Imamo :

$$t^2 = d^2 - (R + r)^2 =$$
$$= (d + R + r)(d - R - r) =$$
$$= d(A,B) \cdot d(A',B')$$

gdje je d udaljenost središta kružnica.

Za vanjske tangente vrijedi :

$$t^2 = d^2 - (R - r)^2 =$$
$$= (d + R - r)(d - R + r) =$$
$$= d(A,B') \cdot d(A',B'')$$



$8xy + 8xz = 5yz + 5yx \quad |: xyz$

$9yz + 9yx = 8zx + 8zy \quad |: xyz$

$\frac{8}{z} + \frac{8}{y} = \frac{5}{x} + \frac{5}{z}$

$\frac{9}{x} + \frac{9}{z} = \frac{8}{y} + \frac{8}{x}$

$\frac{1}{x} - \frac{8}{y} + \frac{9}{z}$