POKRET "NAUKU MLADIMA" SR HRVATSKE

DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA SRH

M A T E M A T I K A

ZADACI ZA OPĆINSKI SUSRET UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA - '90.

II R A Z R E D

1. Sistem nejednadžbi

$$a_1x + b_1 \geqslant 0\,, \quad a_1 > 0$$
$$a_2x + b_2 \geqslant 0\,, \quad a_2 < 0$$

nema nijedno rješenje. Dokaži da tada postoje brojevi μ_1, μ_2 takvi da vrijedi

$$b_1\mu_1 + b_2\mu_2 < 0$$
$$a_1\mu_1 + a_2\mu_2 = 0.$$

2. Dokaži da dva pravokutna trokuta iste površine i istog opsega imaju jednake odgovarajuće katete.

3. Neka je T bilo koja točka unutar trokuta ABC i neka su A_1, B_1, C_1 sjecišta pravaca AT, BT, CT sa stranicama BC, CA, AB. Dokaži da vrijedi:

$$\frac{|AT|}{|A_1T|}\cdot\frac{|BT|}{|B_1T|}\cdot\frac{|CT|}{|C_1T|} \geqslant 8.$$

4. Kvadratni trinom $f(x)=ax^2 + bx + c$ ima svojstvo da jednadžba $f(x)=x$ nema realnih rješenja. Dokaži da jednadžba $f(f(x))=x$ također nema realnih rješenja.

R J E Š E N J A - II RAZRED

1. Prva nejednadžba je zadovoljena za $x \geqslant -\frac{b_1}{a_1}$, a druga za $x \leqslant -\frac{b_2}{a_2}$.

10 bodova

Ako bi bilo $-\frac{b_1}{a_1} \leqslant -\frac{b_2}{a_2}$, svako $x \in \left[-\frac{b_1}{a_1}, -\frac{b_2}{a_2}\right]$ bi bilo rješenje polaznog sistema. Kako sistem nema nijedno rješenje vrijedi $-\frac{b_1}{a_1} > -\frac{b_2}{a_2}$ tj. $-b_1a_2 + b_2a_1 < 0$.

10 bodova

Dovoljno je uzeti $\mu_1 = -a_2$, $\mu_2 = a_1$. Tada je $a_1\mu_1 + a_2\mu_2 = 0$

5 bodova

2. Izračunajmo katete pravokutnog trokuta čija površina je C, a opseg D:

$$\text{(1)} \quad ab = C$$

$$a + b + \sqrt{a^2 + b^2} = D \quad \Leftrightarrow$$

$$a + b + \sqrt{(a+b)^2 - 2C} = D \quad \Rightarrow$$

$$(a+b)^2 - 2C = D^2 - 2D(a+b) + (a+b)^2 \quad \Rightarrow$$

$$\text{(2)} \quad a + b = \frac{D^2 + 2C}{2D}.$$

10 bodova

Duljine kateta a, b su rješenja kvadratne jednadžbe

$$x^2 - \frac{D^2 + 2C}{2D}x + C = 0 \quad \text{tj.}$$

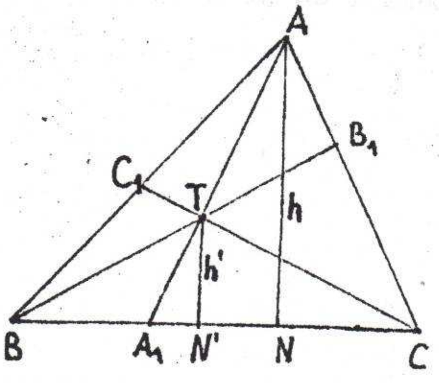
$$x_{1,2} = \frac{D^2 + 2C \pm \sqrt{D^4 + 4C^2}}{4D}.$$

10 bodova

Budući da je $D^2 + 2C > \sqrt{D^4 + 4C^2}$ vrijedi $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ tj. stranice pravokutnog trokuta su jednoznačno određene ako su poznati njegova površina i opseg.

5 bodova

3.



Neka je P površina trokuta ABC, a P_1, P_2, P_3 površine trokuta BCT, CAT, ABT. Trokuti ABC i BCT imaju zajedničku osnovicu pa im se površine odnose kao visine h i h', a zbog sličnosti trokuta AA_1N i TA_1N' ove se odnose kao AA_1 i TA_1.

10 bodova

$$\frac{h}{h'} = \frac{|AA_1|}{|TA_1|} = \frac{P}{P_1} = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{P_1} \Rightarrow$$

$$\frac{|AA_1| - |TA_1|}{|TA_1|} = \frac{P_2 + P_3}{P_1} \quad \text{tj.} \quad \frac{|AT|}{|A_1T|} = \frac{P_2 + P_3}{P_1}.$$

Analogno se dobiva

$$\frac{|BT|}{|B_1T|} = \frac{P_1 + P_3}{P_2}, \quad \frac{|CT|}{|C_1T|} = \frac{P_1 + P_2}{P_3}.$$ 10 bodova

Odavde se , uzevši u obzir nejednakost $\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}$ za $x, y > 0$,

dobiva

$$\frac{|AT|}{|A_1T|} \cdot \frac{|BT|}{|B_1T|} \cdot \frac{|CT|}{|C_1T|} = \frac{(P_2 + P_3)(P_1 + P_3)(P_1 + P_2)}{P_1P_2P_3} \geq$$

$$\geq \frac{2\sqrt{P_2P_3} \cdot 2\sqrt{P_1P_3} \cdot 2\sqrt{P_1P_2}}{P_1P_2P_3} = 8.$$

5 bodova

4. Kako jednadžba $f(x) = x$ nema realnih rješenja slijedi da kvadratni trinom $ax^2 + (b - 1)x + c$ ima isti predznak na čitavom skupu R. 5 bodova

Imamo ova dva slučaja:

(1) $ax^2 + (b - 1)x + c > 0$ tj. $f(x) > x$ za svako $x \in R$

5 bodova

(2) $ax^2 + (b - 1)x + c < 0$ tj. $f(x) < x$ za svako $x \in R$.

5 bodova

Promatrajmo prvi slučaj. Neka je $x_0 \in R$. Tada je

$f(f(x_0)) > f(x_0) > x_0$. 5 bodova

U drugom slučaju je $f(f(x_0)) < f(x_0) < x_0$. 5 bodova

Odavde slijedi da jednadžba $f(f(x)) = x$ nema nijedno realno rješenje.