POKRET "NAUKU MLADIMA" SRH

DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA SRH

M A T E M A T I K A

ZADACI ZA OPĆINSKI SUSRET UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA SRH 1990.

3. RAZRED

1. E i F su polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ paralelograma ABCD, a G sjecište dužina $\overline{AF}$ i $\overline{DE}$. U kojim omjerima točka G dijeli dužine $\overline{AF}$ i $\overline{DE}$?

2. Nadji rješenja jednadžbe :

$$6\log_{27}(-\sin 4x) - 2\log_3(2\sin^2 2x - 1) = 1$$

u intervalu $[0, 2\pi\rangle$.

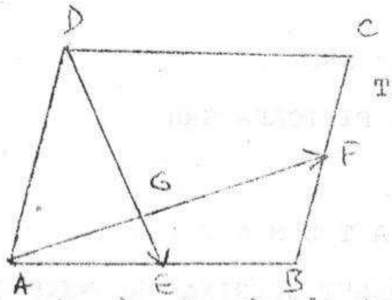
3. Neka je $0<x<1$, $a>0$ i $b>0$. Dokaži

$$a^x b^{1-x} < a + b .$$

4. Dan je pravokutnik ABCD. Na stranici $\overline{BC}$ je točka E za koju vrijedi $|EC| = 4|BE|$, a na stranici $\overline{CD}$ je točka F za koju vrijedi $|FD| = 4|CF|$. Nadji omjer $|AB| : |BC|$ uz uvjet da je kut $\sphericalangle EAF$ maksimalan.

RJEŠENJA ZADATAKA ZA 3.RAZRED :

1.zadatak(25 bodova)



Neka je $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$

$\vec{b} = \overrightarrow{BC}$

Tražimo α i β tako da bude

$\overrightarrow{AF} = \alpha\,\overrightarrow{AG}$ (1)

$\overrightarrow{DE} = \beta\,\overrightarrow{DG}$

Vrijedi $\overrightarrow{AF} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG} = \vec{b} + \frac{1}{\beta}\overrightarrow{DE} = \vec{b} + \frac{1}{\beta}(-\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}) = \frac{1}{2\beta}\vec{a} + \frac{\beta-1}{\beta}\vec{b}$

Iz (1) slijedi $\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{\alpha}{2\beta}\vec{a} + \frac{\alpha(\beta-1)}{\beta}\vec{b}$

pa mora biti

$$\left.\begin{aligned} \frac{\alpha}{2\beta} &= 1 , \\ \frac{\alpha(\beta-1)}{\beta} &= \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Rješenje sustava (2) je $\beta = \frac{5}{4}$, $\alpha = \frac{5}{2}$

pa su traženi omjeri $|\overrightarrow{AF}| : |\overrightarrow{AG}| = 5:2$ i $|\overrightarrow{DE}| : |\overrightarrow{DG}| = 5:4$

2.zadatak(25 bodova)

$1 + 2\cos^2 2x = 1 + 2\cos 2x \cos 2x$

$+2(\cos^2 x - \sin^2 x)$

Vrijedi $2\sin^2 2x - 1 = -\cos 4x$ .... 1 bod

$\log_{27} y = \log_{3^3} y = \frac{1}{3}\log_3 y$ .... 3 boda

$+2(\cos^4 x - 2\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x)$

pa imamo $2\log_3(-\sin 4x) - 2\log_3(-\cos 4x) = 1$ (1)

Odavde slijedi da mora biti $\sin 4x < 0$ i $\cos 4x < 0$ (2)

Iz (1) slijedi $\log_3(\mathrm{tg}\,4x) = 1/2$ .... 3 boda

a zatim $\mathrm{tg}\,4x = \sqrt{3}$ (3) .... 3 boda

Rješenja jednadžbe (3) imamo za $4x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in Z$ .... 3 boda

Budući da mora biti ispunjen uvjet (2), rješenja su

samo za $4x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in Z$

odnosno $x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in Z$ .... 10 bodova

U intervalu $[0, 2\pi)$ imamo četiri rješenja

$x_1 = \frac{\pi}{3}$, $x_2 = \frac{5\pi}{6}$, $x_3 = \frac{4\pi}{3}$, $x_4 = \frac{11\pi}{6}$ .... 2 boda

3. zadatak (25 bodova)

Neka je $0<x<1$, $a>0$, $b>0$. Treba dokazati da je tada

$$a^x b^{1-x} < a + b \qquad (1)$$

Neka je $b\leq a$. Podijelivši (1) s a dobijamo

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{1-x} < 1 + \frac{b}{a}$$

odnosno

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{1-x}\left(1-\left(\frac{b}{a}\right)^{x}\right) < 1 \qquad (2)$$

Kako je $0<b/a\leq 1$, to je

$$0 < \left(\frac{b}{a}\right)^{1-x} \leq 1 \quad \text{i} \quad 0\leq 1-\left(\frac{b}{a}\right)^{x} < 1$$

pa nejednakost (2), a time i (1) vrijedi za $b\leq a$.

Neka je sada $a<b$. Podijelivši (1) s b dobijamo

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{x} < \frac{a}{b} + 1$$

odnosno

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{x}\left(1-\left(\frac{a}{b}\right)^{1-x}\right) < 1 \qquad (3)$$

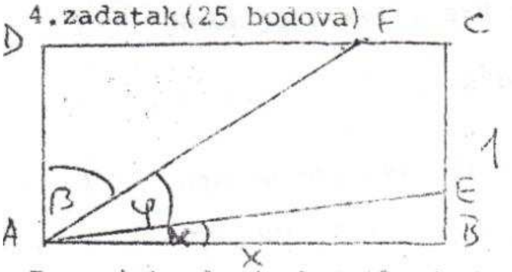
Kako je $0<a/b<1$, to je

$$0<\left(\frac{a}{b}\right)^{x}<1 \quad \text{i} \quad 0< 1-\left(\frac{a}{b}\right)^{1-x} < 1$$

pa nejednakost (3), a time i (1) vrijedi za $a<b$.

Napomena: U slučaju da je tvrdnja dokazana samo za $b\leq a$ ili $a<b$ ocijeniti s 5 bodova.

4. zadatak (25 bodova)



Neka je $\sphericalangle EAB = \alpha$, $\sphericalangle EAF = \varphi$

$\sphericalangle FAD = \beta$.

Neka je $|AB| = x$ i $|BC| = 1$.

Iz uvjeta da je kut φ maksimalan slijedi da je kut $\alpha+\beta$ minimalan.
Iz pravokutnih trokuta ABE i ADF slijedi

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{5x}$ i $\operatorname{tg}\beta = \frac{4x}{5}$ .... 3 boda

Zatim je

$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{\frac{1}{5x}+\frac{4x}{5}}{1-\frac{4}{5}} = \frac{1}{x} + 4x$ .... 10 bodova

Vrijedi $\boxed{\frac{1}{x}+4x \geq 2\sqrt{\frac{1}{x}\cdot 4x}}$ odnosno $\frac{1}{x}+4x \geq 4$ odnosno $4x^2-4x+1\geq 0$

pa je $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, odnosno $\alpha+\beta$ minimalan za $x=1/2$.

Traženi omjer je $|AB|:|BC| = 1/2 : 1$ tj. $|AB|:|BC| = 1:2$ ... 12 bodova