POKRET „NAUKU MLADIMA" SRH
DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA SRH

M A T E M A T I K A

ZADACI ZA REPUBLIČKI SUSRET UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA - 1990.

1. razred

1. Nađite najmanju vrijednost funkcije

$$f(x) = (x+a+b)(x+a-b)(x-a+b)(x-a-b).$$

2. Odredite sve prirodne brojeve n za koje je izraz

$$\frac{n^2 - n - 12}{n - 3}$$

također prirodan broj.

3. Od svih pravokutnih trokuta danog polumjera opisane kružnice r nađite onaj s najvećim polumjerom upisane kružnice.

4. Maja i Ana imaju zajedno 44 godine. Maja ima dva puta toliko godina koliko je imala Ana, kada je Maji bilo upola toliko godina koliko će biti Ani, kada Ani bude tri puta toliko godina koliko je bilo Maji, kada je Maji bilo tri puta toliko godina koliko je bilo Ani.

Koliko godina ima Maja?

RJEŠENJA ZADATAKA ZA 1. RAZRED

1. $f(x) = (x+a+b)(x-a-b)(x+a-b)(x-a+b) =$
$= (x^2 - (a+b)^2)(x^2 - (a-b)^2) =$
$= ((x^2 - a^2 - b^2) - 2ab) \cdot ((x^2 - a^2 - b^2) + 2ab) =$
$= (x^2 - a^2 - b^2)^2 - 4a^2b^2 \geqslant$
$\geqslant -4a^2b^2$

Minimum se postiže za $x^2 = a^2 + b^2$, tj. za $x = \pm\sqrt{a^2+b^2}$.

2. Podijelimo brojnik s nazivnikom :

$$
\begin{array}{l}
(n^2-n-12):(n-3) = n+2 \\
\underline{-n^2+3n} \\
\quad 2n-12 \\
\quad \underline{-2n+6} \\
\quad\quad -6
\end{array}
$$

Izraz se može napisati : $\dfrac{n^2-n-12}{n-3} = (n+2) - \dfrac{6}{n-3}$.

To mora biti prirodan broj pa je $n-3 \in \{1,-1,2,-2,3,-3,6,-6\}$ tj. n može biti : 4,2,5,1,6,0,9,-3 .Jer je n prirodan broj on ne može biti jednak 0, ni -3 .Za preostale slučajeve provjerimo da li je cijeli izraz prirodan broj.Za n=4 vrijednost izraza je 0,što nije prirodan broj pa n=4 nije rješenje.U preostalim slučajevima vrijednost izraza biti će prirodan broj i to 10 (za n=2), 4 (za n=5), 6 (za n=1 i6), i ponovo 10 (za n=9).Traženi prirodni brojevi su 1,2,5,6,9.

3. Neka je ρ polumjer upisane kružnice.Tada vrijedi :

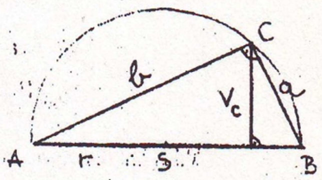
$$\rho = \frac{P}{s} = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{ab}{a+b+c} \cdot \frac{a+b-c}{a+b-c} = \frac{ab(a+b-c)}{(a+b)^2-c^2} =$$
$$= \frac{ab(a+b-c)}{(a+b)^2-a^2-b^2} = \frac{ab(a+b-c)}{2ab} = \frac{a+b-c}{2}.$$

$\dfrac{a+b-c}{2}$ biti će maksimalan ako i samo ako će a+b biti maksimalan (jer je c=2r).

Izraz a+b biti će maksimalan ako i samo ako je izraz $(a+b)^2$ maksimalan ,a to je onda i samo onda kada je izraz ab maksimalan (jer je $(a+b)^2 = c^2 + 2ab$).

3. (nastavak)

Izraz ab biti će maksimalan onda i samo onda kada je $a=b=r\sqrt{2}$
($P=ab$ biti će maksimalna onda i samo onda kada je visina na stranicu c najveća, tj. maksimalna. To vrijedi kada je $a = b = r\sqrt{2}$).



4. Neka je Maji x, a Ani y godina. Tada je:

(1) $x + y = 44$

Prije z godina Ana je imala $y-z$ godina, tj.

(2) $x = 2(y-z)$

Tada je Maji bilo $x-z$ godina, a to je upola manje nego što će ih biti Ani nakon w godina.

(3) $x-z = \frac{1}{2}(y+w)$

Nakon w godina Ani će biti tri puta toliko godina koliko je bilo Maji prije v godina.

(4) $y + w = 3(x-v)$

Tada je Maji bilo tri puta toliko godina koliko je bilo Ani.

(5) $x - v = 3(y - v)$.

Iz sistema linearnih jednadžbi (1)-(5) dobiva se $x=\frac{55}{2}$, tj. Maja ima 27.5 godina.