POKRET „NAUKU MLADIMA" SRH
DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA SRH

MATEMATIKA

ZADACI ZA REPUBLIČKI SUSRET UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA SRH 1990.

3.*razred*

1. U jednakostranični trokut duljine stranice 2 cm smještene su 33 točke. Dokažite da postoje 3 točke koje se mogu prekriti krugom polumjera $r = \frac{3}{10}$ cm.

2. Za kutove α, β, γ trokuta $\triangle ABC$ vrijedi

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Dokažite da je trokut pravokutan.

3. Na kružnici k dana je točka A i iz središta O povučena je zraka koja siječe kružnicu k' u točkama P i P'. Neka točke A i A' leže na rubovima promjera kružnice k'. Dokažite da je

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA'} .$$

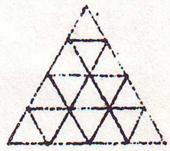
4. Niz je zadan na slijedeći način:

$$a_1 = 1 \ , \quad a_{n+1} = 3a_n + \sqrt{8a_n^2 + 1} \quad za \quad n \geq 1$$

Dokažite da su svi članovi tog niza prirodni brojevi.

RJEŠENJA 3. razred

1. Na svakoj stranici trokuta odredimo 3 točke koje dijele stranicu na 4 jednake dužine. Spojimo međusobno te točke kao na slici. Dobivamo 16 jednakostraničnih trokuta stranice 0.5 cm. Budući da su u trokutu smještene 33 točke, po Dirichletovom principu zaključujemo da postoje 3 točke koje se nalaze u jednom od dobivenih trokuta(najnepovoljnija raspodjela točaka je po dvije u svaki trokut i 33. točka se mora nalaziti u nekom od trokuta u kojem se već nalaze dvije.)
Dakle, treba dokazati da se taj trokut sa tri točke može prekriti krugom polumjera $\frac{3}{10}$ cm.
Izračunajmo polumjer opisane kružnice trokuta stranice 0.5 cm.



$$r=\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{6} \quad i \quad \frac{\sqrt{3}}{6}<\frac{3}{10}$$

Zaključujemo da je taj trokut moguće smjestiti u krug polumjera 0.3 cm.

2. Vrijedi niz jednakosti:

$$\begin{aligned}
0 &= \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-1\\
&= \frac{1+\cos 2\alpha}{2}+\frac{1+\cos 2\beta}{2}+\cos^2\gamma-1\\
&= \frac{\cos 2\alpha+\cos 2\beta}{2}+\cos^2\gamma\\
&= \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\cos^2\gamma\\
&= \cos(\pi-\gamma)\cos(\alpha-\beta)+\cos^2\gamma\\
&= -\cos\gamma\cos(\alpha-\beta)+\cos^2\gamma\\
&= -\cos\gamma(\cos(\alpha-\beta)-\cos\gamma)\\
&= -\cos\gamma(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))\\
&= -2\cos\gamma\cos\alpha\cos\beta
\end{aligned}$$

Dakle, vrijedi ili $\cos\gamma=0$ ili $\cos\beta=0$ ili $\cos\alpha=0$ tj. jedan od kutova je jednak $\frac{\pi}{2}$.

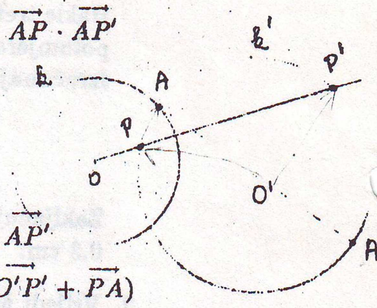
RJEŠENJA 3. razred

3. Najprije je

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OP'}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP})(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP'})=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}+x$$

i zatim

$$\begin{aligned} x &= \overrightarrow{OA}\,(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AP'})+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AP'} \\ &= \overrightarrow{OA}\,(\overrightarrow{AO'}+\overrightarrow{O'P}+\overrightarrow{AO'}+\overrightarrow{O'P'})+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AP'} \\ &= 2\,\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AO'}+y \end{aligned}$$



Kako je

$$\begin{aligned} y &= \overrightarrow{OA}\,(\overrightarrow{O'P}+\overrightarrow{O'P'})+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AP'} \\ &= (\overrightarrow{OP'}+\overrightarrow{P'A})(\overrightarrow{O'P}+\overrightarrow{O'P'})+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AP'} \\ &= \overrightarrow{OP'}\,(\overrightarrow{O'P}+\overrightarrow{O'P'})+\overrightarrow{P'A}\,(\overrightarrow{O'P}+\overrightarrow{O'P'}+\overrightarrow{PA}) \\ &= \overrightarrow{P'A}\,(\overrightarrow{O'A}+\overrightarrow{O'P'})=0 \end{aligned}$$

imamo konačno

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OA}\,(\overrightarrow{OA}+2\,\overrightarrow{AO'})=\overrightarrow{OA}\,(\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{AO'})=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA'}\,.$$

4. $a_1 = 1 \in \mathbb{N}\quad,\quad a_2 = 6$

Izrazimo član a_{n+2} pomoću a_n i a_{n+1}.

Iz $a_{n+1} = 3a_n + \sqrt{8a_n^2+1}$ slijedi

$$\begin{aligned} (a_{n+1}-3a_n)^2 &= 8a_n^2+1 \\ a_{n+1}^2-6a_na_{n+1}+9a_n^2 &= 8a_n^2+1 \\ a_{n+1}^2-6a_na_{n+1}+a_n^2 &= 1 \qquad (1) \end{aligned}$$

Analogno vrijedi $a_{n+2}^2-6a_{n+1}a_{n+2}+a_{n+1}^2=1.\qquad(2)$

Oduzimanjem jednakosti (1) od (2) dobiva se

$$\begin{aligned} a_{n+2}^2-a_n^2-6a_{n+1}a_{n+2}+6a_na_{n+1} &= 0 \\ (a_{n+2}-a_n)(a_{n+2}+a_n-6a_{n+1}) &= 0 \end{aligned}$$

Budući da je očito $a_{n+2} > a_{n+1} > a_n$ to mora biti drugi faktor 0 tj.

$$a_{n+2} = 6a_{n+1} - a_n > 0$$

Prva dva člana niza su prirodni brojevi i svaki član a_{n+2} može se prikazati u obliku $6a_{n+1} - a_n$,pa po principu matematičke indukcije zaključujemo da je svaki član niza prirodan broj.