DRŽAVNO NATJECANJE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA REPUBLIKE HRVATSKE

1991.godina

VII. RAZRED

1. Za bilo koja dva prirodna broja a i b uvijek je točna barem jedna od ove 4 tvrdnje:
   1. broj a je djeljiv sa 3,
   2. broj b je djeljiv sa 3
   3. zbroj $a+b$ je djeljiv sa 3
   4. razlika a-b je djeljiva sa 3.

   Dokaži!

2. Odredi $x. y, z$ ako je

$$\frac{37}{13}=2+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z}}} \quad .$$

3. Koliko ima peteroznamenkastih brojeva načinjenih pomoću znamenaka 0, 1, 3, 5, 7, 9, koji nisu djeljivi sa 10, pri čemu se znamenke ne smiju ponavljati?

4. Svakim vrhom trokuta ABC nacrtan je pravac paralelan s nasuprotnom stranicom. Na nacrtanoj slici može se uočiti izvjestan broj paralelograma. Zbroj opsega svih tako nastalih paralelograma je 60 cm. Odredi opseg trokuta ABC.

5. U jednakokračnom trokutu ABC kut kod vrha C je manji od 60°. Iz vrhova A i B spustimo okomice na nasuprotne stranice. Neka je O sjecište tih okomica, a O´ simetrična točka točki O u odnosu na osnovicu $\overline{AB}$. Koliki je kut $\sphericalangle$ O´AC ?

DRŽAVNO NATJECANJE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA REPUBLIKE HRVATSKE
1991.godina
VII. RAZRED

Rješenja zadataka

1. Ako brojevi a i b nisu djeljivi sa 3, tada razlikujemo 3 slučaja:

1°. Brojevi a i b pri dijeljenju sa 3 daju ostatak 1 , tj. a = 3k + 1, b = 3m + 1, pa je razlika a - b = 3k + 1 - 3m - 1 = 3 (k - m) djeljiva sa 3.

2°. a = 3k + 2, b = 3m + 2, pa je razlika a - b = 3k + 2 - 3m - 2 = 3 (k - m) djeljiva sa 3.

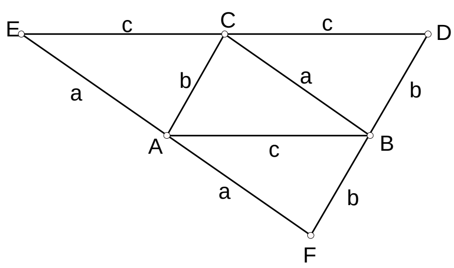
3°. Ako je a = 3k + 1, b = 3m + 2, tada je zbroj a + b = 3k + 1 + 3m + 2 = 3 (k + m + 1) djeljiv sa 3.

2. $$\frac{37}{13} = 2+\frac{11}{13} = 2+\frac{1}{\frac{13}{11}} = 2+\frac{1}{1+\frac{2}{11}} = 2+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{11}{2}}} = 2+\frac{1}{1+\frac{1}{5+\frac{1}{2}}}$$

x = 1, y = 5, z = 2.

3. Neka traženi broj ima oblik $\overline{abcde}$. Znamenku *a* možemo napisati na 5 različitih načina (sve osim 0), znamenku *b* isto na 5 načina (4 preostale koje nisu na mjestu *a* i znamenku 0), *c* na 4 načina, znamemku *d* na 3 i znamenku *e* na 2 načina. Svih peteroznamenkastih brojeva sa navedenim znamenkama ima 5 · 5 · 4 · 3 · 2 = 600,među kojima su i brojevi sa 0 na kraju. Od znamenaka 1, 3, 5, 7, 9 može se načiniti 5 · 4 · 3 · 2 = 120četveroznamenkastih , tj. 120 peteroznamenkastih brojeva sa 0 na kraju. Prema tome, traženih brojeva ima 600 – 400 = 480.

4. Neka su *a*, *b*, *c* duljine stranica trokuta ABC.
Očito je da su na slici 3 paralelograma, pa je
2a + 2b + 2a + 2c + 2b + 2c = 60
ili *4a + 4b + 4c = 60* ,
tj. *a + b + c = 15*.
Opseg trokuta ABC je 15cm.



5. Očito je ∢ O'AB = ∢ OAB (zbog simetrije točaka O i O').
Kako je ∢ DAB = ∢ ABE i ∢ ADB = ∢ AEB = 90°, zaključujemo da je ∢ OBA = ∢ DBA = ∢ EAB = ∢ OAB. (Ako su 2 kuta u 2 trokuta jednaki, onda su jednaki i treći kutovi). Sad je očito ∢ O'AB = ∢ OBA, pa je ∢ O'AC = ∢ O'AB + ∢ BAD = ∢ CBA + ∢ BAD = 90°.