DRŽAVNO NATJECANJE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA REPUBLIKE HRVATSKE

1991. godina

VIII RAZRED

1. Odredi vrijednost izraza $(x+y)^2$, ako je

$$\frac{2}{x}-\frac{2}{y}=1$$

$$y-x=1$$

2. Otac, majka, sin i kćerka imaju zajedno 111 godina, majka i sin imaju 1 godinu više od oca i kćerke, otac je četiri puta stariji od kćerke, a prije godinu dana majka je bila četiri puta starija od kćerke. Odredi starost svakog člana obitelji.

3. Ako je zbroj u^2+uv+v^2 djeljiv sa 9, tada su brojevi u i v djeljivi sa 3. Dokaži.

4. U pravokutnom trokutu ABC točka S je polovište hipotenuze $\overline{AB}$, pri čemu je $|SC|=20$. Na kateti $\overline{AC}$ istaknuta je točka E, tako da je $ES \perp AB$ i $|ES| = 15$. Izračunaj površinu trokuta ABC.

5. U pravokutni trokut ABC duljina kateta $a = 8$, $b = 4$ upisan je kvadrat, tako da mu dvije stranice leže na katetama trokuta, a četvrti vrh leži na hipotenuzi trokuta. Koji dio površine trokuta u postocima zauzima površina kvadrata?

DRŽAVNO NATJECANJE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA REPUBLIKE HRVATSKE

1991. godina

VIII RAZRED

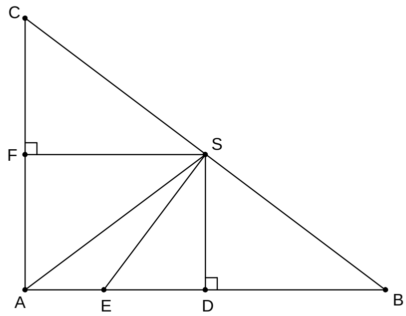
Rješenja zadataka

1. Prvu jednadžbu možemo pisati kao $\frac{2(y-x)}{xy}=1$ ili $\frac{2\cdot 1}{xy}=1$, tj. $xy = 2$. Nakon kvadriranja druge jednadžbe imamo $y^2-2xy+x^2=1$, odnosno $(y-x)^2-4xy=1$ ili $(x+y)^2-4\cdot 2=1$, pa je $(x+y)^2=9$.

2. Neka su a, b, c, d redom godine oca, majke, sina i kćerke. Na temelju gornjih uvjeta dobivamo sljedeći sustav jednadžbi: $a + b + c + d = 111$, $b + c - 1 = a + d$, $a = 4d$, $b - 1 = 4(d - 1)$. Lagano se odredi da je $a + d = 55$, odnosno $4d + d = 55$, ili $d = 11$ i $a = 44$. Direktnim uvrštavanjem u četvrtu jednadžbu dobivamo $b = 41$, pa je $c = 15$. Otac ima 44, majka 41, sin 15, a kćerka 11 godina.

3. Zadani izraz možemo pisati $u^2+uv+v^2=(u-v)^2+3uv=9k$. Kako je zbroj i jedan pribrojnik djeljiv sa 3, to je i drugi pribrojnik tj. $(u-v)^2$ djeljiv sa 3, a to je moguće samo ako je $(u - v)$ djeljiv sa 3, tj. $u - v = 3m$. Kvadriramo li zadnju jednakost i uvrstimo u prvu dobivamo $9m^2+3uv=9k$. Sad je očito ili u ili v djeljiv sa 3. Kako je $u - v = 3m$, to nužno slijedi da je i u i v djeljiv sa 3.

4. Očito je |SC| = |SB| = |SA| = 20. Primjenom Pitagorinog poučka na pravokutni trokut ASE lako odredimo |AE| = 25. Kako je $\overline{SD}$ visina na hipotenuzu trokuta ASE, to primjenom formula za površinu trokuta dobivamo 20 · 15 = 25 · |SD|, tj. |SD| = 12. Promatranjem jednakokračnog trokuta BCS i pravokutnika CDSF zaključujemo da je |BF| = |CF| = |SD| = 12, tj. |BC| = 24. Sad lagano odredimo katetu |AC| = 32. Površina trokuta ABC je 384.



5. Iz P(ABC) = P(BCE) + P(ACE) slijedi $\frac{ab}{2}=\frac{ax}{2}+\frac{bx}{2}$, tj. $ab = ax + bx$, pa je $x=\frac{ab}{a+b}$. Prema tome, površina kvadrata je $\frac{a^2b^2}{(a+b)^2}$, a kako je površina trokuta $\frac{ab}{2}$, to je

$$\frac{a^2b^2}{(a+b)^2}:\frac{ab}{2}=\frac{2ab}{(a+b)^2}=\frac{2\cdot 8\cdot 4}{(8+4)^2}=\frac{4}{9}.$$

Kvadrat zauzima približno 44% površine trokuta.