POKRET "NAUKU MLADIMA"
REPUBLIKE HRVATSKE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

23. veljače 1991.

ZADACI

ZA OPĆINSKO NATJECANJE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA REPUBLIKE HRVATSKE

M A T E M A T I K A 8. razred

1. Konstruiraj dužinu kojoj je duljina: a) $\sqrt{13}$ cm
   b) $\sqrt{35}$ cm .

2. Odredi sve racionalne brojeve kojima je brojnik manji od nazivnika za 4 , a kad brojniku i nazivniku oduzmemo 2 dobiveni razlomak manji je od $\frac{1}{4}$.

3. Dvije cijevi zajedno napune bazen za $9\frac{3}{8}$ sati. U početku su obje cijevi zajedno punile bazen 5 sati, a zatim je druga cijev prestala puniti bazen, pa je prvoj cijevi bilo potrebno još 7 sati da dovrši punjenje bazena. Za koliko bi sati svaka cijev posebno napunila bazen ?

4. Ako je $2x = 1 - 4y$, dokaži da je $x^2 + y^2 \geqslant \frac{1}{20}$.

5. U pravokutnom trokutu ABC konstruirane su simetrale kutova $\measuredangle BAC$ i $\measuredangle ABC$. Neka su D i E sjecišta tih simetrala s nasuprotnim stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$. Iz točaka D i E povucite okomice na hipotenuzu $\overline{AB}$ i neka su N i M sjecišta tih okomica s hipotenuzom.
   Koliki je $\measuredangle MCN$?

II RJEŠENJA 1991. bodovi

8. razred

1\. a) Neka je x duljina tražene dužine, tj. $x = \sqrt{13}$.
Kvadriranjem jednakosti dobivamo $x^2 = 13$, odnosno
$x^2 = 9 + 4$ ili $x^2 = 3^2 + 2^2$ 2
Tražena dužina je hipotenuza pravokutnog trokuta čije su
katete 3 cm i 2 cm 1
Konstrukcija dužine 2

b) Neka je y duljina tražene dužine, tj. $y = \sqrt{35}$.
Kvadriranjem jednakosti dobivamo $y^2 = 35$, odnosno
$y^2 = 36 - 1$ ili $y^2 = 6^2 - 1^2$ 2
Tražena dužina je kateta pravokutnog trokuta čija je
hipotenuza 6 cm, a druga kateta 1 cm 1
Konstrukcija dužine 2

UKUPNO: 10

2\. Neka traženi razlomak ima oblik $\frac{n}{n+4}$. Prema uvjetu
zadatka imamo $\frac{n-2}{n+2} < \frac{1}{4}$, odnosno $\frac{n-2}{n+2} - \frac{1}{4} < 0$,
ili $\frac{4n-8-n-2}{4(n+2)} < 0$, pa je $\frac{3n-10}{4(n+2)} < 0$ . . . 2
Dalje razlikujemo 2 slučaja:
1.) $3n - 10 < 0$ i $n + 2 > 0$, a rješenje ovog sustava
nejednadžbi je $n < \frac{10}{3}$ i $n > -2$, tj. $-2 < n < \frac{10}{3}$
pa imamo ove vrijednosti za $n \in \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ . . . 2
2.) $3n - 10 > 0$ i $n + 2 < 0$, odnosno $n > \frac{10}{3}$ i
$n < -2$, pa ovaj sustav nema rješenje, tj. rješenje je $\emptyset$. 1
Traženi razlomci su: $-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{6}, \frac{3}{7}$ 5

UKUPNO: 10

3\. <u>1. rješenje</u>
Za 1 sat obje cijevi napune $\frac{1}{9\frac{3}{8}} = \frac{8}{75}$ bazena
a za 5 sati $\frac{8}{15}$ bazena. 2
To znači, da preostali dio tj. $\frac{7}{15}$ bazena napuni prva cijev
za 7 sati, pa će za 1 sat napuniti $\frac{1}{15}$ bazena, a za
punjenje cijelog bazena potrebno je 15 sati. 3
Sad je očito da prva cijev za 5 sati napuni $\frac{1}{3}$ bazena, pa
će druga cijev za 5 sati napuniti $\frac{8}{15} - \frac{1}{3} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$ bazena. 2
Prema tome, druga cijev će za 1 sat napuniti $\frac{1}{25}$ bazena,
a cijeli bazen za 25 sati. 3

http://www.matka.afu.hr
http://public.carnet.hr/~ahorvate

opć. 1991, 8.r.

bodovi

3. **2. rješenje** Ako prva cijev napuni bazen za x sati, tada će za 7 sati napuniti $\frac{7}{x}$ bazena, a obadvije cijevi za 5 sati napune $\frac{8}{15}$ bazena, pa vrijedi $\frac{8}{15}+\frac{7}{x}=1$ . . . 3

Rješenje jednadžbe je $x = 15$. 1

Prva cijev napuni bazen za 15 sati 1

Ako druga cijev napuni bazen za y sati, tada će za $9\frac{3}{8}$ sati napuniti $\frac{9\frac{3}{8}}{y}$ bazena, a prva cijev će za isto vrijeme napuniti $\frac{9\frac{3}{8}}{15}$ bazena, a zajedno $\frac{9\frac{3}{8}}{15}+\frac{9\frac{3}{8}}{y}=1$. 3

Rješenje jednadžbe je $y = 25$ 1

Druga cijev napuni bazen za 25 sati 1

UKUPNO: 10

4. Iz $2x = 1 - 4y$ slijedi $x = \frac{1-4y}{2}$. Uvrstimo zadnju jednadžbu u zadanu nejednakost dobivamo redom,

$$\left(\frac{1-4y}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{1}{20} \geq 0 ,$$

$$\frac{1}{4}(1 - 8y + 16y^2) + y^2 - \frac{1}{20} \geq 0 , \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 2$$

$$\frac{1}{20}(5 - 40y + 80y^2 + 20y^2 - 1) \geq 0$$

$$\frac{1}{20}(100y^2 - 40y + 4) \geq 0$$

$$\frac{1}{20}(10y - 2)^2 \geq 0 \; . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 6$$

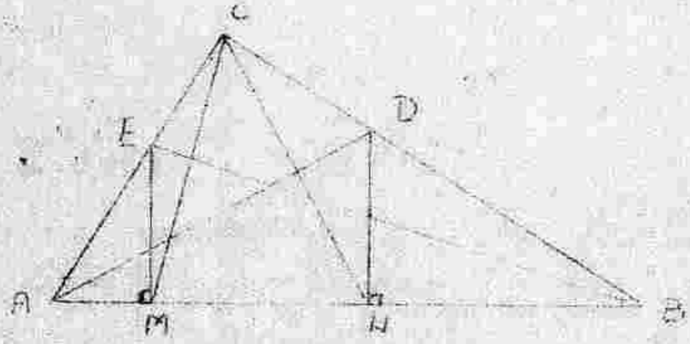
Zadnja nejednakost je točna za bilo koju vrijednost y, jer uvijek vrijedi $(10y - 2)^2 \geq 0$ 2

UKUPNO: 10

opć. 1991. 8.r.

bodovi

5. skica 1



$\triangle ACD \cong \triangle AND$, jer su to pravokutni trokuti, $\overline{AD}$ je zajednička stranica i $\measuredangle CAD = \measuredangle NAD = \frac{\alpha}{2}$ . . . 2

Zaključujemo, da je $|CD| = |DN|$, pa je trokut CND jednakokračan 1

Analogno je i $\triangle BEM \cong \triangle BCE$, jer su trokuti pravokutni, $\overline{BE}$ je zajednička stranica i $\measuredangle MBE = \measuredangle CBE = \frac{\beta}{2}$ . . 1

Zaključujemo da je $|EM| = |CE|$ pa je trokut MCE jednakokračan. 1

Očito je $\measuredangle BDN = \alpha$, a $\measuredangle NCD = \frac{\alpha}{2}$ (svojstvo vanjskog kuta) . Naime, trokut NBD je pravokutan kome je $\measuredangle NBD = \beta$.

Iz istih razloga je $\measuredangle AEM = \beta$, a $\measuredangle ACM = \frac{\beta}{2}$ 2

Sad možemo pisati $\measuredangle ACM + \measuredangle MCN + \measuredangle NCB = 90$, ili

$$\frac{\beta}{2} + \measuredangle MCN + \frac{\alpha}{2} = 90 \text{ , tj.}$$

$$\measuredangle MCN = 45^\circ$$ 2

UKUPNO: 10

SVEUKUPNO: 50