Pokret "Nauku mladima" Republike Hrvatske
Hrvatsko matematičko društvo

M A T E M A T I K A

Zadaci za općinski susret učenika srednjih škola
Republike Hrvatske 23. veljače 1991.

1. razred

$3^{6n} - 2^{6n}$

1. Dokaži da je za svaki prirodni broj n izraz $3^{6n} - 2^{6n}$ djeljiv brojem 665.

2. Točka M je polovište stranice $\overline{CD}$ kvadrata $ABCD$, a točka P je točka dijagonale $\overline{AC}$ takva da je $d(P, C) = 3 \cdot d(A, P)$. Koliki je kut $\angle BPM$?

3. Koliko ima točaka $T(x, y)$ sa cjelobrojnim koordinatama x, y takvih da vrijedi nejednadžba $|x| + |y| \leq 20$?

4. Izračunaj sumu svih parnih troznamenkastih brojeva sastavljenih od znamenaka iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Znamenke se mogu ponavljati.

Pokret "Nauku mladima" Republike Hrvatske
Hrvatsko matematičko društvo

MATEMATIKA

Zadaci za općinski susret učenika srednjih škola
Republike Hrvatske 23. veljače 1991.

2. razred

1. Unutar trokuta ABC površine P odabrana je točka T. Pravci kroz točku T paralelni s pojedinim stranicama trokuta dijele taj trokut na tri trokuta s površinama P_1, P_2 i P_3 i tri paralelograma. Izrazi površinu P pomoću površina P_1, P_2 i P_3.

2. Kolika je najmanja moguća vrijednost izraza:

$$(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)+3?$$

3. Odredi sve vrijednosti koeficijenta $a \in \mathbf{R}$ za koje jednadžbe:

$$x^2+ax+1=0$$
$$x^2+x+a=0$$

imaju bar jedno zajedničko rješenje.

4. *Magični kvadrat reda 3* je kvadrat 3×3 u čija su polja upisani brojevi $1, 2, \ldots, 9$ sa svojstvom da su sve sume po stupcima, sve sume po recima i obje sume po dijagonalama medjusobno jednake.

   Dokaži da magični kvadrat reda 3 u srednjem polju mora imati napisan broj 5.

POKRET "NAUKU MLADIMA"
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

ZADACI ZA OPĆINSKO NATJECANJE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA–1991

III RAZRED

1. Izrazi y pomoću x tako da za točke $A(-3,0)$, $B(3,0)$, $C(x,y)$ vrijedi $\angle ABC = 2\angle BAC$.

2. Riješi nejednadžbu u skupu $\mathbb{R}$:

$$x \cdot \log_{0,5}(x^2 + 3x) + \log_3(9^x) > 0.$$

3. Svaki od 25 danih pravaca obojen je jednom od 3 boje: crvenom, bijelom ili plavom. Ako svaki od tih pravaca dijeli zadani kvadrat na 2 četverokuta čije se površine odnose kao 2:3, dokaži da bar 3 pravca iste boje prolaze istom točkom.

4. U ravnini je nacrtana kružnica k s nepoznatim središtem. Neka je A bilo koja točka na k i k' kružnica oko A s polumjerom ρ takvim da k' siječe k u dvije točke B i C. Kružnice oko B i C istog polumjera ρ sijeku se u točki A i u još jednoj točki D. Kružnica oko D, koja prolazi točkom A siječe k' u dvije točke B' i C'. Kružnice oko B' i C' istog polumjera ρ sijeku se u točki A i u još jednoj točki X. Dokaži da je X rješenje Napoleonove zadaće: "Služeći se samo šestarom konstruiraj središte X dane kružnice k."

POKRET "NAUKU MLADIMA" HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

OPĆINSKI SUSRET UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA

23. veljače 1991.

IV. razred

1. Nađi član a_p aritmetičkog niza u kojem je $a_m = n$, $a_n = m$ $(m \neq n)$.

2. U skupu R riješi jednadžbu

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x}\right) = \operatorname{sign} \log_x 5^{\sqrt{1-x}} .$$

3. Izračunaj broj najkraćih puteva od točke $(0,0)$ do dane točke (p,q), gdje je $p \leqslant q$, duž bridova cjelobrojne koordinatne mreže tako da što veći dio puta bude u zatvorenoj pruzi omeđenoj pravcima $y = x + q - p - 1$, $y = x + q - p + 1$.

4. Nađi sva moguća "parketiranja" ravnine kongruentnim pravilnim poligonima.

1. razred – rješenja

Zadaci za općinski susret učenika srednjih škola
Republike Hrvatske 23. veljače 1991.

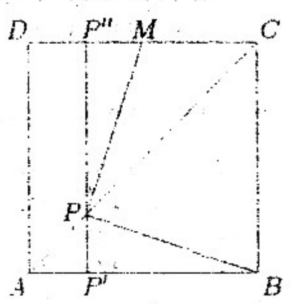
25 b 1. *Prvo rješenje.* $3^{6n}-2^{6n}=(3^6)^n-(2^6)^n=(3^6-2^6)\cdot((3^6)^{n-1}+(3^6)^{n-2}(2^6)+\ldots+(2^6)^{n-1})=665\cdot(\cdots)$.

Drugo rješenje. $3^{6n}-2^{6n}=(3^3)^{2n}-(2^3)^{2n}=27^{2n}-8^{2n}=(27^n)^2-(8^n)^2=(27^n-8^n)(27^n+8^n)=(27-8)(27^{n-1}+27^{n-2}8+\ldots+8^{n-1})\cdot(27+8)(27^{n-1}-27^{n-2}8+\ldots+(-1)^{n-1}8^{n-1})=19\cdot(27^{n-1}+27^{n-2}8+\ldots+8^{n-1})\cdot 35\cdot(27^{n-1}-27^{n-2}8+\ldots+(-1)^{n-1}8^{n-1})=665\cdot(\cdots)\cdot(\cdots)$. 5b 10b 10b

Treće rješenje. Matematičkom indukcijom.

Četvrto rješenje. Pomoću kongruencija. $3^6\equiv 64 \pmod{665}$, $2^6\equiv 64 \pmod{665}$. 10b
Dakle : $3^{6n}-2^{6n}\equiv 64^n-64^n\equiv 0 \pmod{665}$.

25 b 2. *Prvo rješenje.* Ako s P', P'' označimo redom ortogonalne projekcije točke P na stranice $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, dokaže se da su trokuti PBP' i $P''PM$ sukladni. Onda je suma kuteva $\angle P''PM$ i $\angle P'PB$ jednaka 90°, pa je i traženi kut jednak 90°. 15b 5b



5b

Drugo rješenje. Postavimo koordinatni sustav tako da mu je ishodište u točki A i da točka B ima koordinate $(a,0), a>0$. Tada je : $M=(a/2,a)$, $C=(a,a)$. Ako označimo $P=(x_p,y_p)$, onda vrijedi : $y_p=x_p$ (jer P leži na pravcu AC), $9\cdot(x_p^2+y_p^2)=(x_p-a)^2+(y_p-a)^2$ (jer je $9\cdot d(A,P)^2=d(P,C)^2$). Dakle $3x_p=\pm(x_p-a)$, a zbog $0<x_p<a$ slijedi $P=(a/4,a/4)$. 5b

Do istog smo medjurezultata mogli doći i izražavajući djelišne omjere pomoću koordinata umjesto korištenja Pitagorinog teorema : $1/4=x_p/a$, $1/4=y_p/a$. 10b

Zadatak se dalje može rješavati tako da se provjeri da vrijedi Pitagorin teorem za trokut MPB : $d(M,B)^2=d(M,P)^2+d(P,B)^2$, pa se zaključuje da je traženi kut jednak 90°. 10b

Druga mogućnost je analitička provjera okomitosti pravaca MP i PB.

25 b 3. Skup rješenja zadane nejednadžbe je skup svih točaka sa cjelobrojnim koordinatama koje se nalaze unutar zatvorenog kvadrata s vrhovima u $(20,0)$, $(0,20)$, $(-20,0)$, $(0,-20)$ 5b

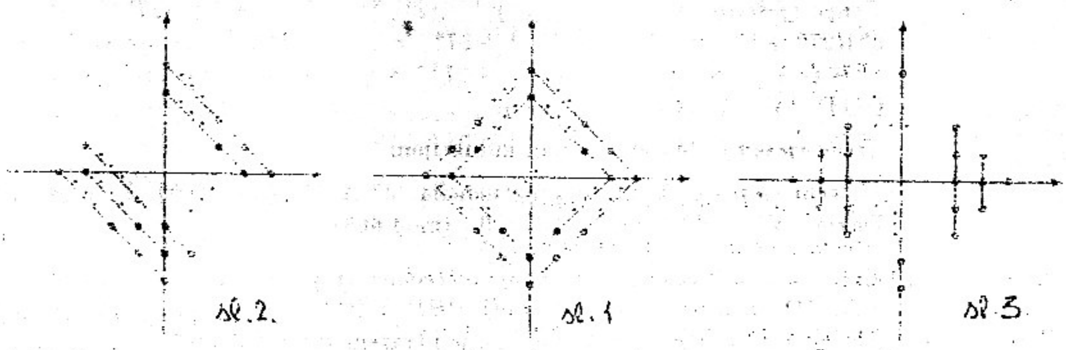
Prvo rješenje. Nejednadžbu možemo svesti na niz jednadžbi (vidi prvu sliku !). Jednadžba $|x|+|y|=k$ za $k>0$ ima 4 rješenja s po jednim sumandom jednakim 0, $k-1$ rješenja s pozitivnim x i pozitivnim y, $k-1$ rješenja s negativnim x i pozitivnim 10b

1991.- opć. - I. razr. - rješenja

y itd. Dakle ukupno $4 + 4(k-1)$ rješenje. Za $k = 0$ ima jedno rješenje. Rezultat :
$1 + 4 + 8 + 12 + \ldots + (4 + 4 \cdot 19) = 841$. 10b

Drugo rješenje. Vidi drugu sliku ! U kvadratu možemo uočiti 21 dužinu na kojima se nalazi po 21 točka iz zadanog skupa. Preostale točke nalaze se na jednoj od 20 dužina koje sadrže po 20 točaka. Ukupno, postoji $21 \cdot 21 + 20 \cdot 20 = 841$ točaka ravnine sa cjelobrojnim koordinatama koje zadovoljavaju zadanu jednadžbu. 5b 10b 5b

Treće rješenje. Vidi treću sliku ! Brojimo cjelobrojne točke na pravcima paralelnim s (npr.) osi y : $1 + 3 + 5 + \ldots + (20 + 1 + 20) + \ldots + 5 + 3 + 1 = (1 + 3 + \ldots + 41) + (39 + \ldots + 3 + 1) = 21^2 + 20^2 = 841$. 10b 10b



sl. 2. sl. 1 sl. 3.

Četvrto rješenje. Isti rezultat može se dobiti i raznim particioniranjima skupa rješenja prema predznaku (na slici to otprilike odgovara kvadrantima u kojima se nalaze rješenja).

25b 4. *Prvo rješenje.* Popišimo prvo sve brojeve koji zadovoljavaju uvjet zadatka i završavaju s 2 u obliku tablice :

112	122	332	142	152	162
212	222	232	242	252	262
312	322	332	342	352	362
412	422	432	442	452	462
512	522	532	542	552	562
612	622	632	642	652	662

5b

U ovoj tablici nalazi se 36 brojeva. Slično bismo mogli ispisati i tablicu od 36 brojeva koji završavaju znamenkom 4 ili tablicu brojeva koji završavaju brojem 6.

Dakle, 2 kao znamenka jedinica dolazi u 36 brojeva, a isto tako i brojevi 4 i 6. Ukupno, znamenke jedinica doprinose sumi $(2+4+6) \cdot 36 = 432$. U ovoj tablici svaki od brojeva 1, 2, 3, 4, 5, 6 se kao znamenka desetica pojavljuje 6 puta. Jasno je da se isto toliko puta pojavljuje i u drije tablice koje nisu ovdje napisane. Desetice dakle doprinose sumi $(10 + 20 + 30 + 40 + 50 + 60) \cdot 18 = 3780$. Slično se zaključi da je za stotice doprinos : $(100 + 200 + 300 + 400 + 500 + 600) \cdot 18 = 37800$. Zbrajanjem svih doprinosa dobivamo rezultat 42012. 10b 5b 5b

Drugo rješenje. Raznim grupiranjima, drugačijim od prethodno opisanog, možemo dobiti isti rezultat.

2. razred - rješenja

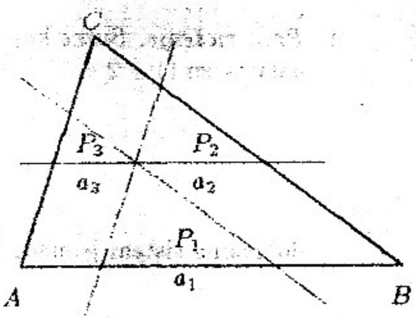
Zadaci za općinski susret učenika srednjih škola
Republike Hrvatske 23. veljače 1991.

25b 1. Dobivena tri trokuta slična su trokutu ABC. Zbog teorema o površinama sličnih trokuta slijedi : $P_1/P = a_1^2/a^2$, $P_2/P = a_2^2/a^2$, $P_3/P = a_3^2/a^2$, tj. $\sqrt{P_1}/\sqrt{P} = a_1/a$, $\sqrt{P_2}/\sqrt{P} = a_2/a$, $\sqrt{P_3}/\sqrt{P} = a_3/a$. 5b 10b

Zbrajanjem:

$$\frac{\sqrt{P_1}+\sqrt{P_2}+\sqrt{P_3}}{\sqrt{P}} = \frac{a_1+a_2+a_3}{a} = \frac{a}{a} = 1.$$ 5b

Dakle : $\sqrt{P} = \sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} + \sqrt{P_3}$. 5b



25b 2. *Prvo rješenje.* $y = (x-4)(x-5)(x-6)(x-7)+3 = [(x-4)(x-7)][(x-5)(x-6)]+3 = (x^2-11x+28)(x^2-11x+30)+3 = [(x^2-11x+29)-1][(x^2-11x+29)+1]+3 = (x^2-11x+29)^2-1+3$. 5b 10b

$(x^2-11x+29)^2$ je uvijek veće od 0, a minimum (0) postiže u točkama $(11\pm\sqrt{5})/2$. 5b
Minimum funkcije y iznosi $0-1+3=2$. 5b

Drugo rješenje. Funkcija je očigledno simetrična oko točke $x=(5+6)/2=11/2$. 5b
Stavimo zato $t := x - 11/2$. 5b

$$y = (t-3/2)(t-1/2)(t+1/2)(t+3/2)+3.$$

Sada se vidi da treba grupirati prvi sa zadnjim te srednja dva faktora :

$$y = \left(t^2-(3/2)^2\right)\left(t^2-(1/2)^2\right)+3.$$ 5b

Stavimo li $u := t^2$, dobivamo : $y = \left(u-(3/2)^2\right)\left(u-(1/2)^2\right)+3 = u^2-5/2u+9/16+3$. 5b
Odavdje slijedi da je minimum funkcije y jednak 2. 5b

25b 3. *Prvo rješenje.* Želimo li da jednadžbe imaju jedno zajedničko kompleksno rješenje, odgovarajući koeficijenti tih jednadžbi moraju biti medjusobno proporcionalni. To je moguće samo za $a=1$. Pogledajmo još da li mogu imati jedno zajedničko realno rješenje. 5b

Rješenja prve, odnosno druge jednadžbe su redom :

$$x_{1,2} = \frac{-a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}, \quad x_{3,4} = \frac{-1\pm\sqrt{1-4a}}{2}.$$

Budući da rješenja moraju biti realna, dobivamo da mora biti $a \le -2$. Oba rješenja prve jednadžbe su pozitivna, prvo veće, drugo manje od $|a|$. Samo jedno rješenje druge jednadžbe je pozitivno, i ono je manje od a. Izjednačavanjem dobivamo $-a+\sqrt{a^2-4} = -1+\sqrt{1-4a}$. Riješimo li ovu jednadžbu (koristiti $a \le 1/4$), dobivamo $a=-2$. 10b 10b

Drugo rješenje. Ako nazovemo rješenja prve jednadžbe s x_1, x_2, a druge s x_2, x_3, Vieteove formule daju : $x_1+x_2=-a$, $x_1x_2=1$, $x_2+x_3=-1$, $x_2x_3=a$. Eliminiranjem x_2 5b

1991.-opć.-2.razr.-rješenja

dobivamo $x_1/x_3 = 1/a$, $x_1 - x_3 = -a+1$, $x_1 + a/x_3 = -a$. Eliminiranjem x_3 iz ovih jednadžbi slijedi $x_1 - ax_1 = -a+1$, $x_1 + 1/x_1 = a$. Odavdje se lako može izračunati da mora biti $a \in \{1, -2\}$. 10b 5b 5b

Treće rješenje. Promatramo li ove jednadžbe kao sistem jednadžbi, dobivamo : $a = -x^2 - x$, $x^2 - (x^2 + x) + 1 = 0$. Dakle, $x^3 - 1 = 0$, tj. $x_1 = 1$, $x_{2,3} = (-1 \pm i\sqrt{3})/2$. Tada imamo : $a_1 = -2$, $a_{2,3} = 1$. 5b 10b 5b 5b

25b 4. *Prvo rješenje.* Sume koje trebamo dobiti u pojedinim recima, stupcima i na dijagonalama su $(1+2+\ldots+9)/3 = 15$. Ako brojeve u tablici označimo kao na slici : 5b

$$\begin{array}{ccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & s & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{array}$$ 5b

dobivamo sistem jednadzbi :

$$\begin{aligned} x_{11} + s + x_{33} &= 15 \\ x_{21} + s + x_{23} &= 15 \\ x_{12} + s + x_{32} &= 15 \\ x_{31} + s + x_{13} &= 15, \end{aligned}$$ 5b

gdje su x_{ij} medjusobno različiti brojevi iz skupa $\{1, 2, \ldots, 9\}$. Broj s mora biti iz istog skupa i različit od svih x_{ij}. Zbrajanjem svih ovih jednadžbi dobivamo : $1+2+3+4+5+6+7+8+9+3s = 60$. Dakle, $s = 5$. 5b 5b

Drugo rješenje. Možemo analizirati sistem jednadžbi. Uvjerimo se prvo da ne mogu dva x-a u jednoj jednadžbi biti "mala", čak niti 3 i 4. Dakle i u tom najboljem slučaju, s mora biti jednak 8. Tada se lako vidi da možemo još riješiti drugu i treću jednadžbu (5+2, 6+1), ali četvrta više ne ide ... 5b 10b

Ako su prvi sumandi npr. redom $1, 2, 3, 4$, onda s može biti najmanje jednak 5. Tada se vidi da treći sumandi moraju biti $9, 8, 7, 6$ i to je jedino moguće rješesnje. 10b

RJEŠENJA ZADATAKA ZA III RAZRED. – općinsko 1991.

(25 bodova)

1. Iz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{3+x}$ i $\operatorname{tg}2\alpha = \frac{y}{3-x}$ primjenom formule $\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$ slijedi

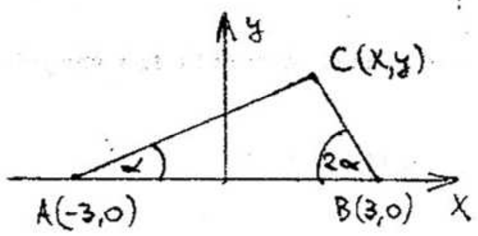
$$\frac{y}{3-x} = \frac{\frac{2y}{3+x}}{1-\frac{y^2}{(3+x)^2}}$$ ... 20 bodova

a odatle nakon sređivanja:

$$\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1.$$

Primjetimo usput da je ovo jednadžba hiperbole. Dakle:

$$y = \pm\sqrt{12\left[\frac{(x+1)^2}{4} - 1\right]}.$$ ... 5 bodova



(25 bodova)

2. Zbog $\log_3(9^x) = 2x$ je

$$x(\log_{0,5}(x^2+3x) + 2) > 0,$$

pa imamo dvije mogućnosti

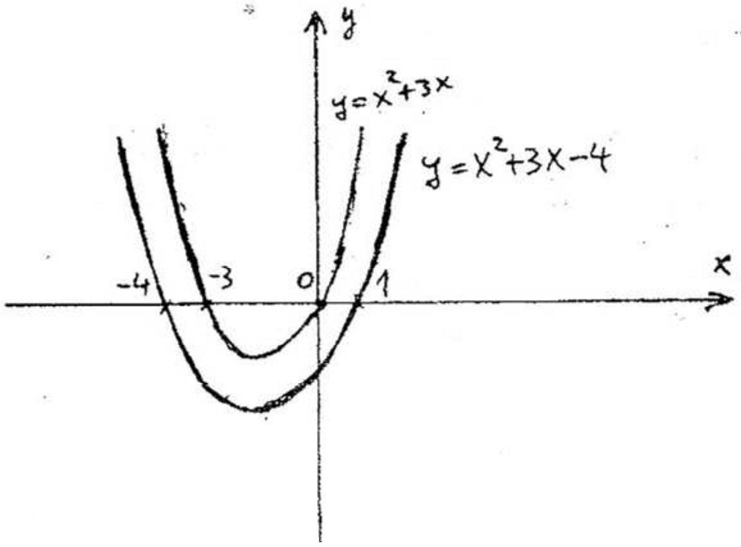
a) $x > 0$ i $\log_{0,5}(x^2+3x) > -2$;

b) $x < 0$ i $\log_{0,5}(x^2+3x) < -2$. } 5 bodova

Razmotrimo najprije slučaj a). Mora biti $x^2+3x > 0$ i zatim, kako je baza manja od 1, $x^2+3x < (0,5)^{-2} = 4$. Ove dvije nejednakosti zajedno povlače $x \in (-4,-3) \cup (0,1)$ odakle zbog $x > 0$ slijedi $x \in (0,1)$.

Na potpuno isti način rješava se i slučaj b), za koji se dobiva $x \in (-\infty, -4)$. } 15 bodov

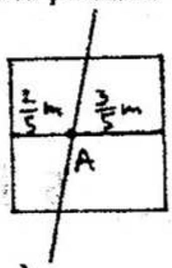
Rješenje polazne jednadžbe je $x \in (-\infty,-4) \cup (0,1)$. } 5 bodova

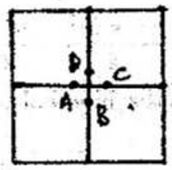


1991. - opć. - 3. razr. - rješenja

(25 bodova)

3. Svaki od danih 25 pravaca dijelit će zadani kvadrat na 2 trapeza. Površine tih trapeza odnosit će se kao 3 : 2 ako i samo ako im se srednjice odnose kao 3 : 2. U unutrašnjosti kvadrata postoje 4 točke A, B, C, D takve da svaki pravac mora prolaziti jednom od njih da bi se površine odnosile kao 3 : 2. Kako imamo 25 pravaca i 4 točke, po Dirichletovom principu postoji bar 7 pravaca koji prolaze istom točkom. Kako imamo tri boje, to su po barem tri od tih sedam pravaca iste boje.





(25 bodova)

4. Odaberimo koordinatni sustav tako da je $A(0,0)$ i da k ima jednadžbu $x^2+(y-r)^2=r^2$, tj.

$$x^2+y^2-2ry=0. \tag{1}$$

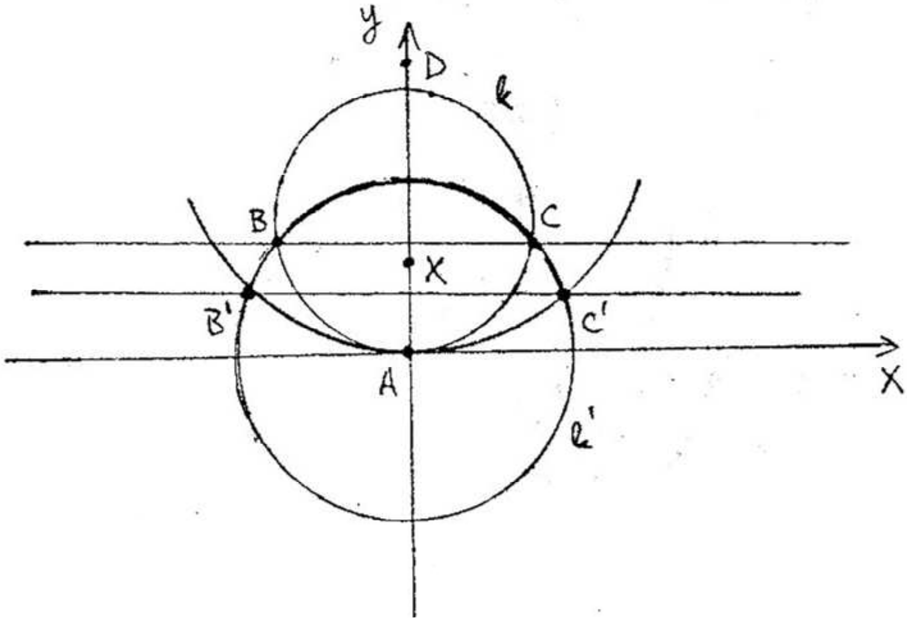
Tada k' ima jednadžbu:

$$x^2+y^2-\rho^2=0. \tag{2}$$

Iz (1) i (2) slijedi $y=\frac{\rho^2}{2r}$, i to su ordinate točaka B i C. Kako su točke A i D simetrične u odnosu na pravac BC, to slijedi da je $D(0,\frac{\rho^2}{r})$. Zato kružnica oko D koja prolazi kroz A ima jednadžbu $x^2+(y-\frac{\rho^2}{r})^2=(\frac{\rho^2}{r})^2$, tj. ... 10 bodova

$$x^2+y^2-\frac{2\rho^2}{r}y=0. \tag{3}$$

Iz (2) i (3) slijedi $y=\frac{r}{2}$, tj. točke B' i C' imaju ordinatu $\frac{r}{2}$. Kako su točke A i X simetrične u odnosu na pravac $B'C'$, to slijedi da je $X(0,r)$. ... 15 bodova



RJEŠENJA ZADATAKA ZA 4. RAZRED – općinsko 1991.

1. $\left.\begin{array}{l} a_m = a_1 + (m-1)d = n \\ a_n = a_1 + (n-1)d = m \end{array}\right\} \Rightarrow a_m - a_n = (m-n)d = n - m$

$\Rightarrow d = -1.$ 10 bodova

$a_m = a_1 + (m-1)\cdot(-1) = n \Rightarrow a_1 = m+n-1$ 5 bodova

$a_p = a_1 + (p-1)d = m + n - 1 + (p-1)\cdot(-1)$

$\Rightarrow a_p = m + n - p.$ 10 bodova

2. Moraju biti ispunjeni ovi uvjeti:

$\left.\begin{array}{l} 4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} > 0 \\ x > 0, \quad x \neq 1, \quad 1 - x \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 < x < 1.$ 5 bodova

Iz jednadžbe se zbog $\log_x 5 < 0$ i $\sqrt{1-x} > 0$ dobiva

$\log_{1/3}(4^{2\cos^2 x - 1} + 4^{\cos^2 x}) = -1$ 5 bodova

$(4^{\cos^2 x})^2 + 4\cdot 4^{\cos^2 x} - 12 = 0.$

Za $t = 4^{\cos^2 x} > 0$ dobiva se $t^2 + 4t - 12 = 0 \Rightarrow t = 2$ 10 bodova

$\cos x = \frac{\pm\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pm\pi}{4} + k\pi \ (k \in Z)$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ i $\cancel{x = \frac{3\pi}{4}}$. 5 bodova

3. Vidi sliku!

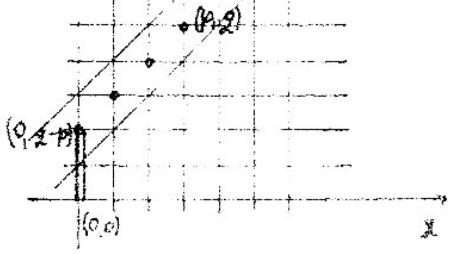
Primijetimo da put mora proći svim točkama i dužinama označenim dvostrukom crtom. Ne smanjujući općenitost možemo pretpostaviti da je $p = q$, 5 bodova

Još treba odrediti na koliko načina se može od točke (0,0) doći do točke (p,p). Tom možemo uraditi metodom matematičke indukcije. 5 bodova

Ako je $p = 1$ tada postoje točno 2 puta. 5 bodova

Neka se za dano p iz ishodišta može doći do točke (p,p) doći na N_p načina. Za p+1 bit će N_{p+1} puteva, i za svaki put koji ide do točke (p,p) postoje dvije mogućnosti za izbor do točke (p+1,p+1), dakle ima $2\cdot N_p$ načina. Budući da je $N_1 = 2$ dobivamo da je $N_{p+1} = 2^{p+1}$, tj. $N_p = 2^p$.

5 bodova



5 bodova

1991. - opć. - 4. razr. - rješenja

4. Neka je oko jednog zajedničkog vrha naslagano m pravilnih n-terokuta. Kako je $\frac{n-2}{n}\pi$ kut pravilnog n-terokuta, mora biti $m\cdot\frac{n-2}{n}\pi=2\pi$, tj. $mn=2(m+n)$. Traže se rješenja ove jednadžbe u skupu N. Bar jedan od tih brojeva mora očito biti paran. Ako su oba broja parna, tj. $m=2\mu$, $n=2\nu$, tada slijedi $\mu\nu=\mu+\nu$, tj. $\mu=\frac{\nu}{\nu-1}$. Kako susjedni brojevi nemaju zajednički faktor, to je nužno $\nu-1=1$, tj. $\nu=2$, $\mu=2$, tj. $m=n=4$. Ako je $m=2\mu$, $n=2\nu+1$, tada slijedi $\mu=\frac{2\nu+1}{2\nu-1}$. Kako susjedni neparni brojevi nemaju zajednički faktor, to je nužno $2\nu-1=1$, tj. $\nu=1$, $\mu=3$, tj. $m=6$, $n=3$. Slično iz $m=2\mu+1$, $n=2\nu$ slijedi nužno $m=3$, $n=6$. Zato su jedina moguća "parketiranja" ona sa po 4 kvadrata, po 6 pravilnih trokuta i po 3 pravilna šesterokuta oko svakog zajedničkog vrha.

25 bodova