Pokret "Nauku mladima" Republike Hrvatske
Hrvatsko matematičko društvo

MATEMATIKA

Zadaci za republički susret učenika srednjih škola Republike Hrvatske 22. ožujka 1991.

2. razred

1. Neka je zadan trokut ABC. Odredi točku u unutrašnjosti zadanog trokuta, tako da produkt udaljenosti te točke od stranica trokuta bude maksimalan.

2. Nađi realna rješenja jednadžbe $[(x-1)^2] = [x]$. Za proizvoljni realni broj a s $[a]$ označavamo najveći cijeli broj koji nije veći od a.

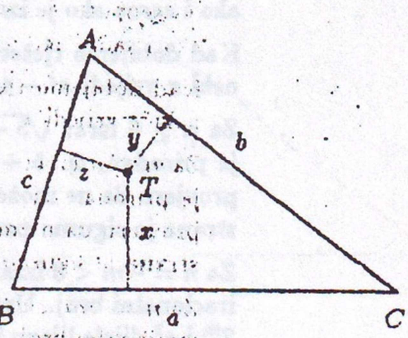
3. Kotač za rulet podijeljen je na 36 odsječaka. U te odsječke upisani su nekim redom brojevi od 1 do 36. Dokažite da postoje tri uzastopna odsječka, takva da je suma na njima napisanih brojeva barem 56.

4. Odredi sve racionalne brojeve x za koje je $\log_2(x^2 - 4x - 1)$ cijeli broj.

2. razred - rješenja

Zadaci za republički susret učenika srednjih škola Republike Hrvatske 22. ožujka 1991.

1. **Površina trokuta iznosi $P = ax/2 + by/2 + cz/2$. Produkt xyz je najveći kad je produkt $ax \cdot by \cdot cz$ najveći. Nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine daje**



$$ax \cdot by \cdot cz \le \left(\frac{ax + by + cz}{3}\right)^3 = \left(\frac{2P}{3}\right)^3,$$

te jednakost vrijedi ako i samo ako je $ax = by = cz = 2P/3$. Slijedi $x = 2P/3a = v_a/3$, gdje je v_a visina trokuta ABC iz vrha A. Slično je $y = v_b/3$, $z = v_c/3$.

Dokažimo sada da je točka koja se nalazi na dobivenim udaljenostima od stranica trokuta upravo težište : pravac na udaljenosti x od stranice a dijeli težišnicu trokuta iz vrha A u omjeru 1:2, dakle, siječe je u težištu. Slično radi i pravac na udaljenosti y od stranice b s težišnicom iz vrha B. Dakle, ta dva pravca se sijeku tamo gdje se sijeku i težišnice, tj. u težištu. U istu točku dolazi i pravac koji se nalazi na udaljenosti z od stranice c.

2. Ako je $[a] = [b]$, onda je $|a - b| < 1$.

Iz zadane jednadžbe slijedi $|(x-1)^2 - x| < 1$, tj. $-1 < x^2 - 3x + 1 < 1$, pa mora biti $x \in \langle 0,1\rangle \cup \langle 2,3\rangle$.

Prvi način. Ako je $x \in \langle 0,1\rangle$, onda je $-1 < x - 1 < 0$ i $0 < (x-1)^2 < 1$, odnosno $[(x-1)^2] = 0$. Kako je za $x \in \langle 0,1\rangle$ i $[x] = 0$, to zadanu jednadžbu zadavoljavaju svi $x \in \langle 0,1\rangle$.

Ako je $x \in \langle 2,3\rangle$, onda je $[x] = 2$, a $1 < (x-1)^2 < 4$. Zanimaju nas oni $x \in \langle 2,3\rangle$ za koje je $[(x-1)^2] = 2$, tj. $2 \le (x-1)^2 < 3$. Ovaj sistem nejednadžbi zadovoljavaju svi $x \in \langle 1 - \sqrt{3}, 1 - \sqrt{2}] \cup [1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{3}\rangle$, pa uz zadani uvjet na x dobivamo $x \in [1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{3}\rangle$.

Rješenje : $x \in \langle 0,1\rangle \cup [1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{3}\rangle$.

Drugi način. Za svaki $x \in \mathbf{R}$ postoji jedinstveni $\alpha \in [0,1\rangle$ takav da je $x = [x] + \alpha$.

Ako je $x \in \langle 0,1\rangle$, onda ga možemo pisati kao $x = 0 + \alpha$, gdje je $\alpha \in \langle 0,1\rangle$. Jednadžba prelazi u : $[(\alpha - 1)^2] = 0$, što je zadovoljeno za svaki $\alpha \in \langle 0,1\rangle$. Budući da je $x \in \langle 0,1\rangle$, dobivamo da je svaki x iz tog intervala rješenje.

Ako je $x \in \langle 2,3\rangle$, onda ga možemo pisati kao $x = 2 + \alpha$ gdje je $\alpha \in \langle 0,1\rangle$. Jednadžba prelazi u : $[\alpha^2 + 2\alpha + 1] = 2$; $1 < \alpha^2 + 2\alpha < 2$ Rješavanjem ovog sistema nejednadžbi dobivamo da je $\alpha \in \langle -1 - \sqrt{3}, -1 - \sqrt{2}] \cup [-1 + \sqrt{2}, -1 + \sqrt{3}\rangle$, što uz uvjet $\alpha \in [0,1\rangle$ daje $\alpha \in [-1 + \sqrt{2}, -1 + \sqrt{3}\rangle$. Dobivamo $x \in [1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{3}\rangle$.

3. Označimo s S_i sumu triju brojeva oko i-tog odsječka (tj. sumu brojeva na $(i-1)$-vom, i-tom i $(i+1)$-vom odsječku). Tada je

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_{36} = 3 \cdot (1 + 2 + \ldots + 36) = 1998.$$

jer svaki odsječak brojimo triput — jednom kao lijevi, jednom kao srednji, jednom kao desni. No, kad bi svaka od ovih suma bila manja ili jednaka 55, onda bi prethodni izraz mogao biti najviše jednak $55 \cdot 36 = 1980$. Kontradikcija.

4. Ako pretpostavimo da je $\log_2(x^2-4x-1)=n$ za neki $n \in Z$, onda je $x^2-4x-1-2^n=0$. Rješenja te jednadžbe možemo zapisati kao : $x_{1,2}=2\pm\sqrt{5+2^n}$. Ona će biti racionalna ako i samo ako je izraz $\sqrt{5+2^n}$ racionalan.

Kad dobijemo rješenja nećemo imati problema s definiranošću logaritma, jer, ako za neki x vrijedi $x^2-4x-1-2^n=0$, onda je za taj x i $x^2-4x-1>0$.

Za $n\geq 0$ izraz $\sqrt{5+2^n}$ može biti ili prirodan ili iracionalan. Pogledajmo za koje n je prirodan, tj. $5+2^n=p^2$. p mora biti neparan, $p=2p'+1$. Uvrštavanjem (uz provjeru da ne može biti $n=0$ niti $n=1$) dobivamo : $1+2^{n-2}=p'(p'+1)$. Desna strana je sigurno parna, pa mora biti $n=2$. Odgovarajući x-evi su $x_1=5$, $x_2=-1$.

Za $n=-m<0$ izraz $\sqrt{5+2^n}$ može biti ili "pravi" racionalni broj p/q, $M(p,q)=1$ ili iracionalni broj. Uvjet $5+1/2^m=p^2/q^2$ ekvivalentan je uvjetu $5\cdot 2^m q^2+q^2=2^m p^2$. 2^m i q^2 dijele lijevu i desnu stranu te jednadžbe, pa budući da su p i q relativno prosti, dobivamo $q^2=2^m$. Uvrštavanjem i kraćenjem s 2^m jednadžba prelazi u $5\cdot 2^m+1=p^2$. Lijeva strana je neparna, pa neparna mora biti i desna. Neka je zato $p=2p'+1$. Uvrštavanjem u jednadžbu i ponovnim kraćenjem (provjeri da ne može biti $m=1$) dobivamo $5\cdot 2^{m-2}=p'(p'+1)$. Budući da su prosti divizori lijeve strane 2 i 5, a jedan od dva faktora napisanih na desnoj strani mora biti neparan, to je $p'=5$, $p'+1=2^{m-2}$ ili $p'=2^{m-2}$, $p'+1=5$. Prvi sistem jednadžbi nema niti jedno rješenje medju cijelim brojevima, a drugi ima jedno i to za $m=4$. Slijedi $n=-4$, $x_3=-1/4$, $x_4=17/4$.

Rezultat : $x\in\{-1,5,-1/4,17/4\}$.