POKRET "NAUKA MLADIMA" REPUBLIKE HRVATSKE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

REPUBLIČKI SUSRET MLADIH MATEMATIČARA
22. ožujka 1991.g.
3. razred

1. Neka su a,b,c,A,B i C realni brojevi za koje vrijedi:

$$a\cdot\cos(A)+b\cdot\cos(B)+c\cdot\cos(C)=0$$

$$a\cdot\cos(A+1)+b\cdot\cos(B+1)+c\cdot\cos(C+1)=0.$$

Dokaži da za svaki realan broj x vrijedi:

$$a\cdot\cos(A+x)+b\cdot\cos(B+x)+c\cdot\cos(C+x)=0\ .$$

2. Neka je AB četvrtina luka kružnice sa središtem u točki O i C,D točke na tom luku takve da je $\varphi=\sphericalangle AOC$ i $\psi=\sphericalangle AOD$. Neka su E i F nožišta okomica iz C i D na $\overline{OB}$ i $\overline{OA}$ respektivno, zatim G sjecište pravca OC s okomicom iz D na OB, te H sjecište pravca OB i FG. Ako je H polovište dužine $\overline{OE}$, izračunaj omjer $\varphi:\psi$.

3. Neka je p prost broj, $n\in N$ i $z_k=\cos\left(\frac{2\cdot k\cdot\pi}{p}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{2\cdot k\cdot\pi}{p}\right)$, $k\in\{0,1,2,\dots,p-1\}$.
Izračunaj:

$$\sum_{k=0}^{p-1} z_k^n$$

4. Nađi sva realna rješenja sustava jednadžbi:

$$y^3-6\cdot x^2+12\cdot x-8=0$$

$$z^3-6\cdot y^2+12\cdot y-8=0$$

$$x^3-6\cdot z^2+12\cdot z-8=0\ .$$

RJEŠENJA:

ZADATAK 1. Primjenimo li adicione formule na svaki član u drugoj jednadžbi, dobijamo:

$$[a\cdot\cos(A)+b\cdot\cos(B)+c\cdot\cos(C)]\cdot\cos(1)-[a\cdot\sin(A)+b\cdot\sin(B)+c\cdot\sin(C)]\cdot\sin(1)=0$$

iz čega slijedi da je:

$$(*)\qquad a\cdot\sin(A)+b\cdot\sin(B)+c\cdot\sin(C)=0\ .$$

Primjenom adicionih formula na svaki član treće jednadžbe iz iskaza zadatka dobijamo:

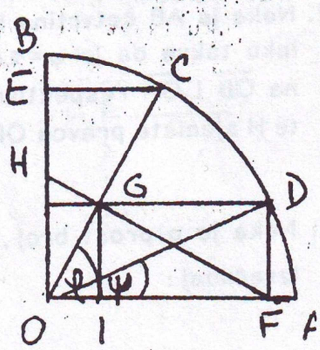
$$a\cdot\cos(A+x)+b\cdot\cos(B+x)+c\cdot\cos(C+x)=$$

$$[a\cdot\cos(A)+b\cdot\cos(B)+c\cdot\cos(C)]\cdot\cos(x)-[a\cdot\sin(A)+b\cdot\sin(B)+c\cdot\sin(C)]\cdot\sin(x)=0$$

zbog prve relacije iz iskaza zadatka i zbog (*). ■

ZADATAK 2. Neka je dana kružnica jedinična i neka je I nožište okomice iz G na OA.

Slika:



Imamo:

$$\frac{2\cdot d(O,F)}{d(O,E)}=\frac{d(O,F)}{d(O,H)}=\frac{d(I,F)}{d(G,I)}=\frac{d(O,F)-d(O,I)}{d(D,F)}$$

odakle zbog

$$d(O,F)=\cos(\psi),\ d(O,E)=\sin(\varphi),\ d(D,F)=\sin(\psi),$$

$$d(O,I)=d(G,I)\cdot ctg(\varphi)=d(D,F)\cdot ctg(\varphi)=\sin(\psi)\cdot ctg(\varphi)\ ,$$

slijedi da je

$$\frac{2\cdot\cos(\psi)}{\sin(\varphi)}=\frac{\cos(\psi)-\sin(\psi)\cdot ctg(\varphi)}{\sin(\psi)}$$

odnosno:

$$\sin(2\cdot\psi)=2\cdot\sin(\psi)\cdot\cos(\psi)=\sin(\varphi)\cdot\cos(\psi)-\sin(\psi)\cdot\cos(\varphi)=\sin(\varphi-\psi).$$

Zbog $2\cdot\psi<\pi$ i $\varphi-\psi<\pi$ slijedi:

ili je $2\cdot\psi=\varphi-\psi$, odnosno $3\cdot\psi=\varphi$.

ili je $\pi-2\cdot\psi=\varphi-\psi$, odnosno $\varphi+\psi=\pi$, što je nemoguće. ∎

ZADATAK 3. Očito je $z_k=z_1^k$, odnosno je

$$\sum_{k=0}^{p-1} z_k^n = \sum_{k=0}^{p-1}(z_1^k)^n = \sum_{k=0}^{p-1}(z_1^n)^k .$$

Ako je $p|n$ onda je svaki član jednak 1 pa je ukupna suma jednaka p.
Ako pak $p\nmid n$ (možemo zbog periodičnosti uzeti $n\in\{1,2,\ldots,p-1\}$) suma je jednaka:

$$\sum_{k=0}^{p-1} z_n^k .$$

Uočimo da je $\{z_n^k : k=0,1,\ldots,p-1\}\subseteq\{z_k : k=0,1,\ldots,p-1\}$. Ustvari vrijedi jednakost, jer iz $z_n^k=z_n^l$ uz $0\le k\le l\le p-1$ slijedi $z_n^{l-k}=1$ odnosno $z_1^{(l-k)n}=1$. Budući da $p\nmid n$ to mora biti $l-k=0$, odnosno $l=k$, pa prema tome je:

$$\sum_{k=0}^{p-1} z_k^n = \sum_{k=0}^{p-1} z_n^k = \sum_{k=0}^{p-1} z_k = 0$$

jer su z_k sva rješenja jednadžbe $z^p-1=0$.
Dakle

$$\sum_{k=0}^{p-1} z_k^n = \begin{cases} p \; ; \text{ ako } p|n \\ 0 \; ; \text{ ako } p\nmid n \end{cases} . \blacksquare$$

ZADATAK 4. Kako je

$$f(t)=3\cdot t^2-6\cdot t+4>0 \text{ , } \forall t\in\mathbb{R}$$

slijedi da je

$$x_0>0 \text{ , } y_0>0 \text{ , } z_0>0 .$$

Zbrajanjem zadanih jednadžbi dobija se :

$$(**) \qquad (x_0-2)^3+(y_0-2)^3+(z_0-2)^3=0 .$$

Moguća su sljedeća dva slučaja:

1) $x_0 \geq 2$; iz posljednje jednadžbe slijedi da je $6 \cdot z_0^2 - 12 \cdot z_0 \geq 0$. Kako je $z_0 > 0$ slijedi da je $z_0 \geq 2$. Iz druge jednadžbe se dobiva da je $y_0 \geq 2$. Sad zajedno to sa (**) daje:

$$x_0 = y_0 = z_0 = 2.$$

2) $0 < x_0 < 2$: analogno se dobiva da je

$$x_0 < 2, \ y_0 < 2, \ z_0 < 2,$$

no tada nije zadovoljena jednakost (**).

Dakle, sustav ima samo jedno rješenje :

$$x_0 = y_0 = z_0 = 2. \blacksquare$$

0