Pokret "Nauku mladima" Republike Hrvatske
Hrvatsko matematičko društvo

MATEMATIKA

Zadaci za republički susret učenika srednjih škola Republike Hrvatske
Dubrovnik, 22. ožujka 1991.

1. razred

1. (25) Dokažite da je $x^{6n+1} + \frac{1}{x^{6n+1}} = 1$ za svaki prirodan broj n, ako je $x + \frac{1}{x} = 1$.

2. (25) Na stranici $\overline{AC}$ trokuta ABC dana je točka T tako da je $|\overline{CT}| \leq \frac{1}{3}|\overline{AC}|$. Konstruirajte dva pravca točkom T koji zadani trokut dijele na tri dijela jednakih površina.

3. (25) Ako prirodni broj n nije djeljiv sa 4, dokažite da je $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ djeljiv s 5.

4. (25) Neka je f realna funkcija takva da je $f(1) = 1$ i za sve realne brojeve x, y

$$f(x) + f(y) = f(x+y) - xy - 1.$$

Za koje je sve prirodne brojeve n, $f(n) = n$?

Pokret "Nauku mladima" Republike Hrvatske
Hrvatsko matematičko društvo

MATEMATIKA

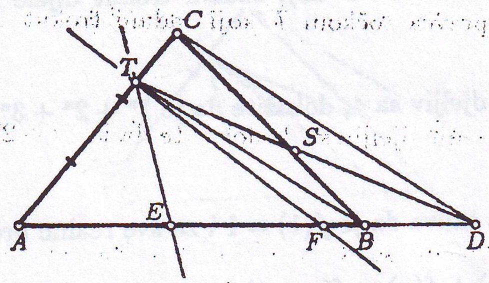
Zadaci za republički susret učenika srednjih škola Republike Hrvatske
Dubrovnik, 22. ožujka 1991.

1. razred - rješenja

1. (25) Iz $x + \frac{1}{x} = 1$ slijedi $x^2 + 1 = x$, tj $x^2 - x = -1$ i $x^3 = x^2 - x$, pa je zato i $x^3 = -1$. Dalje je $x^6 = 1$, $x^{6n} = 1$, $x^{6n+1} = x$, pa je $x^{6n+1} + \frac{1}{x^{6n+1}} = x + \frac{1}{x} = 1$.

$x^{6n} \cdot x^1$

2. (25) Neka je $D \in \overline{AB}$ i $\overline{CD} \parallel \overline{TB}$. Tada je $DCTB$ trapez, pa vrijedi $P_{\triangle TBD} = P_{\triangle TBC}$ (ista baza i jednake visine), a odatle, uz oznaku $\overline{TD} \cap \overline{BC} = S$, $P_{\triangle BDS} = P_{\triangle TSC}$ (jer je $\triangle ABS = \triangle ABD \cap \triangle ABC$) i $P_{\triangle ADT} = P_{\triangle ABC}$. Sada uzmemo točke $E, F \in \overline{AB}$ za koje je $|\overline{AE}| = |\overline{EF}| = |\overline{FD}|$. Pravci TE i TF su traženi pravci (jer je $P_{\triangle AET} = P_{\triangle EFT} = P_{\triangle FDT}$ i $P_{\triangle FDT} = P_{FBCT}$).



3. (25)
   1. n je neparan (pa nije djeljiv sa 4) $\Rightarrow$
   $1^n + 2^n + 3^n + 4^n \equiv 1^n + 2^n + (-2)^n + (-1)^n = 1^n + 2^n - 2^n - 1^n = 0(\text{mod}5)$
   2. $n = 2k$ paran $\Rightarrow$
   $1^n + 2^n + 3^n + 4^n \equiv 1^n + 2^n + (-2)^n + (-1)^n = 2(1^{2k} + 2^{2k}) = 2(1 + 4^k) = 2(1 + (-1)^k) \equiv A(\text{mod}5)$, gdje je $A = 0$, ako je k neparan, tj. n nije djeljiv sa 4 i $A = 4$, ako je k paran, tj. n je djeljiv sa 4.

4. (25) Supstitucijom $x = n$ i $y = 1$ dobijamo $f(n) + f(1) = f(n+1) - n - 1$, odnosno $f(n+1) = (n+1) + 1 + f(n) > f(n)$, tj. f je rastuća funkcija. Neka je n_0 najmanji prirodni broj n za koji je $f(n) = n$. Tada je $f(n_0+1) = (n_0+1)+1+n_0 > n_0+1$. Dokažimo da je tada za sve prirodne brojeve $n \geq n_0$, $f(n) > n$. Bazu indukcije imamo već dokazanu. Pretpostavimo da je $f(n_0+k) > n_0+k$ za prirodni k. Treba dokazati da je tada i $f(n_0+k+1) > n_0+k+1$.

$$f(n_0 + k + 1) = n_0 + k + 1 + 1 + f(n_0 + k) > n_0 + k + 2 + n_0 + k > n_0 + k + 1.$$

Prema tome, skup svih prirodnih n za koje je $f(n) = n$ je $\{1\}$.