POKRET "NAUKA MLADIMA" REPUBLIKE HRVATSKE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

REPUBLIČKI SUSRET MLADIH MATEMATIČARA

22. ožujka 1991.g.

4. razred

1. Neka je $a_1=\frac{1}{2}$, $a_n=\frac{2\cdot n-3}{2\cdot n}\cdot a_{n-1}$, $n\geq 2$. Dokaži da je:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k < 1 \quad . \quad \forall n\in N.$$

2. Dokaži da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva n , takvih da su

$$2\cdot n^2+3 \quad \text{i} \quad n^2+n+1 \quad \text{relativno prosti} .$$

3. Kocka duljine stranice a je presječena ravninom koja sadrži jednu od prostornih dijagonala kocke. Odredi najmanji mogući iznos zajedničke površine presjeka kocke i ravnine. Detaljno obrazložiti!

4. Neka šiljastokutni trokut ABC ima kuteve α, β i γ. Dokaži nejednakost:

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\gamma) + tg(\alpha) + tg(\beta) + tg(\gamma) > 2\cdot\pi .$$

RJEŠENJA:

ZADATAK 1. Zadan je niz a_n sa :

$$a_n = \left(\frac{2\cdot n-3}{2\cdot n}\right)\cdot a_{n-1} \quad , n\geq 2 .$$

Odatle slijedi:

$$3\cdot a_{n-1} = 2\cdot n\cdot (a_{n-1} - a_n)$$

$$3\cdot a_{n-2} = 2\cdot (n-1)\cdot (a_{n-2} - a_{n-1})$$

$$3\cdot a_{n-3} = 2\cdot (n-2)\cdot (a_{n-3} - a_{n-2})$$

$$\vdots$$

$$3\cdot a_3 = 2\cdot 4\cdot (a_3 - a_4)$$

$$3\cdot a_2 = 2\cdot 3\cdot (a_2 - a_3)$$

$$3\cdot a_1 = 2\cdot 2\cdot (a_1 - a_2)$$

Kako je :

$$3\cdot \sum_{k=1}^{n-1} a_k = -2\cdot n\cdot a_n + 2\cdot (a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2) + 4\cdot a_1 = -2\cdot n\cdot a_n + 2\cdot a_1 + 2\cdot \sum_{k=1}^{n-1} a_k$$

to slijedi da je :

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k = 2\cdot a_1 - 2\cdot n\cdot a_n = 2\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot n\cdot a_n < 1 \quad . \blacksquare$$

ZADATAK 2. Označimo sa d_n = najveća zajednička mjera$(2\cdot n^2+3, n^2+n+1)$.
Tada $d_n \mid (2\cdot n^2+3)$ i $d_n \mid (n^2+n+1)$ odakle slijedi da:

$$d_n \mid (2\cdot n^2+2\cdot n+2) \quad \text{i} \quad d_n \mid [(2\cdot n^2+2\cdot n+2)-(2\cdot n^2+3)]$$

odnosno:

(*) $$d_n \mid (2\cdot n-1) \quad .$$

Kako je $d_n \mid (2\cdot n^2-n)$ i $d_n \mid (2\cdot n^2+3)$,imamo da :

$$d_n \mid (n+3) \quad \text{odnosno} \quad d_n \mid (2\cdot n+6) .$$

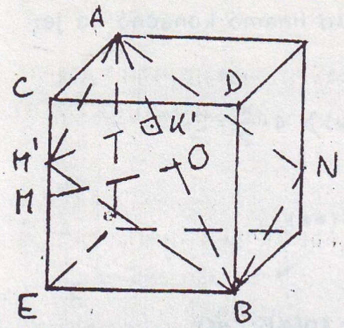
Iskoristimo li sad (*) dobijamo :

$$d_n \mid 7 \quad \text{odnosno } d_n = 1 \quad \text{ili } d_n = 7.$$

Sada treba vidjeti da je za beskonačno n, $d_n=1$.
Dovoljno je, na primjer, uočiti da za $n=7\cdot k$, $2\cdot n^2+3$ nije djeljivo sa 7. Sada zaključujemo da za $n=7\cdot k$ vrijedi $d_n=1$, što smo i trebali. ■

ZADATAK 3.

Slika:



Neka je AB prostorna dijagonala kocke i M´ varijabilna točka koja definira paralelogram AM´BN koji predstavlja presjek kocke i ravnine. Neka je K´ nožište okomice iz M´ na pravac AB . Površina $P_{AM'BN} = d(M',K')\cdot d(A,B)$ je minimalna onda, kad je $d(M',K')$ minimalno a to je kad $d(M',K')$ postane udaljenost mimosmjernih pravaca AB i CE tj. za $d(M',K') = d(M,O)$ gdje su M i O polovišta od CE i AB . Naime, MO je okomita na AB (jer je ΔAMB jednakokračan), i MO je okomita na CE (jer je ΔCOE jednakokračan).

Minimalna površina je:

$$d(A,B)\cdot d(M,O) = a\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{a\cdot\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2\cdot\sqrt{6}}{2} \ . \ ■$$

ZADATAK 4. Dokažimo prvo da za $0<x<\frac{\pi}{2}$ vrijedi :

(**) $$\sin(x)+\operatorname{tg}(x)>2\cdot x \ .$$

Iz adicionih formula:

$$\sin(x)=\frac{2\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \text{i} \quad \operatorname{tg}(x)=\frac{2\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

slijedi da je:

$$\sin(x)+\operatorname{tg}(x)=\frac{4\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\operatorname{tg}^4\left(\frac{x}{2}\right)} \ .$$

Kako za $0<\frac{x}{2}<\frac{\pi}{4}$ vrijedi $0<\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)<1$,to je $0<1-\operatorname{tg}^4\left(\frac{x}{2}\right)<1$ i slijedi da je:

$$\sin x + \operatorname{tg} x = \frac{4\cdot \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\operatorname{tg}^4\left(\frac{x}{2}\right)} > 4\cdot \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right).$$

Kako za $0 < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$ vrijedi $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) > \frac{x}{2}$, to imamo konačno da je:

$$\sin(x) + \operatorname{tg}(x) > 4\cdot\frac{x}{2} = 2\cdot x$$

odnosno time smo pokazali da vrijedi (**).

Sada iz (**) slijedi:

$$\sin(\alpha) + \operatorname{tg}(\alpha) > 2\cdot\alpha$$

$$\sin(\beta) + \operatorname{tg}(\beta) > 2\cdot\beta$$

$$\sin(\gamma) + \operatorname{tg}(\gamma) > 2\cdot\gamma\ .$$

Zbrajanjem prethodnih jednadžbi, dobijamo:

$$\sin(\alpha)+\sin(\beta)+\sin(\gamma)+\operatorname{tg}(\alpha)+\operatorname{tg}(\beta)+\operatorname{tg}(\gamma) > 2\cdot(\alpha+\beta+\gamma) = 2\cdot\pi$$

što je i trebalo dokazati. ■