

**DRŽAVNO NATJECANJE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA
REPUBLIKE HRVATSKE
1992. godina**

VII RAZRED

1. Broj a jednak je 92% broja b . Zbroj brojeva b i 700 veći je od broja a za 9% zbroja brojeva b i 700. Koliki su brojevi a i b ?
2. Koliko ima različitih troznamenkastih brojeva djeljivih s tri, koji se mogu napisati pomoću znamenki 1, 2, 3, 4, 5, pri čemu se znamenke smiju ponavljati?
3. Odredi sve parove cijelih brojeva x i y čiji je umnožak pet puta veći od njihovog zbroja.
4. U jednakokračnom pravokutnom trokutu upisan je pravokutnik, tako da dva vrha pripadaju hipotenuzi, a druga dva katetama. Koliki je opseg pravokutnika, ako se njegove stranice odnose kao $5 : 2$, a duljina hipotenuze je 45 cm?
5. Duljina dužine koja spaja polovišta osnovica trapeza jednaka je polurazlici duljina osnovica trapeza. Odredi zbroj kutova uz veću osnovicu.

**DRŽAVNO NATJECANJE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA
REPUBLIKE HRVATSKE
1992. godina**

VIII RAZRED

1. Riješi jednadžbu po x i dobiveni izraz pojednostavi:

$$\frac{25 - a^2 - 2ab - b^2}{a^2 + ab + 5b - 25} = \frac{5 + a + b}{x}.$$

2. Dva traktora trebaju preorati jednu njivu. Najprije je jedan traktor sam orao njivu sedam sati, a potom je drugi traktor sam orao njivu četiri sata, pa su tako oba traktora ukupno preorala $\frac{5}{9}$ cijele njive. Sutradan su oba traktora nastavila orati njivu, tako da su zajedno orali tri sata, pri čemu su drugog dana preorali $\frac{7}{24}$ njive. Za koje bi vrijeme cijelu njivu preorao svaki traktor posebno?

3. U trokutu ABC duljine stranica a , b , i c povezuje jednakost $a + b = 2c$, $a > b$. Iz vrha C povučene su visina \overline{CD} i težišnica \overline{CE} . Dokaži da je $|DE| = a - b$.

4. Posuda je napunjena stopostotnim alkoholom. Odlijemo dvije litre alkohola i dolijemo isto toliko destilirane vode. Ovaj postupak ponovimo još jednom, tj. odlijemo dvije litre mješavine i dolijemo dvije litre destilirane vode. Nakon toga u posudi će biti 36% alkohola. Koliko litara sadrži ova posuda?

5. Dan je trokut ABC i točka D na stranici \overline{BC} , tako da je $|DC| = 2|BD|$. Odredi kutove $\sphericalangle BAC$ i $\sphericalangle ACB$ ako je $\sphericalangle ABC = 45^\circ$ i $\sphericalangle ADC = 60^\circ$.

Rješenja zadataka

DRŽAVNO NATJECANJE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA RH

1992. godina

VII RAZRED

1. Kako je $a = 0.92b$ i $b + 700 = a + 0.09(b + 700)$, te vrijedi $b + 700 = 0.92a + 0.09(b + 700)$. Rješenje ove jednadžbe je $b = 63\,700$, pa je $a = 58\,604$.
2. S tri jednake znamenke ima pet brojeva. Brojeva s dvije jednake znamenke ima 12, po tri broja od svake trojke 1,1,4-1,4,4-2,2,5-2,5,5 znamenki. S tri različite znamenke su ove trojke 1,2,3-1,3,5-2,3,4-3,4,5. Od svake trojke moguće je napisati šest brojeva tj. 24 broja. Prema tome, ukupno traženih brojeva ima $5 + 12 + 24$, tj. 41.
3. Očito vrijedi $xy = 5(x + y)$, $x, y \in \mathbb{Z}$, ili $y = \frac{5x}{x-5}$, $y = 5 + \frac{25}{x-5}$. Samo ako je $x - 5$ djelitelj od 25, tj. $x - 5 = \pm 1, \pm 5, \pm 25$, broj y imaće vrijednost nekog cijelog broja. Rješavanjem ovih šest jednadžbi dobivamo $x \in \{6, 4, 10, 0, 30, -20\}$, odnosno odgovarajuće vrijednosti za $y \in \{30, -20, 10, 0, 6, 4\}$. Prema tome, traženi parovi cijelih brojeva su: $(6, 30), (4, -20), (10, 10), (0, 0), (30, 6), (-20, 4)$.

4. Trokuti AML i BKN jednakokračni su i pravokutni, pa je

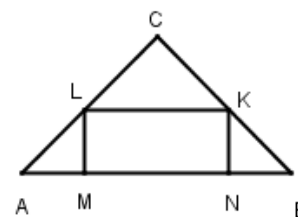
$$|AM| = |ML| \text{ i } |BN| = |NK|.$$

Neka je $|MN| = x$. Kako je $|ML| = |NL|$ to je i $|AM| = |BN| = y$. Iz

$|MN| : |NK| = 5 : 2$ slijedi da je $x : y = 5 : 2$. Uvođenjem parametra

k dobivamo $x = 5k$ i $y = 2k$. Kako je $|AB| = 45$, to je $2y + x = 45$ ili

$4k + 5k = 45$, tj. $k = 5$, pa je $x = |MN| = 25$ i $y = |NK| = 10$. Opseg pravokutnika je 70 cm.



Drugo rješenje je $|MN| = 7.5$ i $|NK| = 18.75$, pa je opseg 52.5 cm.

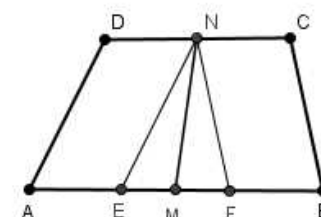
5. Neka su točke M i N polovišta osnovica trapeza ABCD i

$|AB| = a$, $|CD| = c$. Iz točke N nacrtamo paralele s krakovima

trapeza, pa su AEND i BCNF paralelogrami, pri čemu je

$|AE| = |DN| = \frac{c}{2}$. Kako je $|AM| = \frac{a}{2}$, zaključujemo da je

$|ME| = \frac{a}{2} - \frac{c}{2} = \frac{a-c}{2} = |MN|$, pa je trokut EMN jednakokračan.



Analogno je i $|MF| = |MN|$. Neka je $\sphericalangle BAD = \alpha$ i $\sphericalangle ABC = \beta$, to je

$\sphericalangle MEN = \sphericalangle BAD = \alpha$ i $\sphericalangle MFN = \sphericalangle ABC = \beta$, pa u trokutu EFN vrijedi $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$, tj.

$\alpha + \beta = 90^\circ$.

Rješenja zadataka

DRŽAVNO NATJECANJE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA RH
1992. godina
VIII RAZRED

1. Ako na lijevoj strani zadane jednadžbe rastavimo na faktore brojnik i nazivnik, dobit ćemo $\frac{(5+a+b) \cdot (5-a-b)}{(a+5) \cdot (a+b-5)} = \frac{5+a+b}{x}$. Prema tome, jednadžba ima smisla ako je i $a \neq -5$ i $a+b \neq -5$. U tom slučaju rješenje glasi $x = -a - 5$.

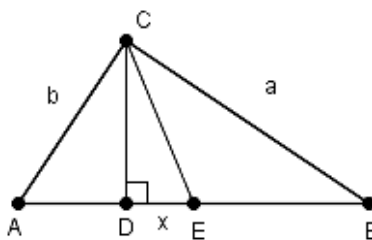
2. Neka su x i y broj sati za koji bi prvi, odnosno drugi traktor sami preorali cijelu njivu. Sada možemo sastaviti jednadžbe: $\frac{7}{x} + \frac{4}{y} = \frac{5}{9}$ za prvi dan i $\frac{3}{x} + \frac{3}{y} = \frac{7}{24}$ za drugi dan.

Uvođenjem novih nepoznanica $\frac{1}{x} = u$ i $\frac{1}{y} = v$ dobivamo ovaj sustav jednadžbi: $7u + 4v = \frac{5}{9}$, $3u + 3v = \frac{7}{24}$. Rješenje sustava je $u = \frac{1}{18}$, $v = \frac{1}{24}$, pa je $x = 18$ i $y = 24$. Prema tome, prvi traktor cijelu bi njivu preorao za 18 sati, a drugi za 24 sata.

$$3. \quad b^2 - \left(\frac{c}{2} - x\right)^2 = a^2 - \left(\frac{c}{2} + x\right)^2$$

$$2cx = a^2 - b^2$$

$$x = a - b$$



4. Neka je x veličina posude izražena u litrama. Nakon prvog odlijevanja i dolijevanja u posudi je ostalo $x - 2$ litre čistog alkohola, a to je $\frac{x-2}{x}$ posto. Nakon drugog odlijevanja i dolijevanja količina čistog alkohola smanjila se za $\frac{x-2}{x} \cdot 2$ litre, pa vrijedi

$x - 2 - \frac{2(x-2)}{x} = 0.36x$ ili nakon sređivanja $(x-2)^2 = 0.36x^2$. Nakon korjenovanja jednadžbe ($x > 2$) dobivamo $x - 2 = 0.6x$, pa je $x = 5$. Posuda sadrži 5 litara.

5. Neka je točka E nožište okomice iz vrha C na \overline{AD} . Kako je $\sphericalangle ADC = 60^\circ$ to je $\sphericalangle DCE = 30^\circ$, a trokut CED je polovina jednakostraničnog trokuta, pa je $|CD| = 2|DE|$ iz čega slijedi da je $|DE| = |BD|$, a to znači da je trokut BDE jednakokrakan, pa je $\sphericalangle BED = \sphericalangle DBE = 30^\circ$. Sad je očito i trokut BCE jednakokrakan, tj. $|BE| = |CE|$. Kut $\sphericalangle BAD = 15^\circ$ i $\sphericalangle ABE = 15^\circ$, pa je trokut ABE jednakokrakan, tj. $|BE| = |AE|$, odnosno $|AE| = |CE|$. To znači da je trokut ACE jednakokrakan, a i pravokutan, pa je $\sphericalangle CAE = \sphericalangle ACE = 45^\circ$. Prema tome, $\sphericalangle BAC = 60^\circ$, a $\sphericalangle ACB = 75^\circ$.

