OPĆINSKO NATJECANJE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA
REPUBLIKE HRVATSKE
1992. godina

VIII RAZRED

1. Riješi jednadžbu: $\left(2\frac{3}{4}-3\frac{2}{3}\right):x=\left(\frac{11}{4}-\frac{11}{3}\right):\frac{3}{2}$

2. Izračunaj površinu kvadrata čije dvije stranice leže na pravcima x + y – 5 = 0 i
x + y + 5 = 0.

3. Odredi sve troznamenkaste prirodne brojeve koji su 12 puta veći od zbroja svojih znamenki.

4. Dan je pravokutnik ABCD kojemu je duljina stranice $\overline{AB}$ 20 cm. Duljina okomice iz vrha B na dijagonalu $\overline{AC}$ je 12 cm. Odredi opseg i površinu pravokutnika.

5. Neka je x pozitivan realan broj za kojeg vrijedi $x^2+\frac{1}{x^2}=\frac{17}{4}$.

a) Izračunaj $x+\frac{1}{x}$ i $x-\frac{1}{x}$

b) Izračunaj vrijednost realnog broja x.

Rješenja zadataka

OPĆINSKO NATJECANJE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA REPUBLIKE HRVATSKE
1992. godina

VIII RAZRED

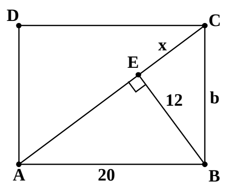
1. x = 3/2

2. Ako zadane jednadžbe pravaca zapišemo u eksplicitnom obliku, tj. y=-x+5 i y=-x-5, onda je očito da su ti pravci paralelni. Kako prvi pravac siječe os x u točki A(5,0), a os y u točki B(0,5), a drugi pravac siječe os x u točki C(-5,0), a os y u točki D(0,-5), zaključuje se da su u četverokutu ABCD dijagonale okomite i jednake duljine, tj. $|AC|=|BD|=10$, a to znači da je četverokut ABCD kvadrat.

Stoga je on jedan od traženih kvadrata (koji su određeni ovim pravcima). Njegova je površina $\frac{10^2}{2}$, tj. P(ABCD)=50. (napravi si skicu)

3. Neka troznamenskati broj ima oblik $\overline{abc}$. Tada vrijedi 100a+10b+c=12(a+b+c), ili nakon sređivanja 88a-11c=2b. Kako je lijeva strana posljednje jednakosti djeljiva sa 11, to je nužno i desna strana djeljiva s 11, a to je moguće samo ako je b=0. Slijedi da je 88a-11c=0, tj. 88a=11c, odnosno 8a=c, pa je očito a=1 i c=8. Dakle, traženi broj je 108.

4. Neka je $|BE|=12cm$, $|BC|=b$ i $|CE|=x$. Primjenom Pitagorinog poučka na trokut ABE možemo lako odrediti duljinu dužine $|AE|=16cm$. Dalje, primjenom Pitagorinog poučka na trokut ABC, odnosno BCE dobivamo ove jednakosti $b^2=(16+x)^2-20^2$ i $b^2=12^2+x^2$. Kako su lijeve strane ovih jednakosti jednake, slijedi da su i desne strane jednake, tj. $(16+x)^2-20^2=12^2+x^2$, odnosno nakon sređivanja dobivamo rješenje jednadžbe je x=9 . Sad lako odredimo b=15 cm.Prema tome, opseg pravokutnika iznosi 70 cm, a površina 300 cm^2 .



5. a) Neka je $x+\frac{1}{x}=n$. Nakon kvadriranja ove jednakosti dobiva se $x^2+2+\frac{1}{x^2}=n^2$, odnosno $\frac{17}{4}+2=n^2$, ili $n^2=\frac{25}{4}$, pa je $n=\frac{5}{2}$ ili $n=-\frac{5}{2}$, tj. $x+\frac{1}{x}=-\frac{5}{2}$ ili $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$.

Neka je $x-\frac{1}{x}=k$. Nakon kvadriranja se dobiva $x^2-2+\frac{1}{x^2}=k^2$, odnosno $\frac{17}{4}-2=k^2$, ili $k^2=\frac{9}{4}$, pa je $k=\frac{3}{2}$ ili $k=-\frac{3}{2}$, tj. $x-\frac{1}{x}=\frac{3}{2}$ ili $x-\frac{1}{x}=-\frac{3}{2}$.

b) Rješavanjem četiri sustava jednadžbi:

$$\begin{array}{cccc} x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2} & x+\frac{1}{x}=-\frac{5}{2} & x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2} & x+\frac{1}{x}=-\frac{5}{2} \\ x+\frac{1}{x}=\frac{3}{2} & x+\frac{1}{x}=-\frac{3}{2} & x+\frac{1}{x}=-\frac{3}{2} & x+\frac{1}{x}=\frac{3}{2} \end{array}$$

dobivaju se četiri moguća rješenja: x=2, x=-2, x=$\frac{1}{2}$, x=-$\frac{1}{2}$.