REPUBLIKA HRVATSKA
MINISTARSTVO PROSVJETE, KULTURE I ŠPORTA
Zavod za školstvo

NARODNA TEHNIKA HRVATSKE
Pokret "ZNANOST MLADIMA"

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

# MATEMATIKA

Zadaci za republički susret učenika srednjih škola
PULA, 2. svibnja 1992.

1. razred

1. Naći najmanju vrijednost zbroja
$$S = \tfrac{xy}{z} + \tfrac{yz}{x} + \tfrac{zx}{y}$$
pri čemu su $x, y, z$ pozitivni realni brojevi takvi da je $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Za koje brojeve se ona dostiže?

2. Površina pravokutnog trokuta jednaka je umnošku udaljenosti krajeva hipotenuze od njezinog dirališta s upisanom kružnicom. Dokaži!

3. Da li jednadžba $y^2 = x^2 + 1990$ ima cjelobrojno rješenje?

4. Riješi sustav jednadžbi
$$|x-3| + |y+2| = 1$$
$$|x+1| - |y-1| = 2, \quad x, y \in \mathbf{R}$$
i skiciraj skup rješenja u koordinatnoj ravnini.

Rješenja za prvi razred

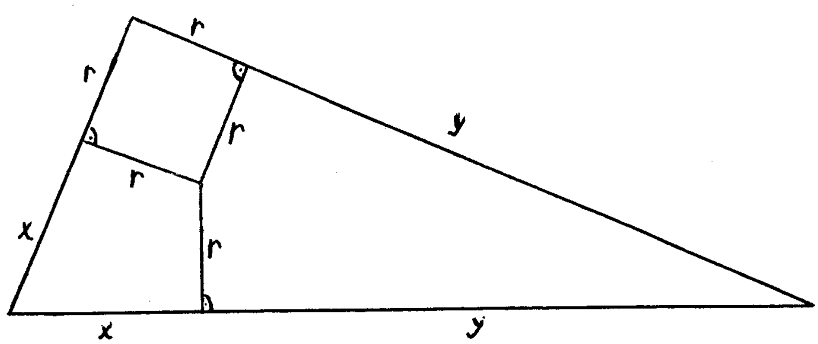
1. $S^2 = (\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y})^2 = \frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{z^2x^2}{y^2} + 2(x^2+y^2+z^2) =$
   $\frac{1}{2}(\frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{y^2z^2}{x^2}) + \frac{1}{2}(\frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{z^2x^2}{y^2}) + \frac{1}{2}(\frac{z^2x^2}{y^2} + \frac{x^2y^2}{z^2}) +$
   $2(x^2+y^2+z^2) \geq \frac{1}{2}\cdot 2y^2 + \frac{1}{2}\cdot 2z^2 + \frac{1}{2}\cdot 2x^2 + 2(x^2+y^2+z^2) =$
   $3(x^2+y^2+z^2) = 3.$

   Znači da je $S \geq \sqrt{3}$. Jednakost vrijedi ako i samo sko je $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

2. Iz $P = r(r+x+y)$ i

   $2P = (r+x)(r+y) = r(r+x+y) + xy = P + xy$

   dobivamo $P = xy$.




3. Pretpostavimo da postoji rješenje ove jednadžbe. Pošto je $1990 = 2\cdot 5\cdot 199$ imamo $(y-x)(y+x) = 2\cdot 5\cdot 199$. Zato je točno jedan od brojeva $(y-x), (y+x)$ paran. Međutim, zbog $y + x = (y-x) + 2x$ brojevi $(y-x)$ i $(y+x)$ su iste parnosti, što je kontradikcija. Zato ova jednadžba nema cjelobrojnih rješenja.

4. *Prvo rješenje:*

Promatrat ćemo tri slučaja od kojih svaki ima tri mogućnosti.

$1^o$. $x \in (-\infty, -1] \Rightarrow -x+3+|y+2| = 1, \quad -x-1-|y-1| = 2,$
$\Rightarrow$ odakle se oduzimanjem dobiva $|y+2| + |y-1| = -5.$

$1^{oo}$. $y \in (-\infty, -2] \Rightarrow -y-2-y+1 = -5 \Rightarrow y = 2,$
što nije rješenje.

$2^{oo}.y \in [-2, 1]$. Nema rješenja.

$3^{oo}.y \in [1, \infty)$. Nema rješenja.

$2^o.x \in [-1, 3] \Rightarrow -x+3+|y+2| = 1, \quad x+1-|y-1| = 2$ odakle se zbrajanjem dobiva $|y+2| - |y-1| = -1.$

$1^{oo}.y \in [-\infty, -2]$. Nema rješenja.

$2^{oo}.y \in [-2, 1]$. Rješenje je $(x, y) = (3, -1)$.

$3^{oo}.y \in [1, \infty)$. Nema rješenja.

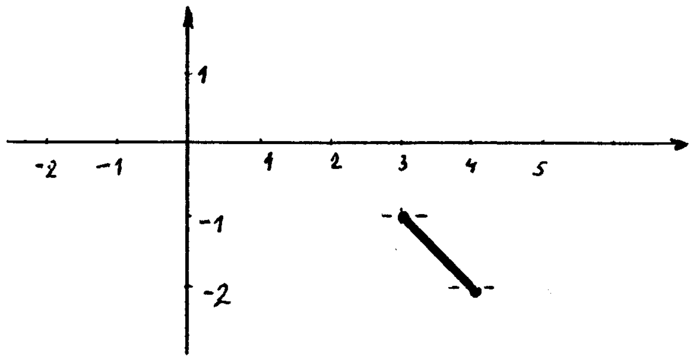
$3^o.x \in [3, \infty). \Rightarrow x-3+|y+2| = 1, \quad x+1-|y-1| = 2,$ odakle se oduzimanjem dobiva $|y+2| + |y-1| = 3.$

$1^{oo}.y \in (-\infty, -2]$. Rješenje je $(x, y) = (4, -2)$.

$2^{oo}.y \in [-2, 1]. \Rightarrow y \in [-2, 1], y = -x+2$. Zadovoljava dio pravca $y = -x+2$ unutar područja $[3, \infty) \times [-2, 1]$.

$3^{oo}.y \in [1, \infty)$. Nema rješenja.

Na slici je skiciran skup rješenja. Rješenje danog sistema jednadžbi su točke dužine čiji su krajevi točke $(3, -1)$ i $(4, -2)$, tj. skup točaka $\{(x, y) | y = -x+2, 3 \le x \le 4\}$.



*Drugo rješenje:*

Prikažemo u koordinatnoj ravnini skup svih točaka koje zadovoljavaju prvu i drugu jednadžbu i nađemo njihov presjek. Jednostavnosti radi promatrajmo jednadžbe $|x| + |y| = 1$ i $|x| - |y| = 2$. Skup točaka koje odgovaraju prvoj jednadžbi je kvadrat s vrhovima u točkama $(1,1), (-1,1), (-1,-1), (1,-1)$. Skup točaka koje odgovaraju drugoj jednadžbi u $I$ kvadrantu je dio pravca $x - y = 2$. U ostalim kvadrantima skupovi točaka su simetrične slike ovog skupa u odnosu na koordinatne osi. Skupovi točaka koji odgovaraju prvoj i drugoj polaznoj jednadžbi dobivaju se pomicanjem ovih skupova za $(3,-2)$ i $(-1,1)$.

Nakon pomicanja u presjeku se dobije dužina s krajevima u točkama $(3,-1)$ i $(4,-2)$, što je traženi skup rješenja.