REPUBLIKA HRVATSKA
MINISTARSTVO PROSVJETE, KULTURE I ŠPORTA
Zavod za školstvo

NARODNA TEHNIKA HRVATSKE
Pokret "ZNANOST MLADIMA"

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za republički susret učenika srednjih škola
PULA, 2. svibnja 1992.

2. razred

1. Kolike su duljine kateta pravokutnog trokuta kojemu je c duljina hipotenuze, a ρ polumjer upisane kružnice.

2. Neka su z_1, z_2, z_3, z_4 kompleksni brojevi redom u I, II, III, IV kvadrantu kompleksne ravnine i $\alpha_i = |z_i - z_{i+1}| - |z_i + z_{i+1}|$, $z_5 = z_1$, $i = 1, 2, 3, 4$. Dokaži da je bar jedan od brojeva $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ nenegativan.

3. Za koje vrijednosti realnog broja a jednadžba
$$2x^2 + x + log_a(a-2) = 0$$
ima realna rješenja po apsolutnoj vrijednosti većoj od $\frac{1}{2}$.

4. U ravnini su dane 1992 točke od kojih nikoje tri ne leže na istom pravcu. Dokaži da postoji 498 četverokuta kojima su te točke vrhovi takvi da se nikoja dva na sijeku.

Rješenja za drugi razred

1. Neka su katete duljina x i y.

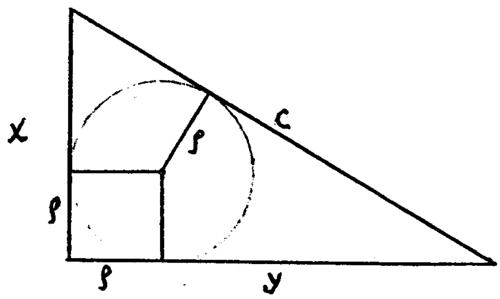
   $c^2 = x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = (2\rho + c)^2 - 2xy$

   $\Rightarrow \quad xy = 2\rho(c+\rho), \quad x + y = c + 2\rho.$

   x i y su rješenja kvadratne jednadžbe $t^2 - (c+2\rho)t + 2\rho(c+\rho) = 0$.

   Diskriminanta ove kvadratne jednadžbe je $D = c^2 - 4c\rho - 4\rho^2$ koju opet promatramo kao kvadratnu jednadžbu po c čija je diskriminanta $D_1 = 32\rho^2 > 0$, što znači da su rješenja gornje jednadžbe realna, a zbog $\rho(c+\rho) > 0$ i $(c+2\rho) > 0$, oba su pozitivna.

   Duljine kateta su $\frac{c+2\rho \pm \sqrt{c^2-4c\rho-4\rho^2}}{2}$.



2. Pretpostavimo suprotno tj. da su svi α_i negativni. Neka je $z_i = x_i + iy_i$.

   $\alpha_i < 0 \quad \Rightarrow \sqrt{(x_i - x_{i+1})^2 + (y_i - y_{i+1})^2} < \sqrt{(x_i + x_{i+1})^2 + (x_i + x_{i+1})^2}$

   $\Rightarrow \quad x_i x_{i+1} + y_i y_{i+1} > 0 \quad \Rightarrow$

   $y_1 y_2 > -x_1 x_2 > 0$

   $x_2 x_3 > -y_2 y_3 > 0$

   $y_3 y_4 > -x_3 x_4 > 0$

   $x_4 x_1 > -y_4 y_1 > 0 \quad \Rightarrow$

   $x_1 x_2 x_3 x_4 y_1 y_2 y_3 y_4 > x_1 x_2 x_3 x_4 y_1 y_2 y_3 y_4$

   što je kontradikcija. Zato je polazna pretpostavka netočna, tj. barem jedan α_i je nenegativan.

3. Rješenja dane jednadžbe su oblika $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8 \cdot \log_a(a-2)}}{4}$.

   Iz uvjeta $x_1 < -\frac{1}{2}$ slijedi $\sqrt{1 - 8 \cdot \log_a(a-2)} > 1$,

   a iz uvjeta $x_2 > \frac{1}{2}$ slijedi $\sqrt{1 - 8 \cdot \log_a(a-2)} > 3$.

   Uvjet $x_2 < -\frac{1}{2}$ nije moguć. Mora biti zadovoljen drugi uvjet. Nakon sređivanja se dobiva
   $\log_a(a-2) < -1 = \log_a a^{-1}$. Da bi logaritam bio definiran mora biti $a - 2 > 0$, tj. $a > 2$.

   Iz gornje nejednadžbe se dobiva $a^2 - 2a - 1 < 0$. Ova nejednakost je zadovoljena za $a \in (1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$.

   Svi uvjeti su zadovoljeni za $a \in (2, 1 + \sqrt{2})$.

4. Promatrajmo sve pravce koji prolaze kroz po dvije od danih točaka. Kako tih pravaca ima konačno mnogo možemo izabrati onaj koji nije paralelan s nijednim od njih. Tada će svaki pravac paralelan s tim pravcem prolaziti kroz najviše jednu od danih točaka.

   Postavimo taj pravac tako da sve dane točke budu s njegove iste strane. Pomičemo taj pravac paralelno i svaki put ćemo naići na jednu točku. Svake četiri točke određuju jedan četverokut, a njih će ukupno biti $\frac{1992}{4} = 498$.