REPUBLIKA HRVATSKA
MINISTARSTVO PROSVJETE, KULTURE I ŠPORTA
Zavod za školstvo

NARODNA TEHNIKA HRVATSKE
Pokret "ZNANOST MLADIMA"

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

# MATEMATIKA

Zadaci za republički susret učenika srednjih škola

2. svibnja 1992.

### 3. RAZRED

**1.** Brojevi 1, 2, 7 imaju svojstvo $1 \cdot 2 + 2 = 2^2$, $1 \cdot 7 + 2 = 3^2$, $2 \cdot 7 + 2 = 4^2$. Dokažite da ne postoje četiri različita prirodna broja sa svojstvom da je produkt svaka dva među njima uvećan za 2 jednak kvadratu nekog prirodnog broja.

**2.** Neka su $z$ i $w$ kompleksni brojevi takvi da vrijedi $|z| = |w| = |z - w|$. Izračunajte $\left(\frac{z}{w}\right)^{1992}$.

**3.** Dva sukladna pravokutnika postavljena su tako da se njihovi rubovi sijeku u 8 točaka. Dokažite da je površina njihovog presjeka veća od polovine površine svakog od njih.

**4.** *Defektna* $d \times d$ šahovska ploča je $d \times d$ šahovska ploča s uklonjenim jednim kvadratićem (bilo kojim). Dokažite da se svaka defektna $2^n \times 2^n$, $n \in \mathbb{N}$ šahovska ploča može pokriti trionimima, figurama od tri polja u obliku slova L.

RJEŠENJA 3. razred

**Rješenje 1. zadatka.** Neka su $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ traženi brojevi. Ako je neki od njih, recimo $a_1$, djeljiv sa 4, tada je $a_1 a_i + 2$ oblika $4k + 2$. Međutim, kvadrat cijelog broja ne može biti tog oblika, jer on pri dijeljenju sa 4 daje ostatak 0 ili 1: kvadrat parnog broja je djeljiv s 4, a kvadrat neparnog broja je oblika $(2n + 1)^2 = 4(n^2 + n) + 1$.

Prema tome, niti jedan od tih brojeva ne može biti djeljiv s 4. Stoga barem dva među njima, recimo $a_1$ i $a_2$, moraju dati isti ostatak pri dijeljenju sa 4. No, tada je $a_1 \cdot a_2 + 2 = (4n+r)(4m+r)+2 = 4(4nm+mr+nr)+r^2+2$ i ovaj broj, prema gornjem, pri dijeljenju sa 4 daje ostatak 2 ili 3 i ne može biti kvadrat prirodnog broja.

**Rješenje 2. zadatka. Prvo rješenje**. Podijelimo jednadžbu sa $|w|$. Kako vrijedi $\dfrac{|z|}{|w|} = \left|\dfrac{z}{w}\right|$, to dobivamo jednadžbu

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \left|\frac{z}{w} - 1\right| = 1.$$

Uvedimo smjenu $u := \dfrac{z}{w}$. Jednadžba sada glasi

$$(\star) \qquad |u| = |u - 1| = 1 \implies |u|^2 = |u - 1|^2 = 1.$$

Kako je $|u|^2 = u \cdot \overline{u}$, to dobivamo

$$u \cdot \overline{u} = (u-1)(\overline{u}-1) = 1 \implies u \cdot \overline{u} = u \cdot \overline{u} - u - \overline{u} + 1 = 1$$

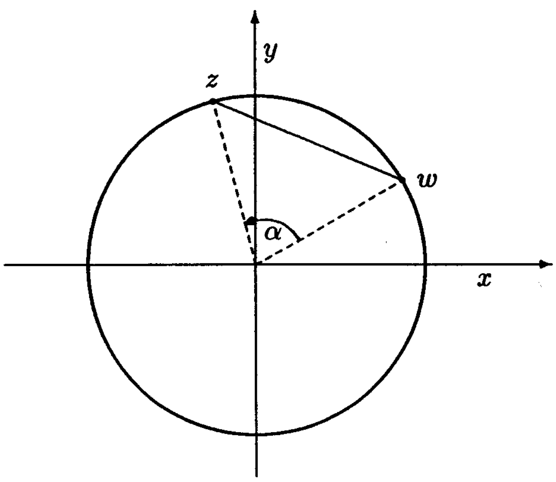
i odavde $\overline{u} = 1 - u$ što uvršteno u prvu jednakost daje $u(1-u) = 1$ tj. $u^2 - u + 1 = 0$. Odavde možemo izračunati $u$, međutim, množenjem relacije sa $u + 1 \neq 0$ dobivamo $u^3 = -1$ pa je i $u^{1992} = (u^3)^{664} = 1$.

Jednadžba $(\star)$ može se riješiti i supstitucijom $u = x + iy$:

$$x^2 + y^2 = (x-1)^2 + y^2 = 1$$

te je $-2x + 1 = 0$, $x = \dfrac{1}{2}$ i $y = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Odavde $u = \dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ te je $u^3 = -1$.

**Drugo rješenje**. Prokažimo brojeve $z$ i $w$ u kompleksnoj ravnini. Kako je $|z| = |w|$, to oni leže na kružnici sa središtem u ishodištu i pri tom je trokut s vrhovima u tim točkama i u ishodištu jednakostraničan (jer je duljina treće stranice $|z - w|$).

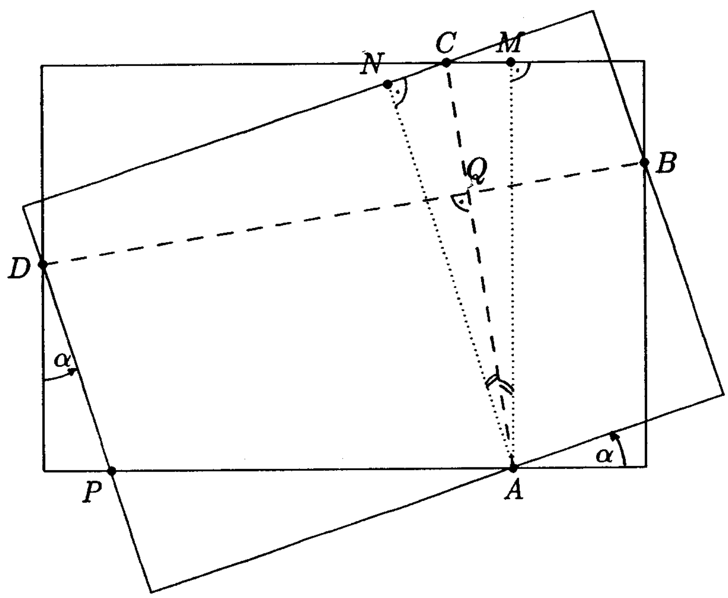


Označimo argumente tih brojeva sa $\varphi_1 = \arg z$, $\varphi_2 = \arg w$. Sada je $\alpha = \varphi_1 - \varphi_2 = \pi/3$. Prikazavši brojeve u trigonometrijskom obliku, dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{z}{w} &= \frac{|z|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{|w|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{|z|}{|w|}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \\ &= \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

i zaključak slijedi kao prije.

**Rješenje 3. zadatka.** Neka su duljine stranica pravokutnika $a$ i $b$ i neka se strane duljine $a$ sijeku u točkama $A$ i $C$, a strane duljine $b$ u točkama $B$ i $D$, kao na slici.




Pokažimo da su dužine $AC$ i $BD$ okomite. Povucimo iz točke $A$ okomice $AM$ i $AN$ na stranice obaju pravokutnika. Kako su trokutovi $AMC$ i $ANC$ sukladni, to je dužina $AC$ simetrala kuta među stranicama pravokutnika koje se sijeku u točki $C$. Zbog istog razloga je i $BD$ simetrala kuta među stranicama pravokutnika u točki $D$. Označimo sa $\alpha$ (manji) kut među stranicama pravokutnika. Tada vrijedi u četverokutu $PAQD$

$$\sphericalangle QDP = \tfrac{1}{2}(180^\circ - \alpha), \quad \sphericalangle QAP = \tfrac{1}{2}(180^\circ - \alpha), \quad \sphericalangle DPA = 90^\circ + \alpha$$

te je

$$\sphericalangle DQA = 360^\circ - (\sphericalangle QDP + \sphericalangle QAP + \sphericalangle DPA) = 90^\circ$$

Površina čeverokuta $ABCD$ jednaka je $\frac{1}{2}|DB| \cdot |CA| \geq \frac{1}{2}ab$. Površina zajedničkog presjeka je evidentno veća od površine četverokuta $ABCD$.

**Rješenje 4. zadatka.** Zadatak dokazujemo indukcijom. Primjetimo da je za svaki $n$ broj $2^n \times 2^n - 1$ djeljiv sa 3, stoga ima smisla nastaviti.

Za $n = 1$ defektna ploča $3 \times 3$ je upravo jedan triomino.

Pretpostavimo da znamo pokriti $2^n \times 2^n$ šahovsku ploču i pogledajmo što možemo napraviti sa četiri puta većom pločom dimenzija $2^{n+1} \times 2^{n+1}$. Budući da je ploča defektna, u jednoj (prirodnoj) četvrtini ploče nedostaje kvadratić. Tu četvrtinu, prema pretpostavci indukcije, znamo popuniti. Krasno bi bilo kad bi i ostale tri četvrtine bile defektne. No one su pune. Međutim, stavimo li jedan triomino u centar i ostatak (tri defektne ploče) možemo popuniti prema pretpostavci indukcije. Vidi sliku !!!