REPUBLIKA HRVATSKA
MINISTARSTVO PROSVJETE, KULTURE I ŠPORTA
Zavod za školstvo

NARODNA TEHNIKA HRVATSKE
Pokret "ZNANOST MLADIMA"

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za republički susret učenika srednjih škola
2. svibnja 1992.

4. RAZRED

1. Osnovka trostrane piramide je trokut sa stranicama duljina a, b i c. Nasuprotni bridovi su duljina m, n i p. Dokažite da udaljenost vrha piramide od težišta osnovke iznosi

$$\frac{1}{3}\sqrt{3(m^2+n^2+p^2)-(a^2+b^2+c^2)}.$$

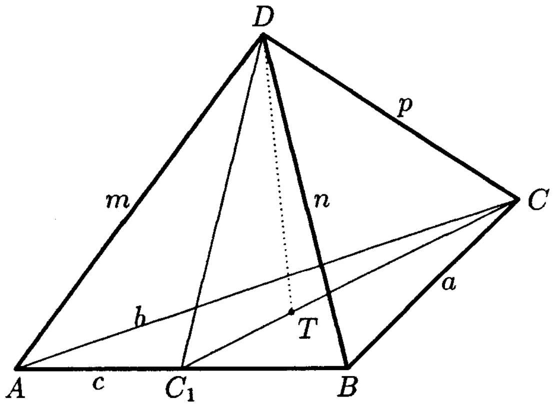
2. Nađite sve prirodne brojeve n za koje polinom $P(x) = x^n + (2+x)^n + (2-x)^n$ posjeduje barem jednu cjelobrojnu nul-točku.

3. Neka je $A = \{z_1, \ldots, z_n\}$ skup od n kompleksnih brojeva, $n \geq 2$ i neka je za svaki i $\{z_i z_1, z_i z_2, \ldots, z_i z_n\} = A$.
a) Dokažite da je za svaki i ispunjeno $|z_i| = 1$.
b) Dokažite da iz $z \in A$ slijedi i $\overline{z} \in A$.

4. Odredite geometrijski niz realnih brojeva ako je poznato da je zbroj prva četiri člana jednak 15, a zbroj njihovih kvadrata je 85.

RJEŠENJA 4. razred

Rješenje 1. zadatka. Označimo vrhove piramide sa A, B, C, D, težište osnovke sa T te sa C_1 polovište stranice AB.



Koristimo formulu za duljinu težišnice. Iz trokuta ABC, duljina težišnice CC_1 je

$$|CC_1| = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}.$$

Iz trokuta ABD vrijedi

$$|DC_1| = \frac{1}{2}\sqrt{2(m^2+n^2)-c^2}.$$

Duljinu $|DT|$ računamo iz trokuta DTC_1, znajući duljine dviju stranica $|DC_1|$, $|C_1T| = \frac{1}{3}|C_1C|$ i kut $\varphi = \sphericalangle DC_1C$. Za njega vrijedi, po kosinusovom poučku

$$\cos\varphi = \frac{|DC_1|^2 + |CC_1|^2 - |CD|^2}{2|DC_1|\cdot|CC_1|}.$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}
|DT|^2 &= |DC_1|^2 + |C_1T|^2 - 2|DC_1|\cdot|C_1T|\cos\varphi \\
&= \frac{2(m^2+n^2)-c^2}{4} + \frac{2(a^2+b^2)-c^2}{36} - \\
&\quad - \frac{1}{3}\left[\frac{2(m+2+n^2)-c^2}{4} + \frac{2(a^2+b^2)-c^2}{4} - p^2\right] \\
&= \frac{1}{9}\left[3(m^2+n^2+p^2) - (a^2+b^2+c^2)\right]
\end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati.

Rješenje 2. zadatka. Za paran broj n polinom je pozitivan za svaki $x \in \mathbf{R}$ i nema realnih nul točki. Također, za $x > 0$ je očigledno $P(x) > 0$ te je (realna) nul točka nužno negativna.

Za $n = 1$ polinom glasi $P(x) = x + 4$ i ima cjelobrojnu nul točku -4.

Pokažimo da za neparni broj $n > 1$ nema cjelobrojnih nul točaka. Slobodni član polinoma iznosi 2^{n+1}. Kako su cjelobrojni korijeni djelitelji tog člana, to oni moraju biti oblika -2^k, gdje je k nenegativan cijeli broj. Ispitajmo sve mogućnosti.

Ako je $k = 0$, imamo $x = -1$, što ne može biti nultočka, jer je tada vrijednost polinoma neparan broj.

Za $k = 1$ i $x = -2$ vrijedi $P(-2) = (-2)^n + 4^n > 0$.

Neka je $k \geq 2$. Stavimo $k = p + 1$. tada je

$$P(-2^n) = 2^n[-2^{pn} + (1 - 2^p)^n + (1 + 2^p)^n]$$
$$= 2^n\Big[-2^{pn} + \Big(2 + \binom{n}{2}2^{2p} + \binom{n}{4}2^{4p} + \ldots\Big)\Big].$$

Izraz u uglatoj zagadi pri dijeljenju sa 4 daje ostatak 2 pa ne može biti jednak nuli.

Stoga je $n = 1$ jedino rješenje zadatka.

Rješenje 3. zadatka. a) Pretpostavimo suprotno: za neki i vrijedi, recimo, $|z_i| > 1$. Neka je to baš broj s maksimalnom apsolutnom vrijednošću. Kako je po pretpostavci $z_i^2 = z_i \cdot z_i \in A$ imali bismo $|z_i^2| = |z_i|^2 > |z_i|$, što se protivi pretpostavci o maksimalnosti.

Ako je pak $0 < |z_i| < 1$ za neki i, izabravši broj s minimalnim modulom dobili bismo ponovno kontradikciju: $|z_i^2| = |z_i|^2 < |z_i|$.

Za $|z_i| = 0$ bilo bi $z_i = 0$ pa bi i svi ostali elementi od A bili jednaki 0, što je besmisleno.

b) Neka je $z \in A$. Promotrimo niz z, z^2, z^3,.... Po uvjetima zadatka i ovi brojevi leže u A. Kako je A konačan, za neke m, $l \in \mathbf{N}$ mora biti $z^m = z^l$, odnosno $z^k = 1$ pa je $1 \in A$. Označimo $z' = z^{k-1} \in A$. Vrijedi $z' \cdot z = z^k = 1$ i odavde

$$z' = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \overline{z}$$

jer je po dijelu **a)** $|z| = 1$.

Rješenje 4. zadatka. Po uvjetima zadatka je

$$a(1 + q + q^2 + q^3) = 15, \qquad a^2(1 + q^2 + q^4 + q^6) = 85.$$

Odavde

$$\frac{(1 + q + q^2 + q^3)^2}{1 + q^2 + q^4 + q^6} = \frac{45}{17} \implies \frac{q^4 + 2q^3 + 2q^2 + 2q + 1}{q^4 + 1} = \frac{45}{17}.$$

Dobili smo recipročnu jednadžbu

$$14q^4 - 17q^3 - 17q^2 - 17q - 14 = 0.$$

Njena su rješenja različita od nule. Za $q \neq 0$ dijeljenjem dobivamo jednadžbu

$$14\Big(q^2 + \frac{1}{q^2}\Big) - 17\Big(q + \frac{1}{q}\Big) - 17 = 14\Big(q + \frac{1}{q}\Big)^2 - 17\Big(q + \frac{1}{q}\Big) - 45 = 0.$$

Supstitucija $q + \frac{1}{q} = t$ daje $14t^2 - 17t - 45 = 0$. Rješenja su $t_1 = \frac{5}{2}$, $t_2 = -\frac{9}{7}$. Prva vrijednost daje $q_1 = 2$, $q_2 = \frac{1}{2}$, dok jednadžba $q + \frac{1}{q} = -\frac{9}{7}$ nema realnih rješenja.

Konačno dobivamo nizove 1, 2, 4, 8 i 8, 4, 2, 1.