REPUBLIKA HRVATSKA
MINISTARSTVO PROSVJETE, KULTURE I ŠPORTA
Zavod za školstvo

NARODNA TEHNIKA HRVATSKE
Pokret "ZNANOST MLADIMA"

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za općinski susret učenika srednjih škola
28. ožujka 1992.

1. razred

1. Neka su x, y, i z realni brojevi takvi da je $x+y+z=xyz$. Dokažite da vrijedi identitet:

$$x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-x^2)(1-z^2)+z(1-x^2)(1-y^2)=xyz.$$

2. Odredite sve cijele brojeve x za koje je $\frac{x^3+3x^2-x-10}{x+2}$ prirodan broj.

3. Ako su a, b i c duljine stranica trokuta, dokažite da vrijedi nejednakost

$$abc \geq (-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c).$$

4. U trokutu su dani njegovi kutevi $\alpha=60^\circ$ i $\beta=75^\circ$, a njegov opseg je jednak $10cm$. Izračunajte duljine stranica trokuta.

REPUBLIKA HRVATSKA
MINISTARSTVO PROSVJETE, KULTURE I ŠPORTA
Zavod za školstvo

NARODNA TEHNIKA HRVATSKE
Pokret "ZNANOST MLADIMA"

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za općinski susret učenika srednjih škola
28. ožujka 1992.

2. razred

1. Ako je $x + \frac{1}{x} = a$, izračunajte $x^7 + \frac{1}{x^7}$?

2. U Gaussovoj kompleksnoj ravnini skicirajte skup točaka kojima pripadaju kompleksni brojevi koji zadovoljavaju uvjet: $z^2 + z + 1$ je pozitivan realan broj.

3. Ako koeficijenti jednadžbi $x^2 + px + q = 0$ i $x^2 + mx + n = 0$ zadovoljavaju uvjet $mp = 2(n + q)$ dokažite da su rješenja bar jedne od njih realna.

4. U krugu sa središtem u točki S, polumjera $r = 2cm$ povučena su dva radijusa $\overline{SA}$ i $\overline{SB}$. Kut među njima je 45^o. Neka je K sjecište pravca AB i okomice povučene na pravac AS u točki S, a točka L je nožište visine trokuta ABS povučene iz vrha B. Izračunajte površinu trapeza $SKBL$.

REPUBLIKA HRVATSKA
MINISTARSTVO PROSVJETE, KULTURE I ŠPORTA
Zavod za školstvo

NARODNA TEHNIKA HRVATSKE
Pokret "ZNANOST MLADIMA"

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za općinski susret učenika srednjih škola
28. ožujka 1992.

3. razred

1. Nad stranicama trokuta ABC konstruirani su proizvoljni paralelogrami $ABB_2A_1, BCC_2B_1, CAA_2C_1$. Da li je moguće konstruirati trokut čije duljine stranica su jednake $|A_1A_2|, |B_1B_2|, |C_1C_2|$?

2. Neka su x, y, z prirodni brojevi sa svojstvom da je broj $x^3 + y^3 + z^3$ djeljiv sa 7. Dokažite da je tada i produkt $x \cdot y \cdot z$ djeljiv sa 7.

3. Riješite jednadžbu: $log_x(2x) \leq \sqrt{log_x(2x^3)}$.

4. Dan je tetraedar kojemu su nasuprotne stranice međusobno kongruentne, tj. $AB = CD, AC = BD, AD = BC$. Dokazati da su strane tetraedra šiljastokutni trokuti.

REPUBLIKA HRVATSKA
MINISTARSTVO PROSVJETE, KULTURE I ŠPORTA
Zavod za školstvo

NARODNA TEHNIKA HRVATSKE
Pokret "ZNANOST MLADIMA"

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za općinski susret učenika srednjih škola
28. ožujka 1992.

4. RAZRED

1. *Odredi sve realne brojeve x za koje vrijede nejednakosti*

$$-1 \leq \frac{\sqrt{3}\sin x}{2+\cos x} \leq 1.$$

2. *Za aritmetički niz (a_k) vrijede jednakosti*

$$\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2}$$

pri čemu je S_l zbroj prvih l članova niza.
Dokaži da je

$$\frac{a_m}{a_n} = \frac{2m-1}{2n-1}.$$

3. *Koji skup točaka opisuju polovištâ P tetivâ dane kružnice k sa središtem u točki S i polumjerom r koje prolaze čvrstom točkom T unutar kružnice k?*

4. *Odredi sve članove niza (a_n), $a_n = 7^n + 6^n - 4$, koji su jednaki kvadratu nekog prirodnog broja.*

Rješenja - 1. razred

1. Lijeva strana jednakosti je jednaka

$$xyz - xy(x+y) - yz(y+z) - xz(x+z) + xyz(xy+yz+xz) =$$

10 bodova

$$= xyz + xy(xyz - x - y) + yz(xyz - y - z) + xz(xyz - x - z) =$$

10 bodova

$$= xyz + xyz + xyz + xyz = 4xyz.$$

5 bodova

2. Dijeljenjem dobivamo $\frac{x^3+3x^2-x-10}{x+2} = x^2 + x - 3 - \frac{4}{x+2}$. 5 bodova
Stoga je $x + 2 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$, odnosno
$x \in \{-6, -4, -3, -1, 0, 2\}$. 10 bodova
Za $x = -1$ i $x = 0$ ovaj izraz poprima negativnu vrijednost.5 bodova
Prema tome brojevi s traženim svojstvom su: $-6, -4, -3, 2$. 5 bodova

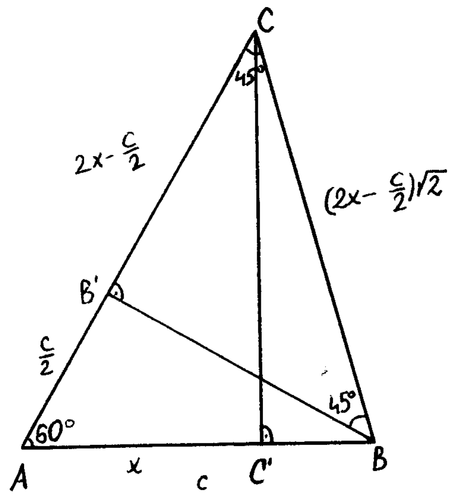
3. $a^2 \geq a^2 - (b-c)^2$
$b^2 \geq b^2 - (c-a)^2$ 10 bodova
$c^2 \geq c^2 - (a-b)^2$

$a^2 \geq (a-b+c)(a+b-c)$
$b^2 \geq (b-c+a)(b+c-a)$
$c^2 \geq (c-a+b)(c+a-b)$

$a^2b^2c^2 \geq (-a+b+c)^2(a-b+c)^2(a+b-c)^2$
$abc \geq |-a+b+c||a-b+c||a+b-c|$. 5 bodova
Kako je zbroj duljina dviju stranica trokuta veći od duljine treće stranice, vrijedi: $-a+b+c \geq 0, a-b+c \geq 0, a+b-c \geq 0$. Stoga je $abc \geq (-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$, što se i tvrdilo. 10 bodova

Rješenja - 1. razred

4. (Vidi sliku.)



Slika - 5 bodova

Neka je $d(A, C') = x$. Tada je $d(A, C) = 2x, d(A, B') = \frac{c}{2}$, $d(C, B') = 2x - \frac{c}{2}, d(B, C) = d(B'; C)\sqrt{2} = (2x - \frac{c}{2})\sqrt{2}$, $d(B, B') = \frac{c}{2}\sqrt{3}$. 5 bodova

Sada imamo:

$$c+2x+(2x-\tfrac{c}{2})\sqrt{2} = 10$$ 5 bodova

$$2x-\tfrac{c}{2} = \tfrac{c}{2}\sqrt{3}$$ 5 bodova

Rješavajući ovaj sustav jednadžbi dobiva se:

$$x = \frac{c(1+\sqrt{3})}{4}, \quad c = \frac{20}{3+\sqrt{3}+\sqrt{6}}cm,$$

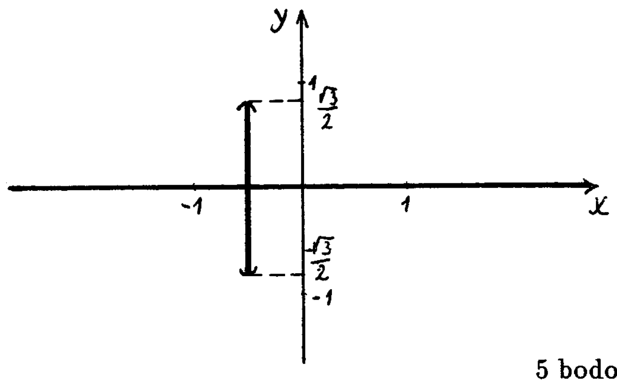
$$b = \frac{10(1+\sqrt{3})}{3+\sqrt{3}+\sqrt{6}}cm, \quad a = \frac{10\sqrt{6}}{3+\sqrt{3}+\sqrt{6}}cm.$$

5 bodova

Rješenja - 2. razred

1. $(x+\frac{1}{x})^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2$ 5 bodova
$(x^2+\frac{1}{x^2})(x+\frac{1}{x}) = (x^3+\frac{1}{x^3})+(x+\frac{1}{x}) \Rightarrow x^3+\frac{1}{x^3} = a^3 - 3a$ 5 bodova
$(x^3+\frac{1}{x^3})^2 = x^6 + \frac{1}{x^6} + 2 \Rightarrow x^6 + \frac{1}{x^6} = a^6 - 6a^4 + 9a^2 - 2$ 5 bodova
$(x^3+\frac{1}{x^3})(x^2+\frac{1}{x^2}) = (x^5+\frac{1}{x^5}) + (x+\frac{1}{x}) \Rightarrow$
$x^5 + \frac{1}{x^5} = a^5 - 5a^3 + 5a$ 5 bodova
$(x^5+\frac{1}{x^5})(x^2+\frac{1}{x^2}) = (x^7+\frac{1}{x^7})+(x^3+\frac{1}{x^3}) \Rightarrow x^7+\frac{1}{x^7} = a^7-7a^5+14a^3-7a$
5 bodova

2. Neka je $z \in \mathbf{C}, z = x + yi$. Tada vrijedi:
$z^2+z+1 = (x+yi)^2+(x+yi)+1 = (x^2+2xyi-y^2)+x+yi+1 =$
$x^2-y^2+x+1+y(2x+1)i$ 5 bodova
Da bi to bio pozitivan realan broj mora biti:
(i) $y(2x+1) = 0$,
(ii) $x^2-y^2+x+1 > 0$. 5 bodova
Iz prve jednakosti zaključujemo da je ili $y = 0$ ili $x = -\frac{1}{2}$. Ako je $y = 0$ onda je $x^2+x+1 > 0$, a to vrijedi za svaki $x \in \mathbf{R}$; 5 bodova
a ako je $x = -\frac{1}{2}$ onda je $\frac{1}{4} - y^2 - \frac{1}{2} + 1 > 0$,
tj. $y^2 < \frac{3}{4}$, tj. $y \in (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. 5 bodova



5 bodova

Rješenja - 2. razred

3. $D_1 = p^2 - 4q$, $\quad D_2 = m^2 - 4n$. 5 bodova
Tada je $D_1 + D_2 = (p-m)^2 \geq 0$. 10 bodova
Odavde slijedi da je ili $D_1 \geq 0$ ili $D_2 \geq 0$, a tada su rješenja odgovarajuće jednadžbe realna. 10 bodova

Napomena: Moguće je još jedno rješenje u kojem se pođe od pretpostavke da su sva rješenja kompleksna i dođe se do kontradikcije.

5 bodova

Tada je $D_1 < 0$ i $D_2 < 0$, 5 bodova
i dobiva se $D_1 + D_2 = (p-m)^2 < 0$, što nije moguće. 10 bodova
Odavde se zaključuje da je D_1 ili D_2 nenegativno, što znači da su odgovarajuća rješenja realna. 5 bodova.

4. *(i)* $\triangle BLS$ je pravokutan i jednakokračan ($\angle LSB = \angle LBS = 45°$.)

5 bodova

Dobivamo: $d(L,B) = d(L,S) = \frac{\sqrt{2}}{2}r$. 5bodova

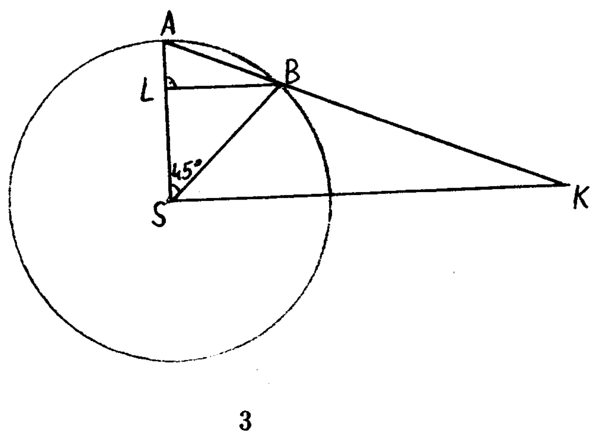
(ii) $\triangle ABL \sim \triangle AKS$ pa vrijedi

$\frac{d(A,L)}{d(A,S)} = \frac{d(L,B)}{d(S,K)}$, a kako je $d(A,L) = r - d(L,S) = r - \frac{\sqrt{2}}{2}r$,

$d(A,S) = r$, dobivamo $d(S,K) = (\sqrt{2}+1)r$ 10 bodova

(iii) Površina trapeza je $P = \frac{a+c}{2}h$, gdje je $a = d(S,K), c = d(L,B)$,

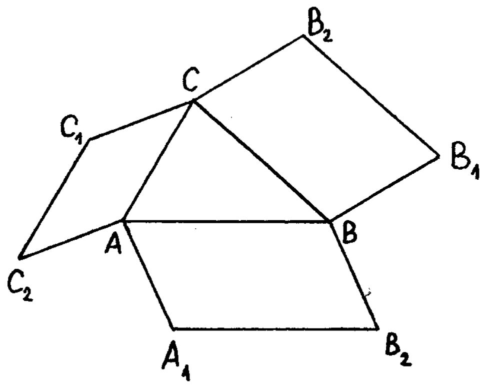
$h = d(L,S)$. Dobiva se $P = (3+\sqrt{2})cm^2$. 5 bodova



Rješenja - 3. razred

1. Primijetimo najprije da je
$\vec{A_1A_2} = \vec{A_1A} + \vec{AA_2}, \vec{B_1B_2} = \vec{B_1B} + \vec{BB_2}, \vec{C_1C_2} = \vec{C_1C} + \vec{CC_2}$.

5 bodova



5 bodova

$$\vec{A_1A_2}+\vec{B_1B_2}+\vec{C_1C_2} = (\vec{A_1A}+\vec{BB_2})+(\vec{AA_2}+\vec{C_1C})+(\vec{B_1B}+\vec{CC_2}) = \vec{0}.$$

10 bodova

Neka su zadane točke P, Q, R, P_1 sa $\vec{PQ} = \vec{A_1A_2}, \vec{QR} = \vec{B_1B_2}, \vec{RP_1} = \vec{C_1C_2}$. Tada je $\vec{0} = \vec{A_1A_2} + \vec{B_1B_2} + \vec{C_1C_2} = \vec{PQ} + \vec{QR} + \vec{RP_1} = \vec{PP_1}$ odakle slijedi da je $P = P_1$, tj. $|A_1A_2|, |B_1B_2|, |C_1C_2|$ su duljine stranica trokuta. 5 bodova

2. Prirodni broj pri dijeljenju sa 7 može dati ostatak $0, 1, 2, 3, 4, 5$ ili 6. Brojevi $0^3, 1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3$ pri dijeljenju sa 7 daju redom ostatke $0, 1, 1, 6, 1, 6, 6$. 10 bodova

   Da bi zbroj tri elementa skupa $\{0, 1, 6\}$ bio djeljiv sa 7, jedan od njih mora biti 0. To znači da je jedan od brojeva x, y, z djeljiv sa 7, pa i produkt $x \cdot y \cdot z$ također ima to svojstvo.

   15 bodova

3. Nejednadžba je ekvivalentna sa: $\log_x 2 + 1 \leq \sqrt{\log_x 2 + 3}$. Supstitucijom $y = \log_x 2$ dobivamo $y + 1 \leq \sqrt{y+3}$. 5 bodova

   Za $y \in [-3, -1]$ nejednakost je očito zadovoljena. Za $y \geq -1$ imamo:
   $y^2 + 2y + 1 \leq y + 3 \iff (y+2)(y-1) \leq 0 \iff -2 \leq y \leq 1$.
   Rješenje gornje nejednadžbe je $y \in [-3, 1]$. 5 bodova

Sada tražimo rješenje nejednadžbe $-3 \leq \log_x 2 \leq 1$.

Ako je $0 < x < 1$, onda je $\log_2 x < 0$, pa imamo:

$\frac{1}{\log_2 x} \leq 1$ i $\frac{1}{\log_2 x} \geq -3 \iff$

$\log_2 x \leq 1$ i $\log_2 x \leq \frac{-1}{3}$, tj. $\log_2 x \leq \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, tj. $x \in (0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$.

5 bodova

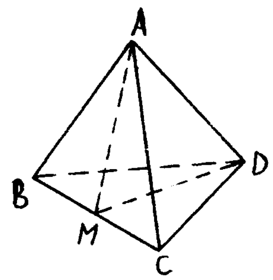
Ako je $x > 1$, imamo: $\frac{1}{\log_2 x} \leq 1$ i $\frac{1}{\log_2 x} \geq -3 \iff$

$\log_2 x \geq 1$ $\log_2 x \geq \frac{-1}{3}$ tj. $\log_2 x \geq 1$, tj. $x \geq 2$. 5 bodova

Prema tome, rješenje polazne nejednadžbe je skup $(0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}] \cup [2, +\infty)$.

5 bodova

4. Neka je tov cka M polovište brida BD. Tada je $AM + MD > AD = BC = 2MC$



Trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle DCB$ su kongruentni tj. $AM = DM$, pa je $2MD > 2MC$. Zato krug sa središtem u točki M polumjera $d(M, C)$ sadrži točke B i C, a ne sadrži točku D. Odatle odmah slijedi da je kut $\angle CDB$ šiljast. 25 bodova

RJEŠENJA ZADATAKA ZA 4.RAZRED

1. (25 bodova) Polazne nejednadžbe ekvivalentne su sa $\left|\frac{\sqrt{3}\sin x}{2+\cos x}\right| \leq 1$, odnosno $3\sin^2 x \leq (2+\cos x)^2$.

Odatle imamo

$$4 + 4\cos x + \cos^2 x - 3 + 3\cos^2 x \geq 0$$
$$4\cos^2 x + 4\cos x + 1 \geq 0$$
$$(2\cos x + 1)^2 \geq 0,$$

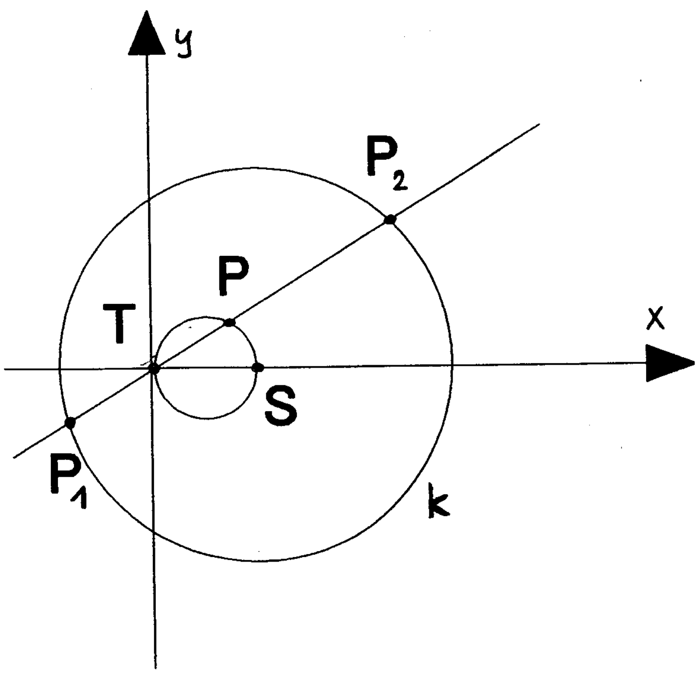
a to vrijedi za svaki $x \in \mathbf{R}$, tako da i polazne nejednakosti vrijede za svaki $x \in \mathbf{R}$.

2. (25 bodova) (a_k) je aritmetički niz, te je $S_l = \frac{2a_1+(l-1)d}{2} \cdot l$, pri čemu je d diferencija aritmetičkog niza.

Iz $\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2}$ slijedi $d = 2a_1$, te konačno

$$\frac{a_m}{a_n} = \frac{a_1 + (m-1)\cdot d}{a_1 + (n-1)\cdot d} = \frac{a_1 + (m-1)\cdot 2a_1}{a_1 + (n-1)\cdot 2a_1} = \frac{2m-1}{2n-1}.$$

3. (25 bodova)



Postavimo ishodište Kartezijevog koordinatnog sustava u T , a os x položimo kroz središte S od k , te stavimo $2 \cdot d = d(T, S)$. Tada je jednadžba od k dana sa

$$(x - 2 \cdot d)^2 + y^2 = r^2,$$

a jednadžba proizvoljnog pravca kroz T biti će

$$y = a \cdot x. \qquad \text{(5 bodova)}$$

Apscisa odnosno ordinata od $P(x_P, y_P)$ biti će aritmetička sredina apscisa odnosno ordinata od $P_1(x_1, y_1)$ i $P_2(x_2, y_2)$. Imamo:

$$(x_{1,2} - 2 \cdot d)^2 + a^2 \cdot {x_{1,2}}^2 = r^2$$

$${x_{1,2}}^2 \cdot (1 + a^2) - 4 \cdot d \cdot x_{1,2} + 4 \cdot d^2 - r^2 = 0$$

odakle slijedi

$$x_P = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2 \cdot d}{1 + a^2},$$

i

$$y_P = a \cdot x_P = \frac{2 \cdot d \cdot a}{1 + a^2}. \qquad \text{(10 bodova)}$$

Eliminacijom a dobivamo

$$x^2 + y^2 = 2 \cdot d \cdot x,$$

odnosno

$$(x - d)^2 + y^2 = d^2. \qquad \text{(10 bodova)}$$

Traženi skup točaka je kružnica.

4. (25 bodova) Prva dva člana niza su $a_1 = 7 + 6 - 4 = 9 = 3^2$, $a_2 = 7^2 - 6^2 - 4 = 81 = 9^2$.

Za $n \geq 3$ je broj 6^n djeljiv sa 8, dok $7^n = (8 - 1)^n$ pri dijeljenju sa 8 daje ostatak $(-1)^n$. Stoga, za $n \geq 3$ broj a_n pri dijeljenju sa 8 daje ostatak 3 ili 5.

Ukoliko bi a_n bio kvadrat nekog prirodnog broja, morao bi (jer je neparan) imati oblik: $(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 8\frac{k(k+1)}{2} + 1$, tj. davao bi ostatak 1 pri dijeljenju sa 8.

Prema tome, jedini članovi s traženim svojstvom su $a_1 = 9$ i $a_2 = 81$.