ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA KULTURE I PROSVJETE REPUBLIKE HRVATSKE

POKRET "ZNANOST MLADIMA" HRVATSKE ZAJEDNICE TEHNIČKE KULTURE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika srednjih škola Republike Hrvatske

Varaždin, 13 – 16. svibnja 1993. godine

I. razred

1. Kugla polumjera R presječena je s dvije paralelne ravnine tako da je središte kugle izvan sloja određenog tim ravninama. Neka su P_1 i P_2 površine presjeka, a d međusobna udaljenost danih ravnina. Nađite površinu presjeka kugle ravninom koja je paralelna danim ravninama i jednako od njih udaljena.

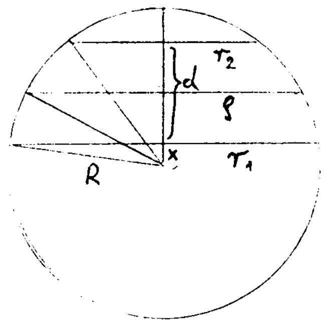
2. Odredite četveroznamenkasti broj oblika $\overline{aabb}$ koji je potpuni kvadrat.

3. Dokažite da se svaki poligon opsega 1 može prekriti krugom polumjera $\frac{1}{4}$.

4. Za koje $n \in \mathbf{N}$ je izraz $\frac{\sqrt{7}+2\sqrt{n}}{2\sqrt{7}-\sqrt{n}}$ cjelobrojan?

Rješenja zadataka za prvi razred.
Svaki zadatak nosi po 25 bodova.

1. $$\sqrt{R^2 - r_1^2} = x, \quad (1)$$
$$\sqrt{R^2 - r_2^2} = x + d, \quad (2)$$
$$\sqrt{R^2 - \rho^2} = x + \tfrac{d}{2}. \quad (3)$$



(1) i (2) $\Longrightarrow$ $\sqrt{R^2 - r_2^2} = d + \sqrt{R^2 - r_1^2}$,

(1) i (3) $\Longrightarrow$ $\sqrt{R^2 - \rho^2} = \frac{d}{2} + \sqrt{R^2 - r_1^2}$.

Kvadriranjem se dobiva

$$R^2 - r_2^2 = d^2 + 2d\sqrt{R^2 - r_1^2} + R^2 - r_1^2, \quad / \cdot (-\tfrac{1}{2})$$
$$R^2 - \rho^2 = \tfrac{d^2}{4} + d\sqrt{R^2 - r_1^2} + R^2 - r_1^2,$$

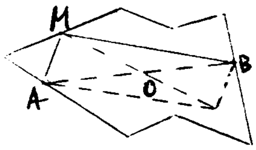
a odavde zbrajanjem proizlazi

$$\tfrac{1}{2}r_2^2 - \rho^2 = -\tfrac{d^2}{4} - \tfrac{1}{2}r_1^2 \quad / \cdot \pi$$
$$P = \tfrac{1}{4}(2P_1 + 2P_2 + d^2\pi).$$

2. Označimo sa x traženi broj i neka je on kvadrat broja y. Tada je
$$x = y^2 = 1000a + 100a + 10b + b = 11(100a + b).$$
Odavde zaključujemo da je y djeljiv s 11, pa je zato x djeljiv s 11^2. Kako broj $100a + b = 99a + (a + b)$ mora biti djeljiv sa 11, to $a + b$ mora biti djeljivo sa 11. Iz $0 < a + b < 19$, mora biti $a + b = 11$. Zato je $x = 11^2(9a + 1)$.

Iz ove jednakosti zaključujemo da je $9a+1$ kvadrat cijelog broja. Jedina znamenka a za koju je $9a+1$ kvadrat prirodnog broja je $a = 7$. Tada je i $b = 4$ i traženi broj $x = 7744 = 88^2$.

3. Odaberimo točke A i B na poligonu tako da ga dijele na dva dijela jednakih duljina $\frac{1}{2}$.



Neka je O polovište dužine AB, a M bilo koja točka poligona. Tada je $|AM| + |BM| \leq \frac{1}{2}$, pa je

$|OM| \leq \frac{1}{2}(|AM| + |BM|) \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

što znači da točka M pripada krugu $K(O, \frac{1}{4})$, pa je i čitav poligon sadržan u krugu.

4. $A = \frac{\sqrt{7}+2\sqrt{n}}{2\sqrt{7}-\sqrt{n}} \cdot \frac{2\sqrt{7}+\sqrt{n}}{2\sqrt{7}+\sqrt{n}} = \frac{14+2n+5\sqrt{7n}}{28-n}$.

Supstitucijom $n = 7k^2, k \in \mathbb{N}$ slijedi

$A = \frac{14+14k^2+35k}{28-7k^2} = \frac{(2k+1)(k+2)}{(2-k)(2+k)} = \frac{2k+1}{2-k} = -2 + \frac{5}{-k+2}$.

Kako je A cijeli broj mora biti 5 djeljivo sa $-k+2$. Zato mora biti $-k+2 \in \{-5, -1, 1, 5\}$ tj. $k \in \{7, 3, 1, \}$ odnosno $A \in \{-3, -7, 3\}$.

Dakle, izraz je cjelobrojan za $k \in \{1, 3, 7\}$, odnosno za $n = 7k^2 \in \{7, 63, 343\}$.

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA KULTURE I PROSVJETE REPUBLIKE HRVATSKE

POKRET "ZNANOST MLADIMA" HRVATSKE ZAJEDNICE TEHNIČKE KULTURE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Varaždin, 13 – 16. svibnja 1993. godine

II. razred

1. Riješite u skupu **R** nejednadžbu

$$\left|\frac{4^x - 2^{x+1} - 2}{2^x - 4}\right| < 1.$$

2. Odredite sve trojke prirodnih brojeva x, y, z za koje vrijedi

$$\frac{2}{x^2} + \frac{3}{y^2} + \frac{4}{z^2} = 1.$$

3. Dane su točke A i B u ravnini. Dokažite da je geometrijsko mjesto točaka M takvih da je $|AM|^2 - |BM|^2 = k$ (gdje je k dani broj), pravac okomit na pravac AB.

4. Oko kružnice su na bilo koji način opisani trokut i kvadrat. Dokažite da je duljina dijela opsega kvadrata unutar trokuta veća od dijela izvan njega.

Rješenja zadataka za drugi razred.
Svaki zadatak nosi po 25 bodova.

1. Istovremeno moraju biti zadovoljene slijedeće dvije nejednakosti:

$\frac{4^x-2^{x+1}-2}{2^x-4} < 1$ i $\frac{4^x-2^{x+1}-2}{2^x-4} > -1$ tj.

$\frac{4^x-3\cdot 2^x+2}{2^x-4} < 0$ i $\frac{4^x-2^x-6}{2^x-4} > 0$.

Supstitucijom

$2^x = t, \quad t > 0$ i $2^x = t, \quad t > 0$

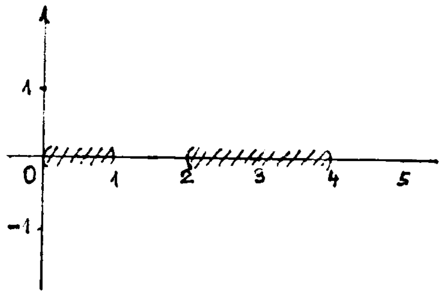
dobivamo

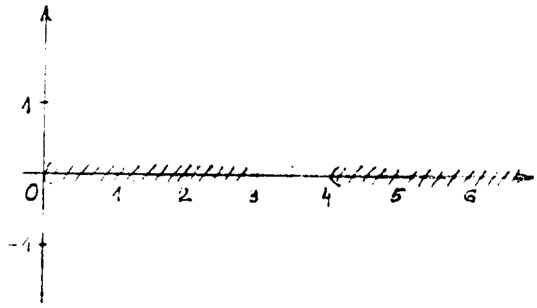
$\frac{t^2-3t+2}{t-4} < 0$ i $\frac{t^2-t-6}{t-4} > 0$, tj. $\frac{(t-1)(t-2)}{t-4} < 0$ i $\frac{(t-3)(t+2)}{t-4} > 0$.

Rješenja ovih nejednadžbi su

$t \in (0,1) \cup (2,4)$ i $t \in (0,3) \cup (4,+\infty)$.

Obje nejednadžbe su zadovoljene za $t \in (0,1)$, pa je rješenje polazne jednadžbe $x \in (-\infty, 0)$.





2. Neka je $a = \min\{x,y,z\}$. Tada je $\frac{2}{x^2} \leq \frac{2}{a^2}, \frac{3}{y^2} \leq \frac{3}{a^2}, \frac{4}{z^2} \leq \frac{4}{a^2} \quad \Rightarrow$ $1 \leq \frac{9}{a^2} \quad \Rightarrow \quad a \leq 3$.

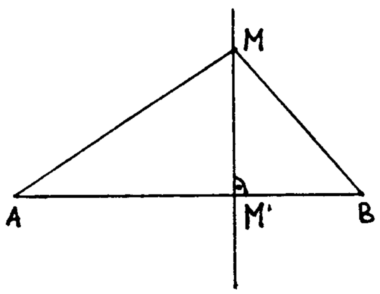
(a) Ne može biti $a = 1$.

(b) Ako je $a = 3$ tada je $x = y = z = 3$.

(c) Neka je $a = 2$. Sada mora mora biti $z > 2$ i $x = 2$ ili $y = 2$. Promatrajmo slučaj $x = 2$. Tada je $\frac{1}{2} = \frac{3}{y^2} + \frac{4}{z^2}$. Kada bi bilo $y = 2$, onda bi vrijedilo da je $\frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{4}{z^2} > \frac{1}{2}$ što nije moguće. Analogno ne može biti $z = 2$. Dakle slijedi da je $y \geq 3$ i $z \geq 3$. Za $b = \min\{y,z\}$ je $\frac{1}{2} \leq \frac{7}{b^2}$, tj. $b \leq 3$. Dakle jedan od brojeva y i z je jednak 3. Oba slučaja otpadaju jer rješenja nisu prirodni brojevi.

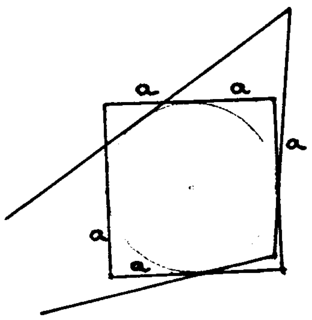
Neka je $y = 2$. Sličnim zaključivanjem se dobije $x = 3$ i $z = 12$.
Rješenja su: $(3,3,3)$ i $(3,2,12)$.

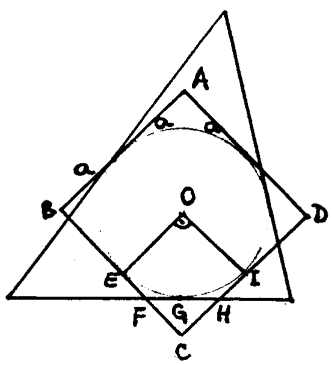
3. Neka je M' projekcija točke M na pravac AB. Tada je
$|AM|^2 - |MB|^2 = |AM'|^2 + |M'M|^2 - (|M'M|^2 + |M'B|^2) =$
$= (|AM'| + |M'B|)(|AM'| - |M'B|) = |AB| \cdot (|AM'| - |M'B|)$.
Ako je M' točka na pravcu AB takva da je
$|AB| \cdot (|AM'| - |M'B|) = k$ tada svaka točka pravca okomitog na pravac AB koji prolazi točkom M' zadovoljava danu jednakost. Ako neka točka M zadovoljava jednakost $|AM|^2 - |MB|^2 = k$, tada je $|AM'| - |M'B| = \frac{k}{|AB|}$ i takva točka je jednoznačno određena.



4. Moguća su dva slučaja i promatrat ćemo svaki posebno.

(a) Dva vrha kvadrata su u trokutu.
Dio ruba kvadrata unutar trokuta ima duljinu veću od $4a$, tj. veću nego dio izvan trokuta.





(b) Samo jedan vrh kvadrata je u trokutu.

Dijelovi kvadrata iz vrha A, koji su unutar trokuta imaju duljinu veću od $2a$. Preostala tri vrha B, C, D su izvan trokuta. Uzmimo vrh C. Budući da je $|EF| = |FG|$ i $|GH| = |HI|$ odakle se dobiva $|EF| + |FG| + |GH| + |HI| > \frac{1}{4}(2a\pi)$ tj. $|EF| + |HI| > \frac{1}{4}a\pi$. Slično se dobiva za B i D. Zbroj duljina dijelova ruba kvadrata unutar trokuta je veći od

$2a + 3 \cdot \frac{1}{4}a\pi > 4a$,

što znači da je duljina dijela opsega kvadrata unutar trokuta veća od dijela izvan njega.

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA KULTURE I PROSVJETE REPUBLIKE HRVATSKE
POKRET "ZNANOST MLADIMA" HRVATSKE ZAJEDNICE TEHNIČKE KULTURE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Varaždin, 13 - 16. svibnja 1993. godine

III. razred

1. U pravokutnom trokutu ABC stranica AB je hipotenuza, a težišnice AA' i BB' se sijeku u težištu T. Dokažite da je $\cos \angle ATB' \geq \frac{4}{5}$ i da jednakost vrijedi ako i samo ako je trokut jednakokračan.

2. Unutar kružnice polumjera R nalazi se n manjih kružnica polumjera $r_1, r_2, \ldots, r_n$ takvih da je $r_1 + r_2 + \ldots + r_n > 4R$. Dokažite da postoji pravac koji siječe barem 5 manjih kružnica.

3. Nad stranicama AB i BC trokuta ABC konstruirani su jednakostranični trokuti ADB i CBE. Ako je T težište trokuta CBE, a P polovište dužine AC dokažite da je $\angle DPT$ pravi kut.

4. U trokutu s duljinama stranica a, b, c i nasuprotnim kutovina α, β, γ definira se tzv. Brocardov kut ω formulom

$$m = \operatorname{ctg} \omega = \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma.$$

   (a) Izrazite zbrojeve $a^2+b^2+c^2$, $a^4+b^4+c^4$ i $b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2$ pomoću veličine m i površine P trokuta koristeći prethodno dokazanu formulu

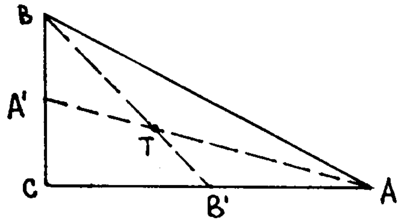
$$2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4 = 16P^2.$$

   (b) Dokažite da je $m \geq 3$. Što to znači za kut ω? Za koje trokute vrijedi jednakost?

   (c) Dokažite da ne postoji trokut kod kojeg su a, b, c, m cijeli brojevi.

Rješenja zadataka za treći razred.
Svaki zadatak nosi po 25 bodova.

1. Prema Pitagorinom poučku je $|AA'|^2 = (\frac{a}{2})^2 + b^2 = \frac{1}{4}(c^2 + 3b^2)$ i $|BB'|^2 = (\frac{b}{2})^2 + a^2 = \frac{1}{4}(c^2 + 3a^2)$.



Prema svojstvu težišnice je $|TA| = \frac{2}{3}|AA'|$ i $|TB'| = \frac{1}{3}|BB'|$.

Prema kosinusovom teoremu je:
$|AB'|^2 = |TA|^2 + |TB'|^2 - 2|TA| \cdot |TB'| \cdot \cos\phi$.

Nadalje, $|AB'| = \frac{1}{2}b$, pa je $\cos\phi = \frac{2c^2}{\sqrt{4c^4+9a^2b^2}}$.

Kako je $ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2) = \frac{1}{2}c^2$, onda je $9a^2b^2 \leq \frac{9}{4}c^4$. Zato je

$\cos\phi \geq \frac{2c^2}{\sqrt{4c^4+\frac{9}{4}c^4}} = \frac{4}{5}$.

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $ab = \frac{1}{2}(a^2+b^2)$ tj. ako i samo ako je $a = b$.

2. Povučemo bilo koji pravac kroz središte kružnice i projiciramo ortogonalno sve kružnice na taj pravac. Prema Dirichletovom principu barem jedna točka pravca bit će u projekciji baren 5 različitih kružnica. Naime, ako nijedna točka pravca ne bi bila u ortogonalnoj projekciji više od četiri kružnice tada bi bilo $r_1 + r_2 + \ldots + r_n \leq 4R$. Kroz tu točku povučemo okomicu na taj pravac i to je traženi pravac.

3. 1. rješenje

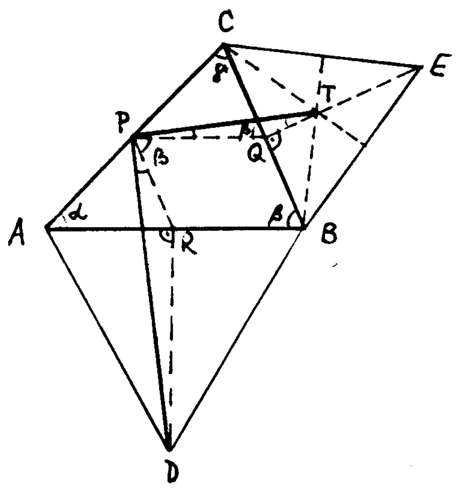
Trokuti PQT i DRP su slični jer je

$\angle PQT = \angle DRP = 90^\circ + \beta$ i

$\frac{PQ}{QT} = \frac{\frac{c}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} = \frac{DR}{RP} = \frac{\frac{c\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}}$.

Stoga je $\angle TPD = \angle RPD + \angle QPR + \angle TPQ =$

$= \angle QTP + \angle TPQ + \beta = 90^o - \beta + \beta = 90^o.$



2. rješenje

$\overrightarrow{DP} \cdot \overrightarrow{PT} = (-\overrightarrow{RD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}) \cdot (\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{QE}) =$

$= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{RD} \cdot \overrightarrow{QE} = \frac{1}{4}ac\cos\beta - \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{c\sqrt{3}}{2}\cos(180^o - \beta) = 0.$

4. (a) Iz Heronove formule slijedi

$16P^2 = 16s(s-a)(s-b)(s-c) =$

$= (a+b+c)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c) =$

$= [(b+c)^2 - a^2][a^2 - (b-c)^2] = (2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2) =$

$= 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 = 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4.$

Imamo dalje

$m = \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma = \frac{2bc\cos\alpha}{2bc\sin\alpha} + \frac{2ca\cos\beta}{2ca\sin\beta} + \frac{2ab\cos\gamma}{2ab\sin\gamma} =$

$= \frac{b^2+c^2-a^2}{4P} + \frac{c^2+a^2-b^2}{4P} + \frac{a^2+b^2-c^2}{4P} = \frac{a^2+b^2+c^2}{4P}$, tj.

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4Pm \qquad (1)$$

Kvadriranjem slijedi

$2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 + a^4 + b^2 + c^2 = 16P^2m^2,$

pa zbrajanjem i oduzimanjem s danom jednakošću

$$2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^2 = 16P^2 \tag{2}$$

slijedi odmah

$$b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 = 4P^2(m^2 + 1), \tag{3}$$

$$a^4 + b^4 + c^4 = 8P^2(m^2 - 1). \tag{4}$$

(b) Zbog (2) i (1) dobivamo

$$m^2 - 3 = \tfrac{1}{16P^2}[(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 3 \cdot 16P^2] =$$

$$\tfrac{1}{16P^2}[(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 3(2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4)] =$$

$$= \tfrac{1}{8P^2}(2a^4 + 2b^4 + 2c^4 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2 - 2a^2b^2) =$$

$$= \tfrac{1}{8P^2}[(b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 + (a^2 - b^2)^2] \geq 0$$

s jednakošću ako i samo ako je $a = b = c$, tj. trokut je jednakostraničan.

(c) Neka su a, b, c, m prirodni brojevi. Iz (3) i (4) slijedi formula

$$(m^2 + 1)(a^4 + b^4 + c^4) = 2(m^2 - 1)(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2),$$

koja se može pisati u obliku

$$2m^2(a^4 + b^4 + c^4) = (m^2 - 1)(a^2 + b^2 + c^2)^2. \tag{5}$$

Možemo pretpostaviti da su ovdje a, b, c relativno prosti, jer inače možemo cijelu jednakost podijeliti četvrtom potencijom najveće zajedničke mjere od a, b, c. Zato brojevi a, b, c nisu istodobno svi parni. Ako su sva tri broja neparna ili ako su dva parna a jedan neparan, tada su $(a^2 + b^2 + c^2)^2$ i $a^4 + b^4 + c^4$ neparni, dok je za parno m broj $2m^2$ paran, a $m^2 - 1$ neparan, dok za neparan m je $(m^2 - 1) = (m + 1)(m - 1)$ djeljivo sa 8, a $2m^2$ samo sa 2, pa je (5) nemoguće. Ako su od brojeva a, b, c dva neparna, a jadan paran, tada se lako vidi da su brojevi $a^2 + b^2 + c^2$ i $a^4 + b^4 + c^4$ umnošci broja 2 i neparnih brojeva, dok je $(a^2 + b^2 + c^2)^2$ umnožak broja 4 i neparnog broja. Za neparno m lijeva strana od (5) je djeljiva sa 4, dok je desna strana djeljiva bar sa 16. Za parno m desna strana od (5) djeljiva je samo sa 4, dok je lijeva strana djeljiva bar sa 16. Zato je (5) opet nemoguće.

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA KULTURE I PROSVJETE REPUBLIKE HRVATSKE
POKRET "ZNANOST MLADIMA" HRVATSKE ZAJEDNICE TEHNIČKE KULTURE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika srednjih škola Republike Hrvatske

Varaždin, 13 - 16. svibnja 1993. godine

IV. razred

1. Zadan je niz $\{a_n\}$ rekurzivnom formulom

   $a_{n+1} = \frac{a_n^2+b}{2}, \quad 0 < b \leq 1, \ a_o = 0.$

   Pokažite da je niz konvergentan i izračunajte mu limes.

2. Unutar kružnice polumjera R nalazi se n manjih kružnica polumjera $r_1, r_2, \ldots, r_n$ takvih da je $r_1 + r_2 + \ldots + r_n > 4R$. Dokažite da postoji pravac koji siječe barem 5 manjih kružnica.

3. Nad stranicama AB i BC trokuta ABC konstruirani su jednakostranični trokuti ADB i CBE. Ako je T težište trokuta CBE, a P polovište dužine AC dokažite da je $\angle DPT$ pravi kut.

4. U trokutu s duljinama stranica a, b, c i nasuprotnim kutovina α, β, γ dafinira se tzv. Brocardov kut ω formulom

   $m = \operatorname{ctg}\omega = \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma.$

   (a) Izrazite zbrojeve $a^2+b^2+c^2$, $a^4+b^4+c^4$ i $b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2$ pomoću veličine m i površine P trokuta koristeći prethodno dokazanu formulu

   $$2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4 = 16P^2.$$

   (b) Dokažite da je $m \geq 3$. Što to znači za kut ω? Za koje trokute vrijedi jednakost?

   (c) Dokažite da ne postoji trokut kod kojeg su a, b, c, m cijeli brojevi.

Rješenja zadataka za četvrti razred.
Svaki zadatak nosi po 25 bodova.

1. Pokažimo da je niz $\{a_n\}$ rastući : $a_1 = \frac{b}{2} > a_o$. Pretpostavimo da je $a_n > a_{n-1} \geq 0$. Tada je

   $a_{n+1} = \frac{a_n^2+b}{2} > \frac{a_{n-1}^2+b}{2} = a_n \geq 0,$

   što znači da je niz monotono rastuči.

   Pokažimo da je $a_n \leq 1$ tj. niz je ograničen

   $0 \leq a_{n+1} = \frac{a_n^2+b}{2} \leq \frac{1+b}{2} \leq 1.$

   Zato postoji $a = \lim_{n\to\infty} a_n$:

   $a = \frac{a^2+b}{2} \quad \Rightarrow \quad a^2 - 2a + b = 0$

   i odavde $\quad a = 1 - \sqrt{1-b}.$

2. Vidi rješenje 2. zadatka za treći razred.

3. Vidi rješenje 3. zadatka za treći razred.

4. Vidi rješenje 4. zadatka za treći razred.