ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA KULTURE
I PROSVJETE REPUBLIKE HRVATSKE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske
Crikvenica, 12.–15. svibnja 1994. godine
7. razred

1. Izračunaj

$$1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + 9 + 10 - 11 \ldots + 1993 + 1994 \,.$$

2. Nad stranicom $\overline{AB}$ kvadrata $ABCD$ nacrtan je jednakostranični trokut ABE. Koliki je kut $\sphericalangle DEC$?

3. Dva pješaka krenula su istovremeno iz mjesta A i B i susrela se nakon 6 sati. Kad bi brzina pješaka iz mjesta A bila za 0.25 km na sat veća, a brzina pješaka iz mjesta B bila za 0.75 km na sat veća, pješaci bi se susreli 40 minuta ranije.
   Kad bi pješak iz mjesta B krenuo smjerom pješaka iz mjesta A, tada bi nakon 4 sata udaljenost među njima bila za $\frac{1}{12}$ manja od udaljenosti mjesta A i B.
   Odredi udaljenost mjesta A i B i brzinu svakog pješaka.

4. Bogati voćar, vlasnik 141 stabla maslina u masliniku želi ta stabla podijeliti svojoj djeci i unucima, tako da svako njegovo dijete dobije 5 stabala maslina više nego svako unuče.
   Koliko djece, a koliko unučadi ima bogati voćar, ako je ukupan broj djece i unučadi 18 ?
   Koliko stabala maslina je dobilo svako njegovo dijete, a koliko svako unuče ?

5. Dan je konveksni četverokut $ABCD$. Dokaži da bilo koja točka tog četverokuta leži barem u jednom od četiri kruga čiji su promjeri stranice tog četverokuta.

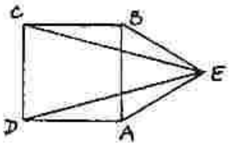
DRŽAVNO RJEŠENJA 7. RAZRED 194

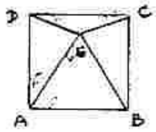
1. Od 1992 pribrojnika možemo načiniti 498 zbrojeva po 4 pribrojnika na slijedeći način:

$$1 + (2 - 3 - 4 + 5) + (6 - 7 - 8 + 9) + \ldots + (1990 - 1991 - 1992 + 1993) + 1994 .$$

Kako je zbroj u svakoj zagradi jednak nuli, to je očito zadani zbroj jednak 1995.

2. 1°. Kut $\angle DAE = \angle CBE = 150°$. Kako je $|AE| = |AD|$ i $|BC| = |BE|$, slijedi da je $\angle ADE = \angle AED = \angle BCE = 15°$. Sad je očito $\angle DCE = 30°$.
2°. Kut $\angle DAE = 30°$, a zbog $|AD| = |AE|$ je $\angle ADE = \angle AED = 75°$, a to znači da je $\angle DEC = 150°$.





3. Neka je x brzina pješaka iz mjesta A, te y brzina pješaka iz mjesta B i neka je $x > y$. Udaljenost mjesta A i B je $6(x+y)$ kilometara. Sa povećanom brzinom oba bi pješaka prešla u jednom satu $x + y + 1$ kilometara. Vrijedi jednadžba $5\frac{1}{3}(x + y + 1) = 6(x + y)$, ili $x + y = 8$. Mjesta A i B udaljena su 48 kilometara.
Ako se oba pješaka kreću u istom smjeru, svakim se satom udaljenost među njima smanji za $x - y$ kilometara. Zato vrijedi jednadžba $4(x - y) = \frac{1}{12} \cdot 48$, ili $x - y = 1$. Rješenje sustava $x + y = 8$, $x - y = 1$ je $x = 4.5$, $y = 3.5$. Brzina pješaka iz mjesta A je 4.5 km na sat, a iz mjesta B je 3.5 km na sat.

4. Neka je x broj voćareve djece, tada je $18 - x$ broj unučadi. Neka je y broj maslina koje je dobilo svako unuče, tada je svako voćarevo dijete dobilo $y + 5$ stabala maslina. Zato vrijedi jednakost $x(y + 5) + y(18 - x) = 441$, ili $5x + 18y = 441$. Lagano se pokaže da je $x = 9$, pa je $y = 22$.
Voćar ima 9 djece i isto toliko unučadi, a svako njegovo dijete dobilo je 27 stabala maslina, dok je svako unuče dobilo 22 stabla.

5. Točka E prema Talesovom poučku leži na kružnici kojoj je promjer $\overline{AD}$, a to znači da svaka točka trokuta AED leži u krugu kome je promjer $\overline{AD}$. Slično vrijedi i za ostala 3 pravokutna trokuta. Kako je četverokut $ABCD$ dijagonalom $\overline{BD}$ podijeljen na 4 pravokutna trokuta, slijedi da svaka točka tog četverokuta leži barem u jednom od 4 navedena kruga.

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA KULTURE
I PROSVJETE REPUBLIKE HRVATSKE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske
Crikvenica, 12.–15. svibnja 1994. godine
8. razred

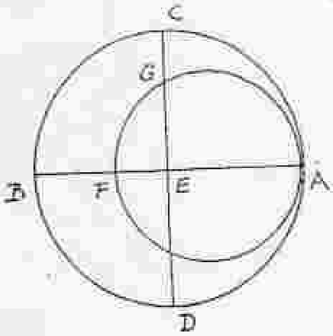
1. Izračunaj:

$$\frac{199419941992 \cdot 199419941994 \cdot 199419941996}{100010001 \cdot (199419941994^2 - 4)} .$$

2. Odredi sve cijele brojeve a i b za koje vrijede jednakosti:

$$a^2 - 10b + 1 = 0 \quad \text{i} \quad b^2 + 14a + 73 = 0 .$$

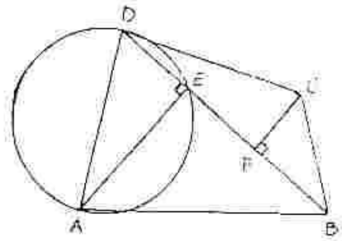
3. Dvije kružnice dodiruju se iznutra u točki A. Neka su $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ dva međusobno okomita promjera veće kružnice.
Koliki je promjer veće, a koliki promjer manje kružnice, ako je $|BF| = 5$, a $|CG| = 3$ (vidi sliku) ?



4. Šiljastokutnom trokutu ABC opisana je kružnica sa središtem u točki S. Pravci AS, BS, CS sijeku tu kružnicu još redom u točkama D, E, F.
Dokaži da je površina šesterokuta $AFBDCE$ dva puta veća od površine trokuta ABC.

5. U broju 12345678901234567890...1234567890, koji ima dvjesto znamenki, precrtamo sve znamenke na neparnim mjestima. U preostalom broju od sto znamenki precrtamo znamenke na neparnim mjestima. Nakon određenog broja precrtavanja znamenki na neparnim mjestima ostaje neprecrtana znamenka. Koja ?

RJEŠENJA 8. RAZRED

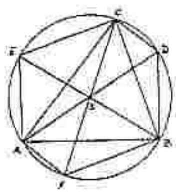


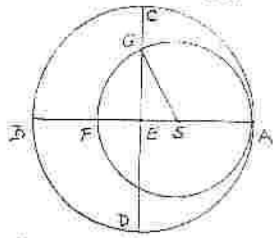
1. Neka je $x = 199419941994$. Tada zadani razlomak možemo pisati kao

$$\frac{(x-2)x(x+2)}{100010001 \cdot (x^2-4)} = \frac{100010001 \cdot 1994}{100010001} = 1994\,.$$

2. Zbrajanjem zadanih jednakosti dobivamo $a^2 + 14a + b^2 - 10b + 74 = 0$, ili $a^2 + 14a + 49 + b^2 - 10b + 25 = 0$, tj. $(a+7)^2 + (b-5)^2 = 0$, pa je $a = -7$, $b = 5$ jedino rješenje.

3. Neka je točka S središte manje kružnice i neka je r polumjer manje, a R polumjer veće kružnice. Primjenom Pitagorina poučka na trokut ESG vrijedi jednakost $r^2 = (R-3)^2 + (R-r)^2$, ili nakon sređivanja $0 = 2R^2 - 6R - 2rR + 9$, a zbog $2r = 2R - 5$ imamo $0 = 2R^2 - 6R - 2R(2R-5) + 9$, tj. $R = 9$. Zato je $2R = 18$ i $2r = 13$.





4. Treba najprije pokazati da je $\triangle AFS \cong \triangle DCS$, $\triangle FBS \cong \triangle CES$ i $\triangle BDS \cong \triangle EAS$ iz čega proizlazi da je $P(AFBD) = P(ADCE)$, tj. $P(AFBDCE) = 2P(AFBD)$.
U trokutu ABD očito vrijedi $P(ABS) = P(BDS)$, u trokutu BCF vrijedi $P(BCS) = P(FBS)$ i u trokutu AFC vrijedi $P(ACS) = P(AFS)$. Kako je $P(ABC) = P(ABS)$ [illegible] $(BCS) + P(ACS) = P(BDS) + P(FBS) + P(AFS)$ slijedi da je $P(ABC) = P(AFBD)$, a to znači da je $P($[illegible]$CE) = 2P(ABC)$.

5. Poslije prvog precrtavanja ostalo je 100 znamenki koje stoje na parnim mjestima. Poslije drugog precrtavanja ostalo je 50 znamenki koje stoje na mjestima djeljivim s 4, poslije trećeg precrtavanja ostale su znamenke na mjestima djeljivim s 8, pa sa 16, sa 32, sa 64. Nakon sedmog precrtavanja ostat će jedna znamenka koja stoji na 128. mjestu, a to je znamenka 8.